

Walsh함수 단일항전개에 의한 대규모 시스템의 계층별 최적제어

안두수* · 이한석** · 이해기**

*. 성균관대학교 전기공학과

**. 충주실업전문대학 산업안전과

Hierarchical Optimal Control of Large Scale System via Single Term Walsh Series

Ahn, Doo-Soo* · Lee, Han-Seok** · Lee, Hae-Ki**

*. Dept. of Electrical Engineering, Sung-Kyun-Kwan University

** . Dept. of Chung-Ju Industry College Industry Safety

Abstract

This paper presents a method of hierarchical optimal control for time invariant large scale systems via Single Term Walsh Series. It is well known that the optimal control of a large scale system with quadratic performance criteria often involves the determination of time varying feedback gain matrix by solving the matrix Riccati differential equation, which is usually quite difficult.

Therefore, in order to solve the problem, this paper is introduced to Single Term Walsh Series. The advantages of proposed method are simple and attractive for the control of large scale system in computation.

I. 서론

대규모 상호 연관 시스템은 보통 대부분의 시간을 정상상태에서 작동하지만 미지의 외란이 도입되면 미리 계산된 정상상태로부터 시스템의 상태가 이탈되기 때문에 최적한 방법으로 시스템을 정상 상태로 되돌려야 할 필요가 있다. 이런 목적을 달성하기 위해 일반적인 최적화 기법을 이용할 수 있지만 시스템의 차수가 고차인 경우에는 매우 어렵다. 이와같은 문제점을 해결하기 위해, 본 연구에서는 계층별 제어이론을 도입하여 대규모시스템의 최적제어에 접근 할 것이다. [1]-[4]

일반적으로 계층별 최적제어를 수행하기 위해서는 부시스템의 최적제어를 위해 행렬 리카티(Riccati) 미분방정식의 해를 구해야 하지만, 본 연구에서는 리카티 방정식을 직접 이용하지 않고, 표준형방정식(Canonical equation)과 상태전이행렬(State transition matrix)의 특성에 Walsh함수 단일항 전개를 적용하여 리카티 방정식의 해를 간단한 대수 연립방정식[5]으로부터 결정 할 수 있도록 하는 알고리즘을 제시했으며, 이 알고리즘으로 부시스템의 최적제어 이득행렬 및 제어 입력을 결정함으로써 전체 대규모시스템의 최적제어를 간단하게 구현하였다.

II. Walsh함수 단일항전개에 의한 상태방정식의 해

선형시불변 n차 상태방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t) \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0$$

Walsh함수 단일항전개를 이용하기 위해 $t = \frac{\xi}{m}$ 로 스케일링하면 다음과 같다. ($t \in [0, \frac{1}{m}]$ 일때 $\xi \in [0, 1]$ 이고, m 은 전개항수)

$$\frac{d}{d\xi} x(\xi) = \frac{1}{m} A x(\xi) + \frac{1}{m} B u(\xi) \quad (2.2)$$

$\xi \in [0, 1]$ 에서 $\frac{d}{d\xi} x(\xi)$, $x(\xi)$, $u(\xi)$ 를 각각 Walsh함수 단

일항 $\phi_0(\xi)$ 만을 이용하여 전개하면 (s, x, u 는 Walsh함수 단 일항계수, 첨자 1은 m 항 전개중 1번째 구간을 의미함)

$$\frac{d}{d\xi} x(\xi) = s_1 \phi_0(\xi) \quad (2.3)$$

$$x(\xi) = x_1 \phi_0(\xi) \quad (2.4)$$

$$u(\xi) = u_1 \phi_0(\xi) \quad (2.5)$$

와 같이 나타 낼 수 있고, $\int_0^1 \phi_0(\xi) d\xi$ 는 Walsh함수 단일항 적분이며 다음과 같다.

$$\int_0^1 \phi_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \phi_0(\xi) \quad (2.6)$$

식(2.3), 식(2.4), 식(2.5)를 식(2.2)에 대입하고 식(2.6)의 관계를 도입하면 다음과 같은 3개의 일반화된 반복 알고리즘 [6]으로부터 임의의 k번째 구간에서 식(2.2)의 해를 얻는다.

$$s_k = [I - \frac{1}{2m} A]^{-1} [\frac{1}{m} A x(k-1) + \frac{1}{m} B u_k]$$

$$x_k = \frac{1}{2} s_k + x(k-1)$$

$$x(k) = s_k + x(k-1) \quad (2.7)$$

단, $k = 1, 2, 3, \dots, m$ (전개항수)

III. 계층별 최적제어

선형 시불변 대규모시스템을 다음과 같이 표현하자.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0$$

이에 대한 평가함수는 다음과 같이 정의한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (3.2)$$

단, Q : Positive semidefinite diagonal matrix
R : Positive definite diagonal matrix

식(3.1)은 대규모시스템이므로 제어가 어렵다. 따라서 상호 연결된 n(부시스템의 갯수)개의 부시스템으로 분할하면 i번째 부시스템은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + C_i z_i \quad (3.3)$$

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

여기서 $x_i(t)$ 는 i번째 부시스템에 대한 n_i 차 상태벡터이고, $u_i(t)$ 는 m_i 차 제어벡터이며, $z_i(t)$ 는 다른 부시스템과 연결된 q_i 차 벡터로 전체 시스템의 상태벡터의 선형조합이다. 또한 식(3.2)의 평가함수는 다음과 같이 분할 할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_f} (x_i(t)^T Q_i x_i(t) + u_i(t)^T R_i u_i(t)) dt \quad (3.5)$$

이제 이와같은 시스템의 최적화를 위해 쌍대함수[3] (Dual function)인 $\theta(\lambda)$ 를 정의한다.

$$\theta(\lambda) = \min_{x_i, u_i} \{ L(x_i, u_i, \lambda, z_i) \} \quad (3.6)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$L(x_i, u_i, \lambda, z_i) = \sum_{i=1}^n \int_0^{t_f} \left[\frac{1}{2} x_i^T(t) Q_i x_i(t) + \frac{1}{2} u_i^T(t) R_i u_i(t) + \lambda_i^T(t) \left\{ z_i(t) - \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j(t) \right\} + p_i^T(t) \left\{ -\frac{d}{dt} x_i + A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i \right\} \right] dt \quad (3.7)$$

여기서, $\lambda(t)$: 라그랑제 곱연산자, $p_i(t)$: adjoint 벡터 식(3.3), 식(3.4)에 대한 식(3.5)의 평가함수를 최소화하는 문제는 Strong Lagrange Duality 정리에 의해^{[1][2]}

$$\text{Max } \theta(\lambda) = \min_{u_i (i=1,2,\dots,n)} J \quad (3.8)$$

즉, 식(3.6)에서 $\theta(\lambda)$ 를 최대화 하는 것과 같다. $\theta(\lambda)$ 를 최대화하는 필요조건으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\lambda_i(t) = -C_i^T p_i(t) \quad (3.9)$$

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j(t) \quad (3.10)$$

상호예측원리(The interaction prediction principle)를 이용한 하위레벨에 대한 조정원칙^[1]은 식(3.11)와 같이 표현된다. 다카하라(Takahara)에 의해 수렴성이 증명된 이 알고리즘의 중요한 특징은 하위레벨에서의 계산량이 아주 작다고 하는 점에 있는데, 이는 식(3.11)의 우변만 계산하면 좌변은 바로 다음 단계의 값이 이용되기 때문이다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} -C_i p_i(t) \\ \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j(t) \end{bmatrix}^t \quad (3.11)$$

여기서, $t+1$ 은 t 의 다음 상태를 의미함

하위레벨에서는 n 개의 부시스템에 대한 각 시스템의 최적제어를 수행하면 된다. i 번째 독립된 부시스템에 대한 최적제어 벡터는 최대원리에 의해

$$u_i(t) = -R_i^{-1} B_i^T p_i(t) \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = -Q_i x_i(t) - A_i p_i(t) + \sum_{j=1}^n [\lambda_j^T(t) L_{ji}]^T p_i(t_f) = 0 \quad (3.13)$$

이며 $u_i(t)$ 를 식(3.3)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = A_i x_i(t) - B_i R_i^{-1} B_i^T p_i(t) + C_i z_i(t) \quad (3.14)$$

이제, $p_i(t)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$p_i(t) = K_i(t) x_i(t) + \Lambda_i(t) \quad (3.15)$$

$K_i(t)$ 와 $\Lambda_i(t)$ 를 구해야 하는데, $K_i(t)$ 는 행렬 리카티 미분방정식(Matrix Riccati equation)^[5]을 만족하는 해이다.

본 연구에서는 리카티 미분방정식을 직접 이용하지 않고 식(3.13), (3.14)를 이용하여 다음과 같은 표준형방정식(Canonical equation)^[3]을 이용하여 최적제어 벡터를 구한다.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_i(t) \\ \frac{d}{dt} p_i(t) \end{bmatrix} = M_i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ p_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_i(t) \\ E_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\text{단, } M_i = \begin{bmatrix} A_i & -B_i R_i^{-1} B_i^T \\ -Q_i & -A_i^T \end{bmatrix}, \quad D_i(t) = C_i z_i(t),$$

$$E_i(t) = \sum_{j=1}^n [\lambda_i(t) L_{ij}]^T$$

식(3.16)의 상태전이 행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

식(3.17)의 상태전이 행렬을 이용하면 식(3.16)은

$$\begin{bmatrix} x_i(t_f) \\ p_i(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x_i(t) \\ p_i(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} D_i \\ E_i \end{bmatrix} d\tau \quad (3.18)$$

또한 식(3.18)에서 $p_i(t)$ 를 구하면 식(3.15)의 관계로부터

$$K_i(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t) \quad (3.19)$$

$$\Lambda_i(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \left\{ \int_t^{t_f} (\Phi_{21}(t_f, \tau) D_i(\tau) + \Phi_{22}(t_f, \tau) E_i(\tau)) d\tau \right\} \quad (3.20)$$

임을 알 수 있다.

여기서 $\Phi_{22}(t_f, \tau)$, $\Phi_{21}(t_f, \tau)$ 는 상태전이행렬의 특성을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\frac{d}{dt} \Phi(t_f, t) = -\Phi(t_f, t) M_i \quad (3.21)$$

$$\Phi(t_f, t_f) = I \quad (3.22)$$

또한, 다음 식으로부터

$$p_i(t) = K_i(t) x_i(t) + \Lambda_i(t) \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = [A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T K_i] x_i(t) + D_i(t) - B_i R_i^{-1} B_i^T \Lambda_i(t) \quad (3.24)$$

$x_i(t)$ 와 $p_i(t)$ 를 구할 수 있다. 이제 i 번째 부시스템에 대한 최적 제어벡터는 다음과 같다.

$$u_i(t) = -R_i^{-1} B_i^T p_i(t) \quad (3.25)$$

상위레벨에서 식(3.11)의 관계를 이용하여 식(3.16) D_i, E_i 를 개선시켜 전체 대규모시스템의 최적제어를 수행한다.

IV. 월위함수 단일항전개에 의한 부시스템의 최적제어

월위함수 단일항 전개를 이용하기 위해 $\xi = \frac{m}{t_f} t = \frac{1}{\Delta t} t$ 로 치환하고 식(3.21)을 다음과 같이 치환한다. (여기서, Δt : 샘플링 구간, m : 전개항수)

$$\frac{d}{d\xi} \Phi(t_f, \xi) = -\frac{t_f}{m} M \Phi(t_f, \xi) \quad (4.1)$$

$\frac{d}{d\xi} \Phi(t_f, \xi)$ 와 $\Phi(t_f, \xi)$ 를 월위함수 단일항으로 전개하면 (Φ, H 는 월위계수, k 는 임의의 k 번째 구간)

$$\frac{d}{d\xi} \Phi(t_f, \xi) = H_k \phi_0(t_f, \xi) \quad (4.2)$$

$$\Phi(t_f, \xi) = \Phi_k \phi_0(t_f, \xi) \quad (4.3)$$

$$\text{단, } \Phi_k(t_f, \xi) = \begin{bmatrix} \Phi_{11k}(t_f, \xi) & \Phi_{12k}(t_f, \xi) \\ \Phi_{21k}(t_f, \xi) & \Phi_{22k}(t_f, \xi) \end{bmatrix}$$

이고, 식(2.7)의 반복적인 역방향 연산 ($k = m, m-1, \dots, 1$)에 의해 각 구간마다 식(4.1)의 해를 얻을 수 있다. 이제 식(3.20)의 적분부분에 월위함수 단일항적분을 적용하기 위해 다음을 정의한다.

$$w(t) = \int_t^{t_f} (\Phi_{21}(t_f, \tau) D(\tau) + \Phi_{22}(t_f, \tau) E(\tau)) d\tau \quad (4.4)$$

식(4.4)의 적분을 각각의 세부구간의 적분으로 표현하면 다음과 같다. (Δt : 샘플링 구간, m : 전개 항수)

$$w(t) = \int_{(m-1)\Delta t}^{t_f} \alpha(t_f, \tau) d\tau + \int_{(m-2)\Delta t}^{(m-1)\Delta t} \alpha(t_f, \tau) d\tau + \int_{t_k=\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \alpha(t_f, \tau) d\tau + \dots \quad (4.5)$$

여기서, $\alpha(t_f, \tau) = \Phi_{21}(t_f, \tau) D(\tau) + \Phi_{22}(t_f, \tau) E(\tau)$

$w(t) = W_k \phi_0(t)$ 로 전개하면 다음과 같다. (W_k 는 월위함수 단일항 계수)

$$W_m = \frac{t_f}{2m} (\Phi_{21m} D_m + \Phi_{22m} E_m) \quad (\because \int_0^1 \phi_0(t) dt = \frac{1}{2}) \quad (4.6)$$

여기서, m 은 마지막 세부구간. ($k = m$ 인 구간)

$$W_k = W_{k+1} + \frac{t_f}{m} \left(\frac{\Phi_{21k} D_k + \Phi_{22k} E_k}{2} \text{ 단, } k(\text{임의의 구간}) \right. \\ \left. + \frac{\Phi_{21k+1} E_{k+1} + \Phi_{22k+1} E_{k+1}}{2} \right) \quad (4.7)$$

단, $k(\text{임의의 구간}) = m-1, m-2, \dots, 2, 1$

식(4.7)로부터 임의의 구간 k에서의 적분값은 역방향으로 적분값을 더함으로써 구할 수 있음을 알 수 있고, 식(4.4) - (4.7)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$K_k = -\Phi_{22k}^{-1} \Phi_{21k} \quad (4.8)$$

$$A_k = -\Phi_{22k}^{-1} W_k \quad (4.9)$$

식(4.8), 식(4.9)에서 구한 K_k, A_k 를 식(3.24)에 대입해서 식(2.7)의 반복계산을 이용하면 k(임의의 구간)번째 구간에서 최적상태벡터인 x_k 를 구할 수 있고, 잠정적인 p_k 와 u_k 값은 식(4.10), (4.11)로부터 구할 수 있다.

$$p_k = K_k x_k + A_k \quad (4.10)$$

$$u_k = -R^{-1} B^T p_k \quad (4.11)$$

이상에서와 같이 각 부시스템의 잠정적인 최적 제어벡터가 전체시스템의 최적제어 벡터인가를 확인하기 위해 다음과 같은 오차함수를 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{오차} = & \left(\frac{t_f}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [(D_i)_{k^{t+1}} - (D_i)_{k^t}]^T [(D_i)_{k^{t+1}} - (D_i)_{k^t}] \\ & + \left(\frac{t_f}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [(E_i)_{k^{t+1}} - (E_i)_{k^t}]^T [(E_i)_{k^{t+1}} - (E_i)_{k^t}] \end{aligned} \quad (4.12)$$

대규모시스템의 최적제어 벡터는 식(4.12)의 상호작용 오차를 충분히 적게하는 값으로부터 얻을 수 있다. [2] 즉, 전체시스템의 최적제어 벡터를 얻기 위해서는 상위레벨에서 D_i 와 E_i 를 개선 시켜서 하위레벨로 전달하여 전체시스템의 최적제어를 수행할 수 있다.

V. 시뮬레이션

다음의 선형 시불변 5차 상태방정식[7]에 본 연구에서 제시한 월쉬함수 단일항전개에 의한 계층별 최적제어 방법을 적용해 보자.

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = 1, x_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

또, 평가함수를 다음과 같이 표현하자.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (5.2)$$

$$\text{여기서, } Q = R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, t_f = 2\text{sec.}$$

식(5.1)를 2차와 3차 2개의 부시스템으로 분할하여 그림 1에는 최적제어벡터를 그림 2에는 최적상태벡터를 나타냈다.

VI. 결론

본 연구에서는 선형 시불변 대규모시스템의 최적제어를 위해 월쉬함수 단일항 전개에 의한 비집중형 최적제어 기법을 제시했다. 일반적으로 비집중형 최적제어에서 부시스템의 최적제어 벡터를 구하기 위해서는 행렬 리카티(Riccati) 미분방정식의 해를 구해야 하지만, 해를 구하기가 매우 어려운 것으로 알려져 있다. 이와같은 문제점을 해결하기 위해서 본 연구에서는 표준형방정식(Canonical equation)에 월쉬함수 단일항 전개를 이용하여 반복적인 대수 방정식으로부터 최적제어 입력을 결정할 수 있도록 하였고, 이 정보를 상위단계 전달하여 전체대규모시스템의 최적제어를 수행할 수 있도록 하였다.

본 연구에서 얻을 수 있었던 결과는 첫째, 대규모시스템을 몇개의 부시스템으로 분할하여 각각의 부시스템에 월쉬함수 단일항전개를 이용했기 때문에 컴퓨터의 적용이 쉬우며 계산상의 잇점이 있다. 둘째, 시스템의 차수가 매우 큰 경우에 분할하지 않고 처리한 경우보다 빠르고 간편하게 최적제어 벡터를 구할 수 있기 때문에 실시간 처리가 가능하다. 이와같은 장점을 실제 화학공정이나 수처리 시스템등에 적용한다면 빠르고 간편하게 최적제어를 수행할 수 있을 것이라고 생각된다.

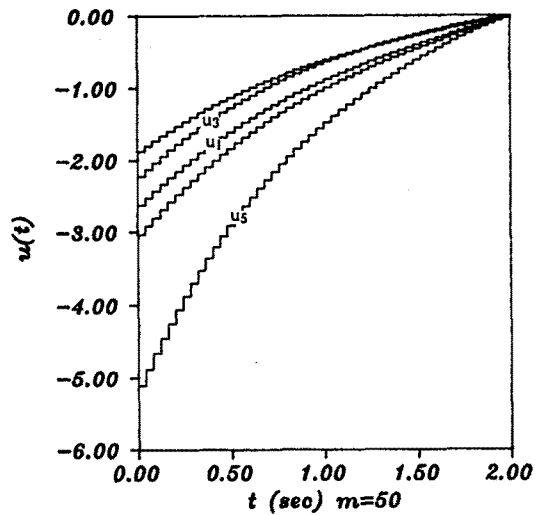


그림 1. 최적제어 벡터

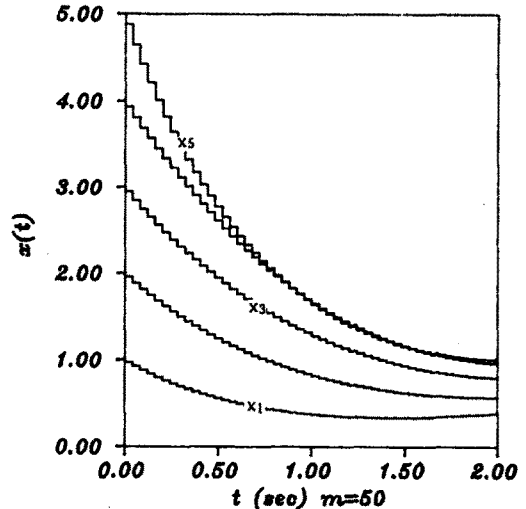


그림 2. 최적상태 벡터

참고문헌

- [1] M.G. Singh and M.F. Hassan, "Multilevel feedback control for interconnected dynamic system using the prediction principle." IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Vol.6, No.4, pp.233-239, 1976.
- [2] Jian-Min Zhu and Yong-Zai Lu, "New approach to hierarchical control via Block pulse transformation", INT. J. CONTROL, VOL. 46, No. 2, pp. 441-453, 1987.
- [3] 이명규, "분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구", 성균관 대학교 박사학위 논문, 1989.
- [4] Nils R. Sandell, JR. and Pravin Varaiya, "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23, No. 2, 1978.
- [5] Chih-Fan Chen and Chi-Huang Hsiao, "Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh function", IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 20, No. 5, pp. 596-602, 1975.
- [6] K.R. Palanisamy, "Analysis of nonlinear system via single term Walsh series approach", INT. J. SYSTEMS, SCI. Vol. 13, No. 8, pp. 929-935, 1982.
- [7] A.P. Sage, "Optimum system control", Prentice-Hall, INC, 1977.