

선형다변수계의 2자유도 H_{∞} 최적방법에 의한 Robust-Servo System의 설계

황 창선, *김 동완, 김 문수, 김 정택, 심 재식
부산대학교 전기공학과

A Design of Linear Multivariable Robust-Servo-System by Two-Degree-of-Freedom H_{∞} Optimum Method

C.S. Hwang, *D.W. Kim, M.S. Kim, J.T. Kim, J.S. Shim
Department of electrical engineering, Pusan National University

Abstract

In this paper, we deal with design method of two-degree-of-freedom control system which desired property of robustness and tracking can be achieved simultaneously. Controller is designed by means of model matching method and H_{∞} weighted sensitivity minimization design method. Satisfactory result of design example is obtained by simulation.

1. 서론

다변수 제어계의 중요한 설계 목적은 다음과 같다.

- (1) 소기의 목표치 특성의 달성.
- (2) 모델링오차 및 외란동에 대응하는 Robust 특성.

설계목적 (1) 과 (2)를 동시에 달성하기 위해 feedforward 부분과 feedback 부분을 독립해서 설계할 수 있는 2자유도 제어계의 구조 및 설계 방법을 제안한다.

최근 강인성에 대한 최적화 연구는 Weighted sensitivity function을 최소화 시키는 제어기의 설계(Zames:1981)와 Excess robustness를 최대화 시키는 제어기의 설계로 대별된다. 또한 전달함수 분해법에 의한 강인한 제어기의 설계가 연구되고 있으나 대부분이 최소 감도화 문제에 집중되어 있으며 1자유도라는 한계로 목표치 특성과의 타협에 미비점이 있고, 2자유도계의 경우도 플랜트 변동과 외란제거의 동시 고려가 미약하며 설계 방법도 체계적이지 못한 점이 있다. 최근에 저감도화 문제에 H_{∞} 이론을 적용 하는 경우에도 극점이 원점에 있는 경우에는 그 적용 결과가 만족지 못하였다.

본 연구에서는 먼저, 전체 시스템을 2자유도계로 구성하여 목표치 특성과 Robust 특성을 독립적으로 설계할 수 있도록 한후, Zames의 H_{∞} 방법과 Yoular 등의 Q파라메타 표현을 2자유도계에 도입하여 새로운 2자유도계의 구조를 도출한다.

목표치 특성은 규범모델과 일치하도록 설계하며 강인성 특성은 Zames의 H_{∞} 방법을 도입하여 저감도 특성이 달성되도록 하는 H_{∞} 의 변형된 방법을 개발하고 특히 극점이 원점에 있는 경우에도 저감도 특성이 달성되는 강인한 제어기를 설계한다.

또한 제안된 설계법으로 선형화된 로보트 미니플레이터에 적용하여, 모델링 오차와 외란이 동시에 존재하는 경우에도 목표치 특성과 강인성을 동시에 달성할 수 있음을 확인하였다.

2. 강인한 다변수 2자유도 제어계의 구조

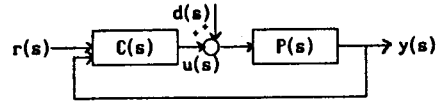


그림 1. 2자유도제어계(일반형)

그림 1.의 선형 시불변 다변수계 S(C,P)를 고차대상으로 하며, 제어대상은 전체 제어계의 안정성을 유지시키는 Proper로 한다. 모든 함수는 복소수인자 s 를 갖는 유리함수이며 특별한 경우의에는 함수의 인자를 생략한다.

P(S): 제어대상의 전달함수행렬 $\in R^k$

C(S): 설계되는 보상기의 전달함수행렬 $\in R^k$

c.o. 무한원 점을 포함한 안정한 폐루반편

$R^k = \{ f(s) \in R(s) \mid \sup_{\omega \in \text{SEC}} |f(j\omega)| < \infty \}$

$C(s) \in R^k$ 은 Matrix C(s)의 모든 요소가 Proper인 안정한 유리함수인 경우를 의미하고, Re(s)는 복소수인자 s 의 실수부, r은 목표치 d는 외란 u는 제어입력 y는 출력 신호이다.

2.1 안정조건

외부 입력 (r,d) 가 Bounded input 일때 출력 (u,y) 가 Bounded output 이면 제어계는 안정이다. 2자유도계의 (r,d) \rightarrow (u,y)의 전달함수 행렬 K_{ij} 는

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} C_1(1+PC_2)^{-1} & -PC_2(1+PC_2)^{-1} \\ (1+PC_2)^{-1}PC_1 & (1+PC_2)^{-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

으로 구해지며, 제어계가 안정하기 위해서는 K_{ij} 의 각 요소가 안정 하여야 한다. 여기서 $C = (C_1, -C_2)$ 로 둔다.

전달함수 분해법에 의한 전체 제어계의 안정조건은 다음으로 구할 수 있다.

$$\text{안정 조건: i) } \Delta = \widetilde{Dc_2Dp} + \widetilde{Nc_2Np} \text{ 가 Unimodular} \\ = I : \text{특성행렬} \quad (2.2.1)$$

$$\text{ii) } \Delta^{-1} \widetilde{Dc_2C_1} \in R^k, Np \in R^k \quad (2.2.2)$$

단, $P = NpDp^{-1} = \widetilde{Dp}^{-1} \widetilde{Np}$: P의 우 좌기약분해

$C_2 = Nc_2Dc_2^{-1} = \widetilde{Dc_2}^{-1} \widetilde{Nc_2}$: C_2 의 우좌기약분해

$XNp + YDp = I$: Bezout 방정식

2.2 안정화 보상기의 파라메타 표현

일반형 2자유도계에서 제어입력 $u = C_1r - C_2y$ 이고 $C_1 = C_A + C_B, C_2 = C_C$ 로 두면 다음의 FF형 2자유도계로 동가 표현된다.

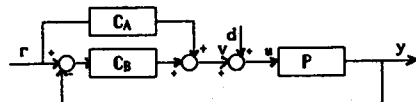


그림 2. 목표치형 2자유도계

1) 강인한 제어기 $C_2 (=C_B)$ 의 파라메타 표현

안정조건 i) $\widehat{D}C_2D_P + \widehat{N}C_2N_P = I$ 와 Bezout 방정식의 $XN_P + YD_P = I$ 를 만족하는 $X, Y \in R^H_0$ 를 이용하면 강인한제어기 $C_2 (=C_B)$ 는

$$C_2 = \widehat{D}C_2^{-1}\widehat{N}C_2 = (Y - ON_P)^{-1}(X + OD_P) \quad (2.3)$$

로 얻어지고 다음으로 0 parameter 표현된다.

$$C_2 = (I - ON_P)^{-1}O \quad O \in R^H_0, \det(Y - OD_P) \neq 0 \quad (2.4)$$

2) 목표치 추종제어기 $C_1 (=C_A + C_B)$ 의 파라메타 표현

안정조건 ii)로부터 $\widehat{D}^{-1}\widehat{D}C_2C_1 = K$ 로 두면 C_1 은

$$C_1 = \widehat{D}C_2^{-1}K = (I - ON_P)^{-1}K \quad O, K \in R^H_0 \quad (2.5)$$

으로 0 parameter 표현된다.

3. 강인한 서어보 제어계의 설계

제어기는 제어대상의 공칭치에 대해서와 마찬가지로 제어대상의 변동 및 외란의 영향에 대해서도 전체 제어계가 안정성을 유지하도록 설계되어야 한다. 2자유도계의 경우 설계 파라메타 K는 목표치 특성에만 관계하며, 설계 파라메타 0는 강인성과 관계가 있다. 공칭치의 제어대상 전달함수 행렬 P(S)가 후급셈형 오차를 포함하는 경우를 고려한다. 또한, 0 파라메타를 이용한 새로운 2자유도계를 식(2.4)와(2.5)에 의해 표현하면 다음의 등가 그림을 얻는다. (그림 3.)

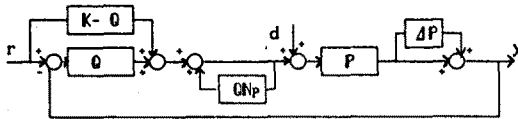


그림 3. Robust- Servo 2자유도제어계

여기서, $P'(S) = (I + \Delta P)P(S)$ 이며 Plant의 변동이 없는 경우에는 $C_2 = 0$ 즉 $0 = 0$ 이고 $r \rightarrow y$ 의 관계는

$$y = PKr = N_P K r \quad (3.1)$$

으로 얻어진다.

제어계 P(S)의 변동에 대한 전달함수 및 감도 함수는

$$G_{yr}(S) = (I + \Delta G_{yr})G_{yr} \\ \Delta G_{yr} = (I - P_0) \Delta P; S(s) = I - P_0 \quad (3.2)$$

이므로 제어계 P(S)의 변동에 대한 감도 특성은 0에만 의존함을 알 수 있다. 또한 상보 감도함수 T(S)는 다음이며

$$T(S) = (I + PC_2)^{-1}PC_2 = P_0 \quad (3.3)$$

강인성 안정 조건은 P(S) 및 변동 오차 $\Delta P(S)$ 에 대해

$$M_0(P, \Delta P); \| (I + PC_2)^{-1}PC_2 \cdot \Delta P \|_0 < 1 \quad (3.4)$$

이다.

3.1 목표치 특성 파라메타 K(s)의 설계

제어대상 P와 규범 모델의 전달함수 행렬 G_M 이 주어지고, P의 우기 약분해가 $P = N_P D_P^{-1}$ 이면, 전체 전달함수 행렬 G_{yr} 는

$$G_{yr}(S) = N_P(s)K(s) = G_M(S) \quad K(s) \in R^H_0 \quad (3.5)$$

로 파라메타 표현이 가능하며, K의 일반해의 형태는

$$K(s) = K_0(s) + R(s)K_1(s) \quad K_1(s), R(s) \in R^H_0 \quad (3.6)$$

이다. $K_0 \in R^H_0$ 는 $G_M = N_P K_0$ 를 만족하는 하나의 해이다. 서어보 문제의 경우 $K \in R^H_0$ 의 집합을 $\Gamma(K)$ 로 정의하면 설계 파라메타 K는 다음으로 표현 가능하다.

$$\Gamma(K) = \{ K(S) \in R^H_0 \mid N_P(0)K(0) = I \} \quad (3.7)$$

3.2 강인성 파라메타 0(s)의 설계

제어대상의 변동 및 외란의 존재시에도 시스템의 안정성을 유지시키는 강인성 제어기의 설계는 0 파라메타의 설계로 귀착되며, 0 Parameter는 H_0 최적 방법에 의해 구한다.

H_0 는 다음으로 정의된다. 안정한 주파수 응답 G(S)의 Norm

$$\| G(S) \| = \sup_{\text{Re } s > 0} |G(s)| = \sup |G(j\omega)| \quad (3.8)$$

에서 안정한 주파수 응답의 대수를 ∞ 차의 Hardy space라 하고 H_0 로 표시 한다. 이때 주파수 응답은 $s = \sigma + j\omega$ 의 경우, G(S)의 우반면 즉 $\text{Re } s > 0$ 에서 해석적인 경우이다.

강인성을 결정 하는 0를 찾는 문제는 다음의 최적 Weighted sensitivity $\mu(p)$ 를 구하는 문제로 귀착된다.

$$\mu(p) = \min \| W_1(s)S(s) \|_\infty \\ = \min \| W_1(s)(I - P(s)0(s)) \|_\infty \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (3.9)$$

W_1 는 Weighting matrix 이고 $\| W_1(s) \|$ 는 Nonsingular 이다. P가 원점에 극점을 가지는 경우, Weighted matrix W_2 를 도입 하면

$$\hat{\mu}(p) = \min \| W_1(s)(I - P(s)0(s)W_2(s)) \|_\infty \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (3.10)$$

로 되고, W_2 는 Nonsingular 이다.

식 (3.10)의 해 0는 다음으로 구해진다.

$$0(s) = P^{-1}(s)(I - \rho W_1^{-1}(s)E(s)W_2^{-1}(s)) \quad (3.11)$$

단, ρ 는 상수, E는 Unitary matrix이다.

4. 설계 예 및 전산기 시뮬레이션

Robot 머니퓰레이터에 제기된 방법을 적용 하는 경우, 제어계는 비선형 보상에 의한 선형화(2)와 선형 보상기 C(s)로 구성되며, 제어기의 설계는 목표치 특성을 결정 하는 설계 파라메타 K와 강인성을 결정 하는 0의 설계 문제이다.

4.1 설계 예

선형화된 제어대상 P(s)는 (2)

$$P(s) = S^{-2} \cdot I \quad (4.1)$$

이고, 그 우기 약분해는 다음과 같다.

$$P(s) = N_P D_P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.2)$$

규범 모델의 전달함수 행렬은 비간섭 모델 $G_M(s)$ 로 한다.

$$G_M(s) = \frac{256}{s^2 + 22.4s + 256} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

1) 설계 파라메타 K(s)

목표치 특성을 결정 하는 설계 파라메타 K는 식 (3.5)에 의해 다음으로 구해진다.

$$K(s) = \frac{256}{s^2 + 22.4s + 256} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

2) 설계 파라메타 Q(s)

강인성을 결정하는 설계 파라메타 $Q \in H_\infty$ 는 식 (3.11)에 의해 다음으로 구해진다.

$$Q(s) = \frac{\beta w_0}{s^2 + \beta w_0 s + \beta w_0} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

단 w_0 는 감도특성과 Robust안정특성을 고려한 주파수이며 $w_0 = 1$ rad/sec이고, 계수 $\beta = 10$ 으로 하였다.

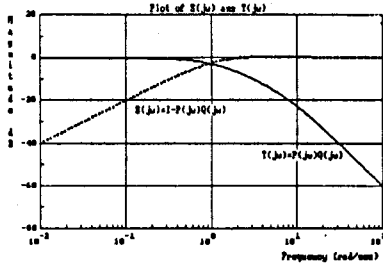


그림 4. 감도함수 S(jw)와 상보 감도함수 T(jw)의 비교

3) 제어기 C1(s)와 C2(s)

목표치 특성을 결정하는 제어기 C1는 식 (2.5)에 의해서

$$C_1(s) = \frac{s^2 + 10s + 10}{s^2 + 22.4s + 256} \begin{bmatrix} 256s & 0 \\ s+10 & 256s \\ 0 & 256s \\ & s+10 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

이고, 최적 Robust 제어기 C2는 식 (2.4)에 의해

$$C_2(s) = \frac{10}{s+10} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

이다.

4.2 전산기 시뮬레이션

제어대상 P(s)가 공칭치인 경우와 P'(s) = (1+ΔP)P(s)가

$$P'(s) = \frac{14400}{s^2(0.01s+1)(s^2+12s+14400)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

로 변동한 경우에 목표치 응답특성 및 강인성이 달성됨을 확인한다.

1) 제어대상 P(s)와 P'(s)의 경우: [d=0, r(t)=(1,-1)]

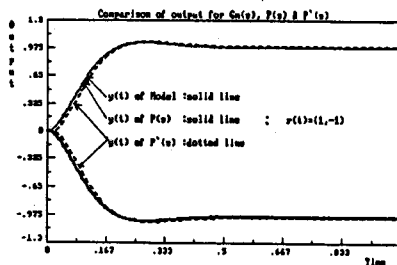


그림 5. 모델 및 P(s)와 P'(s)의 출력 비교

2) 제어대상 P(s) 및 P'(s)의 출력 응답: 외란 존재 [d≠0]

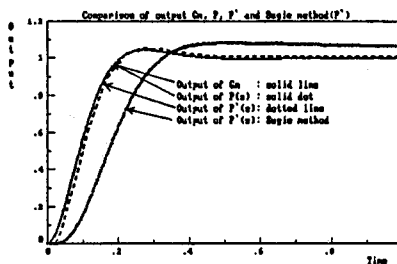


그림 6. 제어대상의 변동 및 외란이 동시에 존재 하는 경우

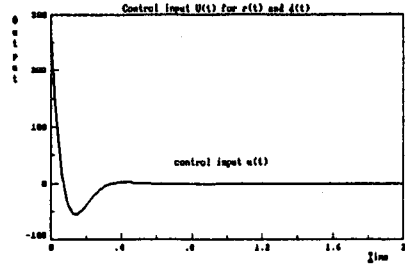


그림 7. 입력과 외란에 대한 제어입력

3) 희망 입력이 비선형인 경우의 응답

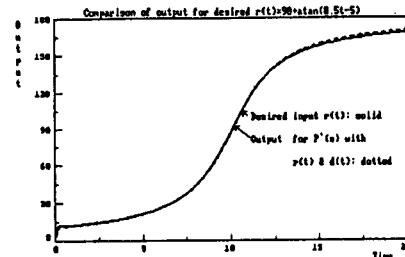


그림 8. 희망입력 r(t)에 대한 P(s)와 P'(s)의 출력비교

5. 결론

본 연구에서는 목표치 특성 및 강인성의 종속성으로 두특성을 동시에 달성할 수 없는 1자유도계의 결점을 극복할 수 있는 2자유도계로 전체 시스템을 구성한 후, Yoular의 Q 파라메타 및 Zames의 H_∞ 방법을 변형시켜 2자유도계의 새로운 구조를 개발 하였으며, 전달함수 분해법을 이용하여 목표치 특성 파라메타 K를 구하고 변형된 H_∞의 방법을 이용하여 강인성 파라메타 Q의 도출 방법을 제시 하였다.

특히 원점에 두개의 극점을 가지는 제어대상(선형화된 로봇트 머니플레이터)의 경우에 적용하여 제안한 방법에 의해 구성된 제어계에 대한 출력 특성을 제시 하였다.

6. 참고 문헌

- [1] G.Zames, "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness," IEEE Trans. Automat. Control., Vol.AC28, No. 5, May 1983.
- [2] Toshiharu Sugie, Tsuneo Yoshikawa and Toshiro Ono, "Robust Controller Design for robot Manipulator using Two-Degree-of-Freedom Compensation," 시스템と制御, Vol. 31, No. 8, pp613-620, 1987.
- [3] 杉江, 吉川, "2자유도制御系の基本構造とサ-ボ問題への應用," 計測自動制御學會論文集, Vol.22, No.2, 32-37, 1986.
- [4] I.Yaesh and U.Shaked, "Two-Degree-of-Freedom H_∞ Optimization of Multivariable Feedback Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 36, No.11, NOVEMBER 1991.
- [5] SHINJI HARA, "Parametrization of stabilizing controller for multivariable servo system with Two-Degree-of-Freedom," Int. J. Control, Vol. 45, No. 3, 779-790, 1987.