플랜트 매개 변수 공간상의 강인 안정화 제어기 설계

황유모
삼성전자, 영상연구실

Robust Controller Design in Parameter Space

Humor Hwang
Advanced TV & Display Lab., Samsung Electronics

ABSTRACT

This paper considers the design of robust stabilizing controller of a linear time-invariant digital system subject to variations of parameter vector. For a given controller the radius of the largest stability hypersphere in this parameter space is calculated. This radius is a measure of the stability margin of the closed-loop system.

Based on this calculation a design procedure is proposed to robustify a given stabilizing controller. This algorithm iteratively enlarges the stability hypersphere in parameter space and can be used to design a controller to stabilize a plant subject to given ranges of parameter perturbations. These results are illustrated by an example.

1. 서론

테이프 구동 시스템, 로보트 등과 같은 대부분 플랜트들의 구동 방정식은 부정확한 혹은 그 값이 시스템 동작 중 변동하는 물리적 변수를 내포하고 있다. DAT(Digital Audio Tape) 서보의 전원 전압 부하 변동 등에 의한 모터의 회전 속도 변동, 테이프의 텐션 변동, 각종 풀리의 편심에 의한 모터의 토크 변동 등이 그 예이다. 이와 같은 플랜트가 페루프 시스템을 구성할 때 플랜트의 불확실성(uncertainty)에도 불구하고 구성된 페루프 시스템의 안정화 및 성능이 제어기에 의해 유지되어야 한다. 대부분의 경우 낮은 차수의 시불변 선형 제어기가 바람직하다.

플랜트 매개 변수 변화 상태하에서 이와 같은 선형 제어기 설계 문제는 다음 두 단계를 통해 해결될 수 있다. 첫번째 단계에서는 매개 변수의 주어진 허용 변화 범위 내에서 페루프 시스템을 안정화 시키는 강인 제어기의 부류(class)를 찾는 것이다. 이런 부류의 강인 제어기 가운데 평가 함수(cost function)을 최소화 시키는 최적 제어기가 두번째 단계에서 선택된다. 본 논문에서는 첫번째 단계인 매개변수 변화 상태하에 있는 플랜트를 페루프 시스템을 통해 안정화시키는 강인 제어기 설계 알고리즘이 제시된다. 강인화가 요구되는 매개변수 벡터로서 플랜트 전달 함수의 계수 벡터가 고려된다.

본 논문에서 취급되는 문제는 종전의 강인 제어기 설계[1]-[3]의 범위를 벗어난다. 종래의 강인 제어기 문제에서는 매개 변수 변화량이 전달함수 행렬의 변화 norm으로 주어진다. 이와 같은 문제의 정석화는 비구조적(unstructured) 매개 변수 변화를 다루는 데 유용하다. 하지만 대부분의 플랜트에서는 매개 변수가 일정한 값 내에서 변동하는 구조적(structured) 변화를 갖는다. 그러므로 종래의 강인 제어기 설계 방법이 본 논문에서 취급되는 문제에 적용될 경우 지나치게 보수적인(conservative) 결과를 초래한다.

2. 문제의 정석화

전달 함수 $G(z)= \underline{n}(z)d^{-1}(z)$ 를 갖는 단일 입력 m 출력의 q 차 디지탈 플랜트의 매개 변수 벡터 $\underline{p}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\underline{p} = [\underline{n}_0^T \; d_0 \; \cdots \; \underline{n}_q^T \; d_q]^T \tag{2.1}$$

다음, $\underline{p}^0$ 와 $\Delta\underline{p}$ 를 각각 $\underline{p}$ 의 원래값(nominal value)과 변화값이라 하면

$$\underline{p} = \underline{p}^0 + \Delta\underline{p} \tag{2.2}$$

플랜트 매개 변수의 변화값 $\Delta\underline{p}$의 크기는 다음과 같은 Euclidean distance로 측정된다.

$$\|\Delta\underline{p}\|_2^2 = \|\Delta\underline{n}_0\|_2^2 + \cdots + \|\Delta\underline{n}_q\|_2^2 + (\Delta d_0)^2 + \cdots + (\Delta d_q)^2 \tag{2.3}$$

설계된 안정화 제어기에 대해 페루프 시스템의 안정도가 유지되는 가장 큰 $\|\Delta\underline{p}\|_2 = \rho(\underline{p}^0)$ 가 존재하며, 이 값은 안정도 여유의 척도가 된다. 이 값을 바탕으로 본 논문에서 해결될 두 문제들을 정석화 한다.

문제 A: 안정화 hypersphere 계산

설계된 안정화 제어기에 대해 $\|\Delta\underline{p}\|_2 < \rho(\underline{p}^0)$라는 조건을 만족하기만 하면 $\underline{p}^0+\Delta\underline{p}$ 의 플랜트 변수를 갖는 페루프 시스템의 안정도가 유지되는 $\rho(\underline{p}^0)$를 계산하라.

문제 B: 강인 안정화 제어기 설계

$C(z)$를 변수 벡터 $\underline{x}$ 를 갖는 안정화 제어기라 한다. 그 때 안정화 hypersphere의 반경 $\rho(\underline{p}^0,\underline{x})$ 를 최대화 하는 제어기 변수 벡터 $\underline{x}$ 를 결정하라.

위 문제들은 다음과 같은 형태의 플랜트 변수의 변화를 다룰 수 있다.

$$-\alpha_i < \Delta p_i < \beta_i \;,\; i= 1,\cdots,k \tag{2.4}$$

여기서 Δp_i는 $\Delta\underline{p}$ 의 i 번째 성분이며, α 와 β 는 영 보다 크다.

3. 최대 안정화 Hypersphere 계산

다음과 같은 제어기 $C(z)$를 고려한다.

$$C(z) = \frac{1}{d_c(z)}\,(n_{c1}(z) \; \cdots \; n_{cm}(z)) := d_c^{-1}(z)\underline{n}_c^T(z) \tag{3.1}$$

여기서

$$d_c(z)= d_{cp}z^p + \cdots + d_{c0} \tag{3.2}$$

그리고

$$\underline{n}_c^T(z) = \underline{n}^T_{cp}z^p + \cdots + \underline{n}^T_{c0} \tag{3.3}$$

여기서 d_{ci}는 스칼라, $\underline{n}_{ci}$ 는 $1\times m$ 상수 벡터이다. 폐루프 시스템의 특성 다항식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta(z) &= d_c(z)d(z) + \underline{n}_c^T(z)\underline{n}(z) \\ &= \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_n z^n\end{aligned} \quad (3.4)$$

$\underline{x}\in R^{(1+m)(p+1)}$ 와 $\underline{\delta}\in R^{n+1}$ 를 각각 제어기 변수 벡터와 특성 다항식 변수 벡터라 다음과 같이 정의하면

$$\underline{x} = [\underline{n}_{cp}^T d_{cp} \cdots \underline{n}_{c0}^T d_{c0}]^T \quad (3.5)$$

그리고

$$\underline{\delta} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \cdots \delta_0]^T \quad (3.6)$$

플랜트 매개변수 벡터 $\underline{p}$ 및 제어기 변수벡터 $\underline{x}$ 와 $\underline{\delta}$ 사이에 다음의 관계가 있다.

$$X\underline{p} = \underline{\delta} \quad (3.7)$$

혹은

$$P\underline{x} = \underline{\delta} \quad (3.8)$$

여기서 X 와 P 는 각각 제어기와 플랜트의 변수로 구성되는 행렬이다.

<u>정의1</u> : $\underline{\delta} \in R^{n+1}$ 이 절대 안정(strictly stable)이기 위한 필요 충분 조건은 $\delta(z)$ 의 모든 근들이 단위 원 내에 존재해야 한다.

$\underline{\delta} \in R^{n+1}$ 이 불안정하게 되는 경우는 다음과 같은 set 조건으로 귀착된다.

$$\Delta_1 := \{\underline{\delta} \mid \underline{\delta}\in R^{n+1},\ \underline{w}_1^T\underline{\delta}=0,\ \underline{w}_1=[1,1,\cdots,1,1]^T\} \quad (3.9)$$

$$\Delta_2 := \{\underline{\delta} \mid \underline{\delta}\in R^{n+1},\ \underline{w}_2^T\underline{\delta}=0,\ \underline{w}_2=[(-1)^n,(-1)^{n-1},\cdots,(-1),1]^T\} \quad (3.10)$$

$$\Delta_3 := \{\underline{\delta} \mid \underline{\delta}\in R^{n+1},\ \underline{w}_3^T\underline{\delta}=0,\ \underline{w}_3=[1,0,\cdots,0,0]^T\} \quad (3.11)$$

그리고, 모든 실수 a, $a\in(-1,1)$ 에 대해

$$\Delta(a) := \{\underline{\delta} \mid \underline{\delta}\in R^{n+1}, \delta(z)=(z^2-2az+1)l(z),\ l(z) \text{ 는 임의}\} \quad (3.12)$$

식(3.9)-(3.12) set들의 inverse image를 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi_i := X^{-1}(\Delta_i) := \{\underline{p} \mid \underline{p}\in R^k,\ X\underline{p}\in\Delta_i\},\ i=1,2,3 \quad (3.13)$$

$$\Pi_{(a)} := X^{-1}(\Delta_{(a)}) := \{\underline{p} \mid \underline{p}\in R^k,\ X\underline{p}\in\Delta_{(a)}\} \quad (3.14)$$

<u>정리 1</u> : r_1, r_2, r_3, $r(a)$를 $\underline{p}^0$ 와 Π_1, Π_2, Π_3, $\Pi_{(a)}$ 사이의 Euclidean distance, 그리고 $r = \inf_{-1\le a\le 1} = r(a)$라하면 $\underline{p}$ 공간 내에서 중심이 $\underline{p}^0$ 인 최대 안정화 hypersphere 의 반경 $\rho(\underline{p}^0)$ 는 다음과 같다.

$$\rho(\underline{p}^0) = \min\{r_1, r_2, r_3, r\} \quad (3.15)$$

정리 1의 증명은 아날로그 시스템에 대한 결과[4]와 유사하므로 지면상 생략한다. 다음 $\underline{p}^0$ 와 hyperplane Π_1, Π_2, Π_3 까지의 각각의 거리는 다음과 같이 간단히 구해진다.

$$r_i^2 = \frac{1}{X_i X_i^T}[\,\underline{p}^{0^T} X_i^T X_i \underline{p}^0\,],\ i=1,2,3 \quad (3.16)$$

여기서 $X_i = \underline{w}_i^T X$, $i=1,2,3$ 이다. 거리 $r(a)$를 구하기 위해 벡터 $\underline{\delta} \in \Delta(a)$라 가정하면, 그 때 $\underline{\delta}$ 는

$$\underline{\delta} = \Phi(a)\underline{l} \quad (3.17)$$

$$\Phi(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2a & 1 & & \\ 1 & -2a & & \\ & 1 & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & \cdot & -2a \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in R^{(n+1)(n-1)} \quad (3.18)$$

여기서 $\underline{l} \in R^{n-1}$ 는 임의의 벡터이다. 다음 $\underline{t}(a) \in \Pi(a)$ 이면

$$X\,\underline{t}(a) = \Phi(a)\,\underline{l} \quad (3.19)$$

행렬 X 과 벡터 $\underline{t}(a)$를 다음과 같이 분할하면

$$X = [\,X_I \ \ X_J\,],\quad t(a) = \begin{bmatrix} \underline{t}_I(a) \\ \underline{t}_J(a) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

식 (3.19)로 부터

$$X_I t_I(a) = \Phi(a)\underline{l} - X_J\underline{t}_J(a) \quad (3.21)$$

결국 $\underline{t}(a) \in \Pi(a)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\underline{t}(a) = \begin{pmatrix} X_I^{-1}\Phi(a) & -X_I^{-1}X_J \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{l} \\ \underline{t}_J(a) \end{pmatrix} := P(a)\underline{l}_t \quad (3.22)$$

여기서 P(a) 는 각 a 에 대해 고정된 실수 행렬이며 $\underline{l}_t$ 는 임의의 실수 벡터이다. $\underline{t}_J$ 의 a 에 대한 종속(dependence)는 $\underline{t}_J$ 가 임의의 벡터이므로 제거된다. $\underline{t}(a) \in \Pi(a)$ 인 경우 $X\underline{t}(a) = \Phi(a)\underline{l}$ 의 모든 해가 다음과 같이 얻어진다.

$$\underline{t}(a) - \underline{p}^0 = P(a)\underline{l}_t - \underline{p}^0 \quad (3.23)$$

그리고

$$\|\underline{t}(a)-\underline{p}^0\|_2^2 = \underline{p}^{0^T}\underline{p}^0 - 2\underline{l}_t^T P^T(a)\underline{p}^0 + \underline{l}_t^T P^T(a)P(a)\underline{l}_t \quad (3.24)$$

고정된 a 에 대해 거리를 최소화 하는 $\underline{l}_t = \underline{l}_t^*$ 는 다음과 같다.

$$\underline{l}_t^* = (P^T(a)P(a))^{-1}P^T(a)\underline{p}^0 \quad (3.25)$$

그리고

$$r^2(a) = \underline{p}^{0^T}[I - P(a)(P^T(a)P(a))^{-1}P^T(a)]\underline{p}^0 := \underline{p}^{0^T}Q(a)\underline{p}^0 \quad (3.26)$$

결국

$$r^2 = \inf_{-1\le a\le 1} r^2(a) = \inf_{-1\le a\le 1} \underline{p}^{0^T}Q(a)\underline{p}^0 \quad (3.27)$$

4. 강인 제어기 설계

3절에서 계산한 안정도 여유 $\rho(\underline{p}^0)$ 는 주어진 두 제어기의 플랜트 매개 변수의 변화량에 대한 강인성을 비교하는데 유용하다. 제어기의 강인화는 주어진 플랜트 변수의 허용 변화량이 계산된 $\rho(\underline{p}^0,\underline{x})$ 에 포함되도록 반복적으로 $\underline{x}$ 가 선택되어야 하므로 다음과 같은 maxmin 방법이 적용된다.

$$\max_{\underline{x}} \rho(\underline{p}^0,\underline{x}) = \max_{\underline{x}} \min\{r_1(\underline{x}), r_2(\underline{x}), r_3(\underline{x}), r(\underline{x})\} \quad (4.1)$$

(k+1) 번째 제어기 벡터 $\underline{x}_{k+1}$ 는 $\rho(\underline{p}^0,\underline{x}_{k+1}) \ge \rho(\underline{p}^0,\underline{x}_k)$ 가 보장되도록 선택되어야 하므로

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda\frac{\partial\rho(\underline{p}^0,\underline{x}_k)}{\partial\,\underline{x}_k} \quad (4.2)$$

여기서 단계 크기값 λ 는 $\rho(\underline{p}^0,\underline{x}_{k+1})$ 이 최대화 되도록 선택되어야 된다. 플랜트 매개 변수 벡터의 원래값 $\underline{p}^0$와 제어기 $\underline{x}_{k+1}$ 로 구성되는 폐루프 시스템의 안정도가 유지되는 조건은 다음과 같다.

$$P^0\,\underline{x}_{k+1} = \underline{\delta}_{k+1} \in H_n \quad (4.3)$$

여기서 H_n 은 Hurwitz 벡터이다. 식(4.3)은 다음과 같이 표현된다.

$$P^0(\underline{x}_k+\Delta\underline{x}_k) = P^0\,\underline{x}_k + P^0\,\Delta\underline{x}_k = \underline{\delta}_k + \Delta\underline{\delta}_k \quad (4.4)$$

$h(\underline{\delta}_k)$를 $\underline{\delta}$ 공간 내의 최대 안정 hypersphere 반경이라 할 때 다

음 조건이 만족하면 (k+1) 단계에서 폐루프 시스템의 안정도가 유지된다.

$$\| P^0 \Delta \underline{x}_k \|_2 < h(\underline{\delta}_k) \tag{4.5}$$

조건(4.5)은 $\Delta \underline{x}_k$ 를 다음과 같이 선택하므로써 만족된다.

$$\| \Delta \underline{x}_k \|_2 < \frac{h(\underline{\delta}_k)}{\| P^0 \|_F} \tag{4.6}$$

여기서 $\| \cdot \|_F$ 는 Frobenius norm 이다. 결과적으로 식(4.2)의 λ 는 다음과 같이 선택되어 폐루프 시스템의 안정도를 유지시킨다.

$$\lambda < \frac{h(\underline{\delta}_k)}{\|P^0\|_F \left\| \dfrac{\partial \rho(\underline{p}^0, \underline{x}_k)}{\partial \underline{x}_k} \right\|_2} \tag{4.7}$$

여기서 $h(\underline{\delta}_k)$는 3절에서 $\rho(\underline{p}^0)$ 를 구하는 방법으로 $\underline{\delta}$ 공간내에서 구한다.

5. 예제 및 검토

불안정(unstable)한 단일 입력 단일 출력의 2차 proper 플랜트 및 0차 안정화 제어기를 다음과 같이 고려한다.

$$G(z) = \frac{n_2 z^2 + n_1 z + n_0}{d_2 z^2 + d_1 z + d_0} = \frac{z^2 + z + 3}{z^2 + z - 2} \tag{5.1}$$

그리고

$$C(z) = \frac{n_{c0}}{d_{c0}} = \frac{1/2}{1/2} \tag{5.2}$$

그 때, 식(5.1) 과 (5.2) 로 구성되는 폐루프 시스템의 특성 다항식의 계수 벡터는 다음과 같다.

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{c0} & 0 & 0 & n_{c0} \\ 0 & d_{c0} & 0 & 0 & n_{c0} & 0 \\ n_{c0} & 0 & 0 & d_{c0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} := X\underline{p} \tag{5.3}$$

식(3.9)-(3.12) 로 부터 $\underline{\delta} \in R^3$ 이 불안정하게 되는 set 조건은

$$\Delta_1 = \{ \underline{\delta} |\ \underline{\delta} \in R^3,\ \underline{w}_1^T \underline{\delta} = 0,\ \underline{w}_1 = [1\ 1\ \ 1]^T \} \tag{5.4}$$

$$\Delta_2 = \{ \underline{\delta} |\ \underline{\delta} \in R^3,\ \underline{w}_2^T \underline{\delta} = 0,\ \underline{w}_2 = [1\ -1\ 1]^T \} \tag{5.5}$$

$$\Delta_3 = \{ \underline{\delta} |\ \underline{\delta} \in R^3,\ \underline{w}_3^T \underline{\delta} = 0,\ \underline{w}_3 = [1\ 0\ \ 0]^T \} \tag{5.6}$$

그리고

$$\Delta(\alpha) = \{ \underline{\delta} | \underline{\delta} \in R^3,\ \delta(z) = (z^2 - 2\alpha z + 1) l_0,\ \alpha \in (-1, 1) \} \tag{5.7}$$

식(5.4)-(5.6)의 inverse image Π_1, Π_2, Π_3 와 $\underline{p}^0$ 사이의 Euclidean distance 는 식(3.18) 에 수치를 대입한 결과

$$r_1^2 = \frac{25}{6},\ r_2^2 = \frac{1}{6},\ r_3^2 = 2 \tag{5.8}$$

거리 $r(\alpha)$ 를 구하기 위한 벡터 $\underline{\delta} \in \Delta(\alpha)$ 는

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\alpha \\ 1 \end{bmatrix} l_0 = \Phi(\alpha)\ l_0 \tag{5.9}$$

식 (3.20) 로 부터

$$X\,\underline{l}(\alpha) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & d_{c0} & 0 & 0 & n_{c0} \\ 0 & d_{c0} & 0 & 0 & n_{c0} & 0 \\ n_{c0} & 0 & 0 & d_{c0} & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} n_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \hline d_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{array} \right]$$

$$:= [X_I\ \ X_J] \begin{bmatrix} t_I(\alpha) \\ t_J(\alpha) \end{bmatrix} = \Phi(\alpha)\ \underline{l} \tag{5.10}$$

식 (3.27) 를 이용 주어진 수치값을 사용한 결과는 다음과 같다.

$$r^2 = \frac{1}{4} \tag{5.11}$$

식(5.8) 와 식(5.11)로 부터 $\underline{p}$ 공간 내에서 중심이 $\underline{p}^0$ 인 최대 안정화 hyperspere 의 반경 $\rho(\underline{p}^0)$ 는 다음과 같다.

$$\rho(\underline{p}^0) = \min \left\{ \frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{5.12}$$

6. 결론

본 논문에서는 플랜트 매개 변수 벡터 $\underline{p}$ 의 변화를 갖는 선형 시불변 디지탈 시스템을 안정화 시키는 문제를 고려했다. 특성 다항식의 계수 벡터가 고정된 제어기 벡터 $\underline{x}$ 에 대해 플랜트 매개변수 벡터 $\underline{p}$ 와 선형 관계가 있는 점에 촛점이 맞춰 졌다. 이러한 선형 관계는 2절의 문제 A 및 B 를 해결하는데 중요한 역할을 했다.

본 논문에서 다루지 않는 제어기 설계 문제중 하나는 매개 변수가 변화하는 플랜트의 tracking과 regulation 의 강인성을 다루는 것이다. 실제적으로 제어기 설계에서는 부하 외란, 플랜트 saturation, 측정 noise, 과도 응답 그리고 정상상태 등의 문제점들이 모두 고려되어야 한다. 플랜트 매개변수 변화 상태하에서 이와 같은 제어기를 설계하기 위하여 finite cost 를 주는 모든 안정화 제어기 부류가 확립된 후 최적 성능과 안정도 여유 사이의 trade off 가 고려되야 한다.

참고 문헌

[1] M. J. Chen and C. A. Desoer, "Necessary and sufficient conditions for robust stability of linear distributed feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, pp. 880-888, Oct., 1984.

[2] N.A. Lehtomaki, N. R. Sandell and M. Athans, "Robustness results in linear quadratic Gaussian based multivariable control designs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol AC-26, pp. 75-92, Feb., 1981.

[3] S. Bialas and J. Garloff, "Stability of polynomials under coefficient perturbations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, pp. 310-312, Mar., 1985.

[4] S. H. Baek and H. Hwang "Robust controller designed for tape drive system subject to structured physical parameter perturbation," *the Proceedings of the International Symposium of Power Electronics*, pp. 359-364, April, 1992.