대수리카티방정식의 해의 일반적 노음 하한

강 태 삼°, 이 장 규
서울대학교 제어계측공학과

Generalized Norm Bound of the Algebraic Matrix Riccati Equation

Taesam Kang and Jang Gyu Lee
Department of Control and Instrumentation Engineering,
Seoul National University

Abstract

Presented in this paper is a generalized norm bound for the continuous and discrete algebraic Riccati equations. The generalized norm bound provides a lower bound of the Riccati solutions specified by any kind of submultiplicative matrix norms including the spectral, Frobenius and ℓ_1 norms.

1. 서론

리카티 방정식은 시스템 이론, 신호처리 이론과 특히 제어 이론과 같은 다양한 분야의 공학 이론에 중요한 역할을 하는 방정식이다. 이 방정식은 최적 제어, 최적 필터 설계, 선형시불변 시스템의 안정성 연구 등에 이용되며, 선형시스템의 설계에 있어서 필수불가결하다[7,9]. 이러한 중요성 때문에 많은 사람들이 정상 상태의 리카티 방정식의 수치적인 해를 효과적으로 구하는 방법들에 대하여 연구하였고, 또 해의 '크기'를 나타내는 어떤 스칼라 양에 대한 간략한 추정치들에 대한 연구를 다양하게 수행하였다[1-8]. 제안된 '크기'의 척도로는 고유치 특히 최대 및 최소 고유치[5-7], 해의 고유치의 합(trace)[4,7,8], 노음(norm)[1,3,7,9] 등이 있다. 이 중 해의 크기의 척도로 가장 좋은 것은 노음[9]이라 할 수 있는데 W.H.Kwon 과 Pearson[1,2]에 의해서 처음으로 제시되었고 그후 Patel과 Toda[3], B.H.Kwon[4], Karanam[5,6], Mori[7] 등에 의하여 발전되었다. 그런데 이들이 구한 노음은 모두 스펙트럴 노음(spectral norm)[1,3,5-7]으로 해의 최대 고유치를 척도로 사용했다. 그런데 행렬 노음들은 같은 행렬에 대해서도 서로 크기가 다르고 행렬의 각 원소의 변화에 따라 민감하게 변하는 정도도 다르므로 행렬의 크기의 척도로서 행렬 노음을 사용하고자 할 때에는 원하는 성질을 만족하는 적당한 행렬 노음을 선택하여 사용하여야 한다. 특히 항법시스템과 같이 시스템의 상태를 추정하는 시스템을 설계할 때에는 스펙트럴 노음 보다는 전체 행렬의 각 원소의 성질을 고루 반영하는 ℓ_1-노음이나 프로비니어스(Frobenius) 노음[9] 등이 더욱 의미를 갖는다[11,12]. 본 논문에서는 이러한 필요성에 부응하여 기존의 결과를 확장하여 스펙트럴 노음을 포함한 곱셈법칙[submultiplicative]이 성립하는 어떤 행렬 노음을 사용해도 성립하는 리카티 방정식의 해의 하한을 제시하였다. 여기서 곱셈법칙이 성립한다는 것은 두 행렬에서 각각의 노음의 곱이 곱해진 행렬의 노음보다 크거나 같은 것을 의미하며, 대부분의 행렬 노음이 이법칙을 만족하고, 어떤 경우는 이것을 행렬노음이 만족시켜야할 공리로 잡고 있다. 따라서 행렬노음이 곱셈법칙을 만족시켜야 하는 것은 응용에 거의 제한을 주지 않는다[9].

사용되는 기호는 다음과 같다. $\|W\|$는 W의 임의의 곱셈법칙이 성립하는 행렬 노음(submultiplicative matrix norm)을 나타내며, $W > 0$ (≥ 0)는 행렬 W가 양의 정치(양의 준치) 행렬임을 나타낸다. 그리고 W^T는 W의 복소전치행렬(complex conjugate matrix)을, $\lambda_{min}(W)$는 W의 최소 고유치를, $\lambda_{max}(W)$는 W의 최대 고유치를, $\|W\|_M$은 $1/2(\|W\|+\|W^T\|)$을, $tr(W)$는 W의 트레이스(trace)를, $|a|$는 a의 절대값을 각각 나타낸다.

2. 본론

다음과 같은 연속 및 이산 대수 행렬 리카티 방정식을 고려하자[1].

$$A^T P + P A - P R P + Q = 0 \qquad (1a)$$
$$P = \Phi^T P \Phi - \Phi^T P B (I + B^T P B)^{-1} B^T P \Phi + Q \qquad (1b)$$

여기서 P, Q, R ≥ 0 이고 $P^T = P$, $Q^T = Q$, $R^T = R$ 인 행렬이며, Φ는 비특이(nonsingular) 행렬이라 가정한다. 이때 다음과 같은 보조정리가 성립한다.

보조정리1: 임의의 행렬 W와 $P = P^T$인 행렬 P 및 행렬 $Y = (P W + W^T P)$는 임의의 행렬 노음에 대하여 다음을 만족한다.

$$\|Y\| \leq 2 \|W\|_M \|P\| \qquad (2)$$

□

보조정리1 증명) 일반적 노음 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\|Y\| &= \|P W + W^T P\| \\ &\leq \|P W\| + \|W^T P\| \\ &\leq (\|W\| + \|W^T\|)\|P\| \\ &= 2 \|W\|_M \|P\|. \qquad (3)\end{aligned}$$

■

이제 본 논문의 주 내용인 정리1이 성립함을 보이자.

정리1: 식(3)의 해인 양의 준치 행렬 P는 곱셈법칙이 성립하는 임의의 행렬 노옴 $\|\cdot\|$에 대하여 다음과 같은 하한을 갖는다.

$$\|P\| \geq \frac{\|Q\|}{\|A\|_M + (\|A\|_M^2 + \|R\|\|Q\|)^{1/2}} \qquad (4)$$

□

정리1 증명) 식(1a)의 항을 정리한 후 양변에 노옴을 취하면 다음과 같다.

$$\|A^T P + P A\| = \|P R P - Q\| \qquad (5)$$

식(5)의 좌변은 보조정리1에 의하여

$$\|A^T P + P A\| \leq 2\|A\|_M \|P\| \qquad (6)$$

식(5)의 우변은 노옴의 일반적 성질에 의하여

$$\|P R P - Q\| \geq |\|P R P\| - \|Q\|| \qquad (7)$$

식(5)-식(7)에 의하여 다음이 성립한다.

$$|\|P R P\| - \|Q\|| \leq 2\|A\|_M \|P\| \qquad (8)$$

따라서 식(8)에 의하여 다음이 성립한다.

$$-2\|A\|_M \|P\| \leq \|P R P\| - \|Q\| \leq \|R\|\|P\|^2 - \|Q\|$$

즉,

$$\|R\|\|P\|^2 + 2\|A\|_M \|P\| - \|Q\| \geq 0 \qquad (9)$$

식(9)는 2차 부등식이고 $\|P\|$는 영보다 같거나 크므로 $\|P\|$는 다음 부등식을 만족한다.

$$\|P\| \geq \frac{-\|A\|_M + (\|A\|_M^2 + \|R\|\|Q\|)^{1/2}}{\|R\|} \qquad (10)$$

■

식(4)의 하한은 사용코자하는 노옴이 스펙트럴 노옴일 경우 기존의 W.H.Kwon과 A.E.Pearson[1]의 결과와 같다. 즉 [1]에서 제시한 하한은 식(11)과 같이 표현된다. 그런데 임의의 양의 준치 행렬 W에 대하여 사용되는 노옴 $\|\cdot\|_s$이 스펙트럴 노옴일 경우 $\|W\|_{sM} = \|W\|_s = \lambda_{max}(W)$가 성립하므로[1,9] 식(4)와 식(11)이 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\|P\|_s \geq \frac{\lambda_{max}(Q)}{\|A\|_s + (\|A\|_s^2 + \|R\|_s \lambda_{max}(Q))^{1/2}} \qquad (11)$$

그러나 식(11)은 P의 스펙트럴 노옴의 한계는 제시하지만 다른 노옴의 한계는 직접적으로 제시하지 못하는 반면에 식(4)는 어떤 노옴에 대하여서도 P의 한계를 제공하여 준다.

R.V.Patel과 M.Toda[3]가 제시한 하한은 식(12)와 같다. 즉,

$$\|P\|_s \geq \frac{tr(Q)}{tr(-A) + \{(tr(-A))^2 + tr(R)\,tr(Q)\}^{1/2}} \qquad (12)$$

식(11)과 (12)로 주어지는 $\|P\|$의 하한은 어느 것이 좋다고 일반적으로 말할 수 없고 경우에 따라 다르다. 그러나 식(12)로 주어지는 하한 역시 P의 스펙트럴 노옴의 하한밖에 제공하지 못한다. 따라서 어떤 노옴에 대하여서도 하한을 제공하는 식(4)로 주어지는 하한이 여러 다양한 응용을 위해서 가장 유용하다고 할 수 있다. 즉 항법시스템과 같은 상태변수의 추정에 있어서는 스펙트럴 노옴보다는 행렬의 각 원소의 절대치의 합으로 표시되는 ℓ_1-노옴($\|P\|_1$)이나 프로비니어스 노옴[9] 등이 더욱 의미가 있는데[11,12] 본 논문에서 제시한 방법은 어떤 노옴에 대해서도 대수리카티방정식의 해의 하한을 제공하므로 정리1의 결과가 이 경우에도 유용하게 쓰일 수 있다.

[예제1] 다음과 같은 시스템을 가정하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ 그리고 } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix}.$$

이때 대수리카티방정식의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.9579 & 0.9078 \\ 0.9078 & 1.3261 \end{bmatrix}$$

이때 스펙트럴 노옴은 $\|P\|_s = 2.0683$이고 ℓ_1-노옴 $\|P\|_1 = 4.0996$이다. 그리고 식(11)로 주어지는 W.H.Kwon과 A.E.Pearson이 제시한 하한은 1.4107이고 식(12)로 주어지는 R.V.Patel과 M.Toda[3]가 제시한 하한은 1.3484이다. 그리고 본 논문에서 제시한 방법을 적용하면 스펙트럴 노옴의 하한은 1.4107로 W.H.Kwon과 A.E.Pearson이 제시한 하한과 같고 ℓ_1-노옴의 하한은 1.9022로 주어진다. 일반적으로 식(11)과 식(12)중 어느 것이 더 좋은 하한을 제공하는지는 알려져 있지 않고 경우에 따라 다르다[3]. 그러나 식(11)과 식(12)는 스펙트럴 노옴의 하한만을 제공하는 반면에 본 논문에서 제시한 방법은 스펙트럴 노옴을 포함한 어떤 노옴에 대하여서도 하한을 제공하므로 더욱 유용하다고 할 수 있다.

약간의 수정을 통하여 정리1의 결과는 식(1b)와 같은 이산 대수 리카티 방정식에도 응용될수 있다. 즉, 식(1b)는 행렬의 성질을 이용하면 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$P\Phi^{-1}BB^TP + K\Phi^{-1} - (Q\Phi^{-1}BB^T + \Phi^T)P = Q\Phi^{-1} \qquad (13)$$

이때 다음 정리가 성립한다.

정리2: Φ가 비특이 행렬이고 Q가 양의 준치 행렬일때 식(1b)로 주어지는 이산 대수 리카티방정식의 해 P는 임의의 행렬 노옴 $\|\cdot\|$에 대하여 다음과 같은 하한을 갖는다.

$$\|P\| \geq \frac{\|Q\Phi^{-1}\|}{\alpha + (\alpha^2 + \|\Phi^{-1}BB^T\|\|Q\Phi^{-1}\|)^{1/2}} \qquad (14)$$

여기서

$$\alpha = 1/2(\|\Phi^{-1}\| + \|Q\Phi^{-1}BB^T + \Phi^T\|). \qquad (16)$$

□

정리2 증명) 정리1의 증명과 유사한 방법으로 증명됨. ■

정리1 에서와 마찬가지로 정리2의 결과는 일반적인 임의의 행렬 노옴에 대하여 이산 대수 리카티 방정식의 해의 하한을 제공하는데 그 중요성이 있다. 또 [1]에서는 Q가 양의 정치이고 $Q\Phi^{-1} + (\Phi^T)^{-1}Q$가 양의 정치라는 전제조건을 갖고 있으며,

[3]에서는 Q 가 양의 정치라는 전제 조건을 갖고 있는 반면에, 정리2에서 제시된 하한은 Q가 양의 준치이고 Φ가 비특이 행렬이라는 전제조건을 갖고 있음을 유의할 필요가 있다. 즉 정리2의 결과는 [1]에서 제시한 방법에 비하여 적용 가능 범위가 넓고[3]에서 제시한 방법에 비하여서는 Q가 양의 준치일 때도 성립한다는 장점을 갖고 있다.

3. 결론

본 논문에서 대수리카티방정식의 일반적인 노음의 하한을 제시하였다. 대수리카티방정식의 노음 하한에 대하여서는 많은 결과가 나와 있으나 이들의 결과는 모두 스펙트럴 노음의 하한 만을 제시하였다. 그러나 본 논문에서는 스펙트럴 노음을 포함한 어떤 노음에 대하여서도 대수리카티방정식의 해의 하한을 제공하는 일반적 노음의 하한을 제시하였다. 본 논문에서 제시한 방법은 항법 시스템과 같이 스펙트럴 노음과는 다른 임의의 노음의 하한을 구하고자 할 때 유용하게 쓰일 수 있다.

참고문헌

[1] W.H.Kwon and A.E.Pearson, "A note on the Algebraic Matrix Riccati Equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-22, pp. 143-144, February 1977.

[2] M.M.Fahmy and A.A.R.Hanafy, "Comments on "A Notes on Algebraic Matrix Riccati Equation" *with Authors' Reply*," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-24, No. 1, February 1979, p 143.

[3] R.V.Patel and M.Toda, "On Norm Bounds for Algebraic Riccati and Lyapunov Equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-23, pp. 87-88, No. 1, February 1978.

[4] B.H. Kwon, M.J. Youn and Z. Bien "On bounds of the Riccati and Lyapunov matrix equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 11, November 1981, pp. 1134-1135.

[5] V.R. Karanam, "Lower bounds on the solution of Lyapunov matrix and algebraic Riccati equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 6, December 1981, pp. 1288-1290.

[6] V.R. Karanam, "A note on eigenvalue bounds in algebraic Riccati equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-28, No. 1, January 1983, pp. 109-111.

[7] T. Mori and I.A. Derese, "A brief summary of the bounds on the solution of algebraic matrix equations," *International Journal of Control*, Vol. 39, No. 2, 1984, pp. 247-256.

[8] S.D. Wang, T.S. Kuo, and C.F. Hsu, "Trace bounds on the Riccati and Lyapunov equation," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-31, No. 7, July 1986, pp. 654-656.

[9] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985, p. 291.

[10] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.

[11] A.Gelb and A.A.Sutherland, "Design of strapdown gyroscopes for a dynamic environment," Semi-Annual Report, NASA TR-101-1, July 1967.

[12] R. J. Nurse et al., "A New Baseline for the Inertial Navigation Strapdown Simulator Program," Report, Vol.II, The Charles Stark Draper Laboratory, July 1978.