

새로운 추정 알고리즘을 이용한 비최소 위상 시스템의 직접 적응 제어

이선우^o, 김종환
한국과학기술원 전기및 전자공학과

Direct Adaptive Control of Nonminimum Phase Systems Using Novel Estimation Algorithm

Seon-Woo Lee and Jong-Hwan Kim
Dept. of Elec. Eng., KAIST

Abstract - This paper proposes a novel direct adaptive pole placement control algorithm which can be applied to continuous time nonminimum phase systems. The algorithm is based on Lyapunov's direct method. By introducing an auxiliary signal, a minimal error model is constructed in state space. Using the error model an estimation law is obtained via Lyapunov's second stability theorem. The global stability of the overall system is established.

1 서론

1970년대의 대부분의 적응 제어 이론들은 제어하고자 하는 시스템이 최소 위상이라고 가정하여 연구되었다. 그러나 미지의 시스템을 실제 제어하고자 할 때 최소 위상 여부를 알아내는 것은 매우 어렵다. 또한 대부분의 디지털 제어기의 설계는 연속 시스템의 출력을 표현화하여 얻어진 시스템 표현을 기초로 하여 이루어지는데 연속 시스템의 영점이 안정하더라도 표본화 간격을 짧게 하면 불안정한 영점을 갖게 된다 [1].

Lyapunov 직접 안정도 이론에 의한 직접 적응 제어에 대해서도 최소 위상이라는 가정하에서 많은 연구가 이루어져 왔다. 연속 시간 적응 제어 알고리즘에 대해서는 Feure와 Morse가 총체적인 수렴도를 보장하는 제어 기법을 제안하였고 [3], 이와 유사한 결과가 연속 시간 시스템에 대하여 Narendra와 Valavani [4] 등에 의해 제시되었다. 최근들어 총체적 안정도를 보장하는 이산시간 비최소 위상 시스템의 직접 적응 제어 기법이 소개되고 있으나 [5][6], 연속 시간 비최소 위상 시스템의 직접 적응 제어 기법은 현재까지 극부적 안정도만을 보장하는 기법만이 제안되었다 [7].

본 논문에서는 단일 입력력 비최소 위상 시스템에 적용 가능한 새로운 연속 시간 직접 적응 극배치 제어를 제안하고자 한다. 그림 1에 전체 제어기 구조를 나타내었다. 이와같은 제어기 구조에서 아래 부분은 제어 대상 시스템의 극배치를 위한 것으로 극배치 방정식에 의해 원하는 극배치를 얻을 수 있다. 특히 제어기의 첫 부분은 오차 모델을 구성하기 위하여 부가적인 보조 신호를 발생하도록 구성되었다.

첫 부분에서 보조 신호 발생기에 의해 만들어 지는 보조 신호와 기준 모델의 출력과의 오차를 이용하여, 최소차 오차 모델을 얻을 수 있다. 또한 이 오차 모델을 바탕으로 전체 폐환 시스템내의 모든 신호의 유한성을 보장하는 추정 법칙을 Lyapunov의 직접 안정도 이론에 의거하여 유도하였다. 제안된 알고리즘을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

2 제어 구조

제어 대상 시스템은 다음의 연속 시간 모델로 나타낸다고 하자.

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)}u(t) \quad (2.1)$$

여기서

$$A(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(s) = b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n$$

s 는 미분 연산자 또는 라플라스 변환 변수이고, $u(t)$ 와 $y(t)$ 는 각각 측정 가능한 입력과 출력 값이다.

여기서 다음과 같은 가정을 한다.

A.1 : 차수 n 은 안다.

A.2 : $A(s)$ 와 $B(s)$ 는 서로 소이다.(그러나 계수들은 알지 못한다).

여기서 주목할 것은 $B(s)$ 에 대한 Hurwitz 가정이 사용되지 않았다는 점이다. 비최소 위상 시스템을 제어하기 위해서는 다항식 $B(s)$ 는 전체 폐루우프 시스템내에 유지되어야만 한다.

그림 1은 전체 제어기 구조를 나타내며, 첫 부분은 오차 모델을 유도하기 위하여, 아래 부분은 극배치 제어를 위하여 각각 이용된다.

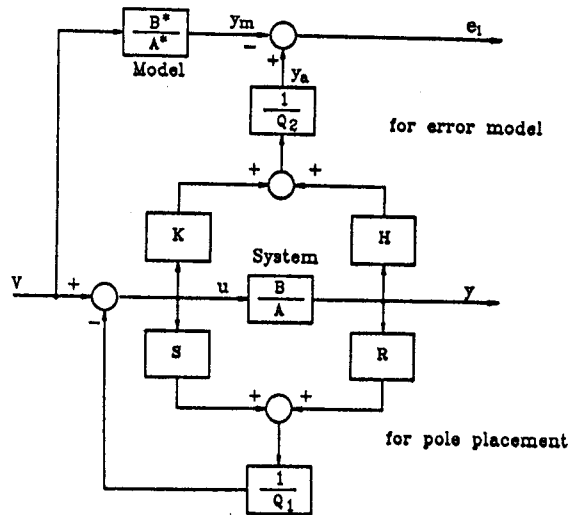


그림 1. 오차 모델을 위한 제어 구조.

시스템 (2.1)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$A(s)z(t) = u(t)$$

$$y(t) = B(s)z(t) \quad (2.2)$$

여기서 $z(t)$ 는 내부 상태 변수이다.

여기서

$$\Lambda_{q_2} = \begin{bmatrix} \vdots & & & \\ 0 & \vdots & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & q_2 & \end{bmatrix}$$

$$q_2 = [-q_{2n} - q_{2n-1} \dots - q_{21}]$$

$$\theta_2^* T = [k_n - q_{2n} \dots k_1 - q_{21} \ h_n \ h_{n-1} \dots \ h_1]$$

$$\omega_2(t)^T = [x_{au}(t)^T; x_{ay}(t)^T].$$

(3.1)를 (3.2)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$y_a(t) = v(t) + \theta^{*T} \omega(t) \quad (3.4)$$

여기서

$$\theta^{*T} = [\theta_1^{*T}; \theta_2^{*T}]$$

$$\omega(t)^T = [\omega_1(t)^T; \omega_2(t)^T].$$

(2.2)와 (2.4)를 이용하면, 제어 법칙(3.1)은 다음과 같이 나타낸다.

$$u(t) = (A_0(s) - A_0^*(s))z(t) + \phi_1^T(t)\omega_1(t) + v(t) \quad (3.5)$$

여기서

$$\phi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1^*, \quad \theta_1(t) \text{는 } \theta_1^* \text{의 추정치이다}$$

$$A_0(s) = A(s) - s^n \text{ 과 } A_0^*(s) = A^*(s) - s^n.$$

$s^n = A(s) - A_0(s)$ 이므로, (3.4)를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$s^n z(t) = -A_0(s)z(t) + u(t)$$

$$= -A_0^*(s)z(t) + \phi_1^T \omega_1(t) + v(t) \quad (3.6)$$

보조 신호의 추정치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{y}_a(t) = B^*(s)z(t) + \phi_2^T(t)\omega_2(t)$$

$$= (B_0^*(s) - A_0^*(s))z(t) + v(t) + \phi_2^T(t)\omega_2(t) \quad (3.7)$$

여기서 $B_0^*(s) = B^*(s) - s^n$ 이고 $\phi(t)^T = [\phi_1(t)^T; \phi_2(t)^T]$ 이다.

다음과 같이 상태 벡터 x 를 정의하자 [5].

$$x(t) = [s^{n-1}z(t) \ s^{n-2}z(t) \ \dots \ z(t)]^T$$

그러면 보조신호 $y_a(t)$ 를 아래와 같이 상태 공간에서 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(\phi_1(t)^T \omega_1(t) + v(t))$$

$$\hat{y}_a(t) = cx(t) + v(t) + \phi^T(t)\omega(t) \quad (3.8)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} a^* & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & \\ & & I_{n-1} & \vdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ & & & & a_n^* \end{bmatrix}$$

$$a^* = [-a_1^* \ -a_2^* \ \dots \ -a_n^*]$$

$$b^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$c = [b_1^* - a_1^* \ b_2^* - a_2^* \ \dots \ b_n^* - a_n^*]$$

위와 같이 표현된 상태 방정식은 가제어 정준형이므로 다음과 같은 기준 모델의 전달 함수를 나타내고 있음을 알 수 있다.

$$c(sI - A)^{-1}b + 1 = \frac{B^*(s)}{A^*(s)}$$

기준 모델(2.6)은 상태공간에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + bv(t)$$

$$y_m(t) = cx_m(t) + v(t) \quad (3.9)$$

위의 (3.7)과(3.8)로부터 다음의 최소차 오차 모델을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + b\phi_1(t)^T \omega_1(t)$$

$$e_1(t) = ce(t) + \phi(t)^T \omega(t) \quad (3.10)$$

여기서

$$e(t) = x(t) - x_m(t)$$

$$e_1(t) = \hat{y}_a(t) - y_m(t).$$

다음 절에서 위의 오차 모델에 바탕을 둔 적응 법칙을 제안하고자 한다.

3.2 적응 법칙

다음과 같은 추정 알고리즘이 제어기 매개 변수와 보조 매개 변수의 추정 에 이용된다.

$$\dot{\phi}_1(t) = \dot{\theta}_1(t) = -\Gamma_1 e_1(t)\omega_1(t)$$

$$\dot{\phi}_2(t) = \dot{\theta}_2(t) = -\Gamma_2 e_1(t)\omega_2(t) \quad (3.11)$$

여기서 Γ_1 과 Γ_2 는 $(2n \times 2n)$ 의 대칭 양의 행렬이다.

다음의 정리에 의해 이 제어 시스템이 총체적으로 안정함을 보일 수 있다.

정 리 1 가정 A.1과 A.2하에서 시스템(2.1), 제어법칙(3.2), 모델(2.6), 보조 시스템(3.3), 그리고 추정 알고리즘(3.11)로 구성된 폐 루프 적응 제어 시스템을 고려하자. 그러면 적응 오차 모델(3.10)은 총체적으로 안정하며 $e_1(t)$ 가 0으로 수렴한다.

Proof: 다음과 같은 Lyapunov 함수를 선택하자.

$$V_i(e, \phi) = \int_0^t e_1(\tau)^2 d\tau + \phi^T(t)\Gamma^{-1}\phi(t) + \int_t^\infty \beta(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

여기서 $\Gamma = \Gamma^T > 0$ 는 Γ_1 과 Γ_2 로 이루어진 diagonal 행렬이며, 함수 $\beta(t) \geq 0$ 는 다음을 만족한다.

$$\int_0^\infty \beta(t) dt < \infty \text{ and } e_1(t)^2 |_{\phi=0} = [e^T e(t)]^2 \leq \beta(t). \quad (3.13)$$

이것의 시간 미분은 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{V}_i(e, \phi) = e_1^2(t) |_{\phi=\phi(t)} - 2e_1(t) |_{\phi=\phi(t)} \phi(t)^T \omega(t) - \beta(t). \quad (3.14)$$

$e_1^2(t)$ 가 가음과 같은 convexity 조건을 만족하고

$$e_1^2(t) |_{\phi=\phi(t)} - e_1^2(t) |_{\phi=0} \leq \phi(t)^T \frac{\partial}{\partial \phi(t)} e_1^2(t) |_{\phi=\phi(t)}$$

$$= 2e_1(t) |_{\phi=\phi(t)} \phi(t)^T \omega(t) \quad (3.15)$$

$\phi = 0$ 일때, $e(t)$ 는 다음과 같다.

$$\|e(t)\| \leq Ce^{\lambda t}$$

여기서 λ 는 안정한 행렬 A 의 최대 고유치이며, C 는 양의 상수이다. 여기서 $\beta(t)$ 를 다음과 같이 선택하자.

$$\beta(t) = \|c\|^2 \|e(t)\|^2. \quad (3.16)$$

(3.16)과 (3.15)로부터, (3.14)는 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{V}_i(e, \phi) \leq e_1(t)^2 |_{\phi=0} - \beta(t) \leq 0.$$

그러므로, $\int_0^t e_1(\tau)^2 d\tau$ 와 $\phi(t)$ 는 모든 시간 $t \geq 0$ 에 대해 안정하다. 즉 $e_1(t) \in L_2$ 이고 $\phi(t) \in L_\infty$ 이다.

이제 $t \rightarrow \infty$ 일때 $e_1(t)$ 가 0으로 수렴함을 보이자. $e_1(t)$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$e_1(t) = \frac{B^*(s)}{A^*(s)}[\phi_1(t)^T \omega_1(t)] + \phi_2(t)^T \omega_2(t).$$

만약 $\phi_1(t)^T \omega_1(t)$ 혹은 $\phi_2(t)^T \omega_2(t)$ 가 무한히 커진다면 $e_1^2(t)$ 도 무한히 커질 것이다. 그러나 $\int_0^t e_1(\tau)^2 d\tau$ 가 유한하므로, $\phi_1(t)^T \omega_1(t)$ 와 $\phi_2(t)^T \omega_2(t)$ 는 유한하다.

$e(t)$, $u(t)$ 그리고 $y(t)$ 가 유한하므로 $e_1(t) \in L_\infty$ 이다. Λ_{q1} 과 Λ_{q2} 가 안정한 행렬이므로, $u(t)$ 와 $y(t)$ 의 유한함은 $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$ 의 유한함을 보장한다. (3.11)에서 $\dot{\phi}(t)$ 의 유한함을, (3.10)에서 $\dot{e}(t)$ 의 유한함을 알 수 있고, 이로부터 $\dot{e}_1(t)$ 가 유한하다는 것을 알 수 있다.

결론적으로 $e_1(t)$, $\dot{e}_1(t) \in L_\infty$ 이고 $e_1(t) \in L_2$ 이므로, Barbalat의 보조 정리에 의해 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$.

주: 비록 추정 알고리즘 (3.11)이 보조 정리 2.1의 재관 제어 기법에서와 같이 추적 오차를 0으로 보내는 것은 보장하지 못하나, 적응 시스템내의 모든 신호의 유한성은 보장한다. 이의 구체적인 결과는 [7]에서 제안되었고, 이산 시간 시스템에의 제어 구조는 [6]에 나타난다.

4 컴퓨터 시뮬레이션

앞에서 제안된 연속시간 비최소 위상 시스템에 대한 적응 제어 알고리즘의 유효성을 확인하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

제어 대상으로 불안정한 비최소 위상 시스템 (4.1)과 기준 모델 (4.2)를 고려하자.

$$y(t) = \frac{s-4}{s^2-2s+5} u(t) \quad (4.1)$$

$$y_m(t) = \frac{s^2+4s+2}{s^2+3s+2} v(t). \quad (4.2)$$

특성 다항식 $Q_1(s)$ 과 $Q_2(s)$ 는 다음과 같이 선정한다.

$$Q_1(s) = s^2 + 4s + 3$$

$$Q_2(s) = s^2 + 3s + 3.$$

적용 이득 Γ_i , $i = 1, \dots, 4$ 는 $2n \times 2n$ 의 단위 행렬로 설정하였다.

다음과 같은 초기값이 사용되었으며, 외부 기준 입력 $v(t)$ 는 크기가 1인 계단 함수로 설정했다. 또한 40초에서 기준 입력을 변화시켰다.

$$\begin{aligned} \theta_1(0)^T &= [-10.00 \quad -0.50 \quad -10.00 \quad -0.50] \\ \theta_2(0)^T &= [10.00 \quad 5.00 \quad 20.0 \quad 0.5] \end{aligned} \quad (4.3)$$

다음의 그림 2와 3에 결과를 나타내었다.

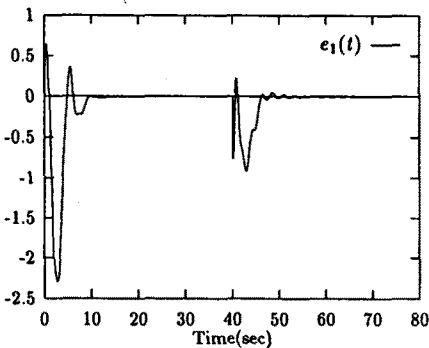


그림 2. 보조 신호와 기준 모델과의 오차 ($e_1(t)$).

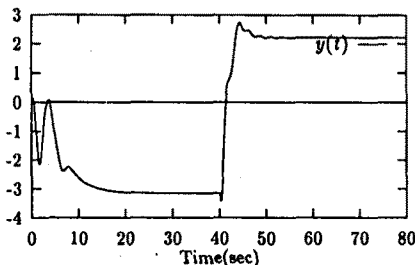


그림 3-(a). 시스템 출력 $y(t)$.

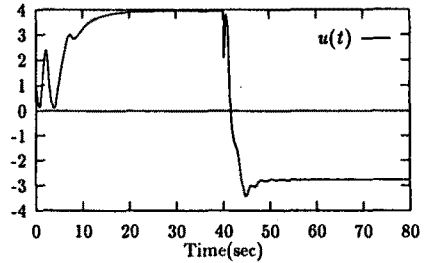


그림 3-(b). 제어 입력 $u(t)$.

5 결론

본 논문에서는 Lyapunov의 직접 안정도 설계 방법을 이용하여 연속 시간 선형 시불변 비최소 위상 동적 시스템에 적용 가능한 새로운 직접 적응 극배치 제어 알고리즘을 제안하였다. 종래의 연속 시간 직접 적응 제어에서 필요했던 최소 위상이라는 가정을 요구하지 않는 제어 기법으로, 보조 신호와 기준 모델을 이용하는 방법을 사용했다. 기존의 방법처럼 피드백 신호만을 이용하는 것이 아니라 오차 모델을 위해 도입된 보조 신호와 기준 모델의 출력을 이용하여 기존의 비최소차 오차 모델과는 달리 최소차 오차 모델을 유도하였다. 이 유도된 오차 모델을 이용하여, 총체적인 유한성을 보장하는 새로운 추정 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘의 유용성을 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 확인하였다.

참고 문헌

- [1] P. E. Wellstead, D. Prager, and P. Zanker, "Pole Assignment Self-Tuning Regulator", *Proc. IEEE*, vol. 126, No. 8, Aug. 1979.
- [2] H. Elliott, "Direct adaptive pole placement with application to nonminimum phase systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, pp. 720-722, June 1982.
- [3] A. Feuer and A. S. Morse, "Adaptive control of single-input single-output linear systems", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. AC-23, pp. 557-569, Aug. 1978.
- [4] K. S. Narendra and L. S. Valavani, "Stable adaptive controller design-direct control", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. AC-23, pp. 570-583, Aug. 1978.
- [5] N. Minamide, J. Tsuboi and P. N. Nikiforuk, "A Lyapunov design approach to a stable pole-placer for a Multivariable Nonminimum-phase system", *IFAC 11th Triennial World Congress*, Tallinn, USSR, 1990.
- [6] J.-H. Kim, Y.-C. Hong and K.-K. Choi, "Direct Model Reference Adaptive Pole Placement Control with Exponential Weighting Properties", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 36, No. 9, Sep. 1991.
- [7] J.-H. Kim, S.-W. Lee and J.-H. Kim, "Lyapunov Redesign for Direct Adaptive Control of Nonminimum-phase systems", *Proc. IEEE 30th Conf. Dec. and Cont.*, Brington, U.K., Dec. 1991.
- [8] A. L. Fradkov, "Speed-gradient scheme and its application in adaptive control problems", *Automation and Remote Control*, pp. 1333-1342, 1979.
- [9] K.S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable adaptive systems*, Prentice-Hall, 1989.