

입력 필터를 갖는 제어기 설계

홍일선*, 심재훈**, 권오규**

* 국방과학연구소, ** 인하대학교 전기공학과

Controller Design with Input Filter

Il Sun Hong*, Jae Hoon Shim**, Oh Kyu Kwon**

* Agency for Defence development

** Dept. of Electrical Engineering, Inha University

Abstract

This paper deals with the controller design problem having input filter. To reduce the excessive overshoot in the set-point response, a design method with filtered input is proposed here and we show that it can reduce the overshoot to the specified value based on simple formula. Analytic results and computer simulation show that the controller design method suggested in this paper is superior to the conventional solution of reducing large overshoot.

1. 서론

기준 계단 입력을 갖는 PID제어기는 기준 입력의 크기가 변경되면 제어 계수를 변경시켜 요구되는 제어 성능을 만족시킨다. 제어 계수 조정과정에서 기준 입력의 크기가 커짐에 따라 최대값을 줄이기 위해서는 K_p 계수를 줄여 사용하는 것이 일반적이다. 이 경우 외란 제거 특성이 동시에 나쁘게 되어 제어 특성이 저하되는 일이 나타난다. 따라서 기준 입력이 큰 경우 넓은 범위의 값을 지니는 경우 제어 계수를 조정하지 않고 최대치를 줄이는 방안이 필요하다.

[1] - [3]의 결과들은 PID 제어 구조를 유지하면서 비례제어항에 상수배를 행하여 외란 제거 특성을 보존하면서도 최대 응답 특성을 줄이는 방법으로 기준값 가중제어기라 하고 그림 1과 같은 구조의 제어기를 제시하고 있다.

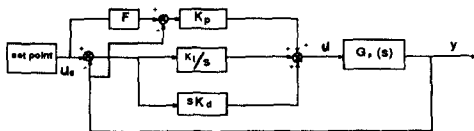


그림 1. 기준값 가중 제어기

본 논문에서는 기준 입력이 변동될 때에도 제어 계수(K_p, K_i, K_d)를 조정하지 않고 기준 입력의 형태를 변화시켜 안정

도, 외란 제거 특성을 유지하면서 최대 응답크기를 줄여 제어 목적을 달성할 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 입력 filter를 갖는 제어기를 제안한다. 3장에서는 제안한 제어기 성능을 모의 실험을 통하여 살펴보고, 4장에서 결과에 따른 고찰을 행하며, 5장에서 결론을 맺는다.

2. 입력 filter를 갖는 제어기 설계

2.1 입력 filter를 갖는 제어기 구성

일반적인 PID 제어기 구조는 그림 2와 같다.

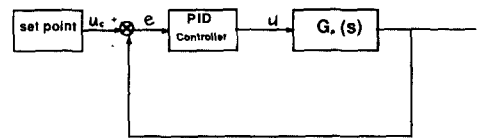


그림 2 일반적인 PID 제어기

기준 입력으로 계단 입력을 인가하는 경우 시간 영역에서 특성을 쉽게 파악할 수 있다는 점과, 구성이 편리하다는 점 등으로 계단입력이 자주 사용된다. 그러나 실제 구현에 있어서 제어 신호의 크기 제한, 구동부의 제약 조건(시간 지연, 구동 범위 등)이 있는 경우는 오차 신호의 크기 및 시간 변화가 크지 않도록 하는 것이 바람직하다. 이러한 요구는 기준 계단 입력과 출력 신호에 의한 오차 신호의 발생보다는 시스템의 최대 응답 특성과 비슷한 형태로 입력의 형태를 재형성하여 인가하면 해결될 수 있다.

이러한 목적으로 이 논문에서는 그림3에 표시한 것과같이 입력 신호의 상승 시간을 제어하는 방안을 제시한다. 그림 3의 회로를 그림 2와 같은 일반적인 PID 제어기나 임의의 제어기 입력단에 적용한 경우를 "입력 filter를 갖는 제어기"라 명명하고 단 위 되먹임을 갖는 제어기의 구성도를 그림 4에 표시한다.

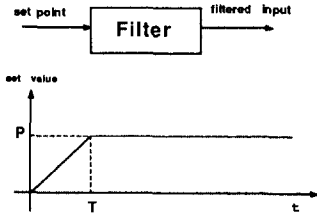


그림 3 입력 filter 회로

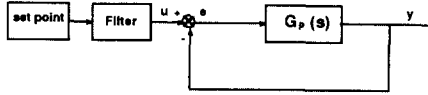


그림 4 입력 filter를 갖는 제어기

이 제어기의 특성은 기존의 제어기 구조를 유지하면서 기준 입력의 형태를 변형 인가함으로써 넓은 동작 범위에 걸쳐 요구되는 제어 특성을 만족시킬수 있으며, 설계 및 구현도 쉽다는 것이다.

2.2 시간 영역에서의 특성 고찰

본 절에서는 기준 계단 입력에 대한 특성과 비교하기 위하여 다음과 같은 성능 지표를 사용한다.

- ⊙ 최대 응답 시간
- ⊙ 최대 응답 크기
- ⊙ 상승 시간

부족 감쇠(underdamped: $0 < \zeta < 1$)의 경우 정상 상태값이 0%에서 100%가 되는데 소요되는 시간.

- ⊙ 정착 시간
2% 정착 시간을 사용한다.

그림 5와 같은 단순 2 차 시스템에 대한 특성을 살펴본다. 개루프 전달함수 $G_p(s)$ 는 식 (1)과 같다.

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad (1)$$

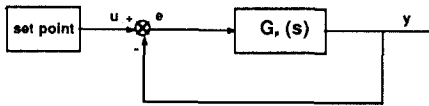


그림 5 단순 2차 시스템

그림 5의 폐루프 전달 함수 $G(s)$ 는 식(2)로 표시된다.

$$\frac{Y}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

가. filtered input의 형태

그림 3과 같은 형태는 식(3)으로 표시된다.

$$u(t) = \frac{P}{T} [r(t)u(t) - r(t-T)u(t-T)] \quad (3)$$

여기서 $r(t)=t$, $u(t)=1, \forall t$, $u(t-T) = \begin{cases} 1, & t \geq T \\ 0, & t < T \end{cases}$

식 (3)의 Laplace 변환은 (4)식으로 나타난다.

$$U(s) = \frac{P}{T} \frac{1}{s^2} [1 - e^{-Ts}] \quad (4)$$

시스템 출력은

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

이고, Laplace 역변환에서,

$$y(t) = \frac{P}{T} \left[\left\{ t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t - 2\phi) \right\} u(t) - \left\{ (t-T) - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-T)}}{\omega_d} \sin(\omega_d(t-T) - 2\phi) \right\} u(t-T) \right] \quad (5)$$

여기서, $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 이다.

식(5)를 $0 < T < t$ 와 $T < t$ 구간으로 나누어 정리하면, 식 (6)과 식(7)로 된다.

$$y(t) = \frac{P}{T} \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t - 2\phi) \right] \quad (6)$$

$$y(t) = \frac{P}{T} \left[T + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} A \sin(\omega_d t - 2\phi + \beta) \right] \quad (7)$$

$$A = \sqrt{1 - 2e^{-\zeta\omega_n T} \cos \omega_d T + e^{-2\zeta\omega_n T}}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{e^{\zeta\omega_n T} \sin \omega_d T}{1 - e^{\zeta\omega_n T} \cos \omega_d T}$$

나. 최대값 시간 (t_p)

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0 \quad (8)$$

에서, $0 < t < T$ 에서는 $y(t) < P$ 이므로, 최대값 시간 t_p 는 T 이후에 나타난다. 그러므로, t_p 를 얻기위해서 식(7)을 식(8)에 대입하면,

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = \frac{P}{T} \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} A \sin(\omega_d t_p - \phi + \beta) = 0 \quad (9)$$

여기서 $\frac{P}{T} \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} A \neq 0$ 이므로

$$\therefore t_p = \frac{[n\pi + \phi - \beta]}{\omega_d} > T \quad (10)$$

다. 최대값 (y_p)

최대값은 $t > T$ 에서 나타나므로, 식 (7)에서 $t = t_p$ 인 경우이다.

$$\begin{aligned}
 y(t) \Big|_{t=t_p} &= \frac{P}{T} \left[T - \frac{A}{\omega_n} \text{Exp} \left\{ -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} (n\pi + \phi - \beta) \right\} \cos n\pi \right] \\
 &= \frac{P}{T} \left[T + \frac{A}{\omega_n} \text{Exp} \left\{ -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} (n\pi + \phi - \beta) \right\} \right] \\
 n &= 1, 3, 5, \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

이때 최대 과도응답의 크기는 식(12)로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \text{Maximum Overshoot} &= y(t) \Big|_{t=t_p} - P \\
 &= \text{Exp} \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi \right) \left[\frac{P}{T} \frac{A}{\omega_n} \text{Exp} \left\{ -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \{(n-1)\pi + \phi - \beta\} \right\} \right] \\
 &\quad (12)
 \end{aligned}$$

라. 상승시간 (t_r)

$$y(t) \Big|_{t=t_r} = P$$

$t < T$ 에서 $y(t) < P$ 이므로, 상승시간 t_r 은 $T < t$ 인 구간에 속한다. 그러므로 이 구간에서의 식(7)에 t_r 를 대입하면,

$$y(t_r) = \frac{P}{T} \left[T + \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\omega_d} A \sin(\omega t_r - 2\phi + \beta) \right] = P \quad (13)$$

여기서 $\frac{P}{T} \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t_r} A \neq 0$ 이므로,

$$\therefore t_r = \frac{n\pi + 2\phi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (14)$$

마. 정착시간 (t_s)

2% 기준일 때

$$\therefore t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (15)$$

바. $\zeta = 0$ 인 경우

크기가 P인 계단입력의 경우 출력은 $y(t) = P(1 - \cos\omega_n t)$ 이지만, filtered input의 경우는 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{P}{T} \left[\left\{ t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} \right\} u(t) \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ (t-T) - \frac{\sin(\omega_n(t-T))}{\omega_n} \right\} u(t-T) \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

이 식을 구간으로 나누어 정리하면, 식(17)와 (18)로 표시된다.

$t < T$ 인 경우

$$y(t) = \frac{P}{T} \left[t - \frac{1}{\omega_n} \sin\omega_n t \right] \quad (17)$$

$t > T$ 인 경우

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{P}{T} \left[T - \frac{\sqrt{2-2\cos\omega_n T}}{\omega_n} \sin(\omega_n t + \theta) \right] \\
 \theta &= \tan^{-1} \frac{\sin\omega_n T}{1 - \cos\omega_n T} \quad (18)
 \end{aligned}$$

사. Ramp Time T 결정법

그림 3에서 원하는 최대과도응답을 얻기위한 T는 아래의 방법으로 구할 수 있다.

원하는 백분율 최대과도응답의 크기를 α 라 할때, (12)식에서

$$\alpha = \left[\frac{100}{T} \frac{A}{\omega_n} \text{Exp} \left\{ -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} (n\pi + \phi - \beta) \right\} \right] \quad (19)$$

양변에 ln을 취하여 정리하면,

$$\begin{aligned}
 \ln(100 \alpha T \omega_n) - \ln A &= -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} (n\pi + \phi - \beta) \\
 n &= 1, 3, 5, \dots \quad (20)
 \end{aligned}$$

그리고 식 (10)에서

$$T < t_p = \frac{n\pi + \phi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (21)$$

을 만족하는 최소의 n ($n = 1, 3, 5$)의 값을 구해서 식(20)에 대하면 T를 구할 수 있다.

아. 특성비교

기준계단 입력과 제한한 filtered input 를 갖는 제어기의 시간 영역상의 특성 비교는 표 1 과 같다.

3. 모의 실험

그림 5와 같은 단순 2차 시스템에 대하여 모의실험을 통하여 특성을 살펴보자. 공진주파수와 감쇠비를 $\omega_n = 5$, $\zeta = 0.4$ 로 정했을 때 대상 시스템의 개루프 전달함수는

$$G_p(s) = \frac{25}{s(s+4)}$$

가 된다.

	기준계단입력	Filtered Input
최대값 시간 (t_p)	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$	$\frac{n\pi + \phi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} > T$ $n = 1, 3, 5, \dots$
M. O.	$Exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right)$	$Exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right)$ $\times \left[\frac{P}{T} \frac{A}{\omega_n} Exp\left\{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\{(n-1)\pi + \phi - \beta\}\right\} \right]$
상승 시간 (t_r)	$\frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$	$\frac{n\pi + 2\phi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
정착 시간 (t_s)	$\frac{4}{\zeta \omega_n}$	$\frac{4}{\zeta \omega_n}$

표 1. 성능 지표 비교표

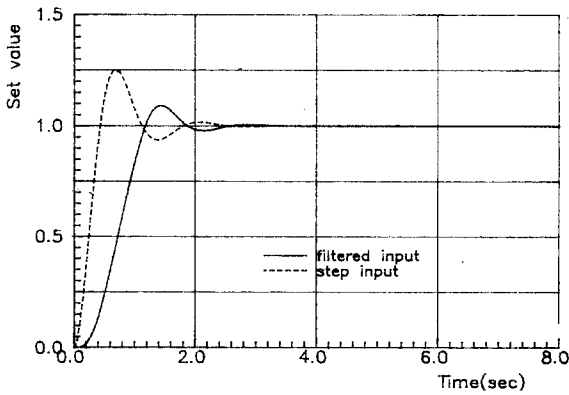


그림 6. step input 및 filtered input 응답 특성

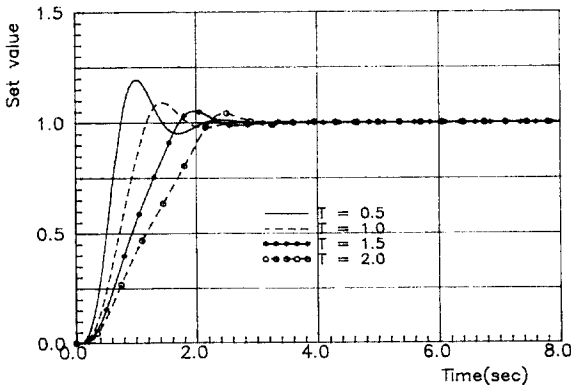


그림 7. T 변화에 따른 응답특성

그림 6에서는 기준 계단 입력에 대한 응답과 filtered input에 대한 응답을 보여준다. 입력은 단위 입력을 기준값으로 사용하고 filtered input의 T는 1로 한다. 이들의 결과는 표 1에 의한 계산식의 결과와 일치한다. 기준 계단 입력의 경우 최대값 시간 $t_p=0.68$ 이고 최대값은 1.25이며, 상승시간 $t_r=0.44$ 이다. filtered input 경우 최대값 시간 $t_p=1.47$ 이고 최대값은 1.08이며, 상승시간은 $t_r=1.2$ 이다.

그림 7에서는 기울기 시간 T의 변화에 따른 응답을 나타낸다. ramp time T의 크기가 커질수록 최대과도응답의 크기가 줄어들어 드는 것을 볼 수 있다.

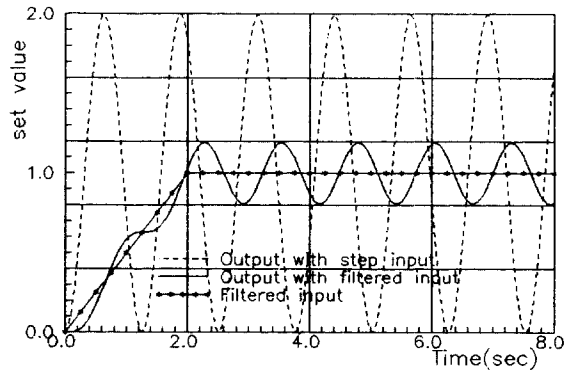


그림 8. $\zeta = 0$ 인 경우의 응답특성

그림 8은 $\zeta = 0$ 인 경우 특성을 비교하여 준다. 계단입력을 인가하였을 때는 $y(t) = 1 - \cos \omega t$ 의 형태로 출력이 진동함을 알 수 있으나, filtered input을 사용하는 경우는, $0 < t < T$ 에서는 (17) 식으로, $t > T$ 에서는 (18) 식으로 나타나는 진폭을 지니면서 추종하는 것을 볼 수 있다.

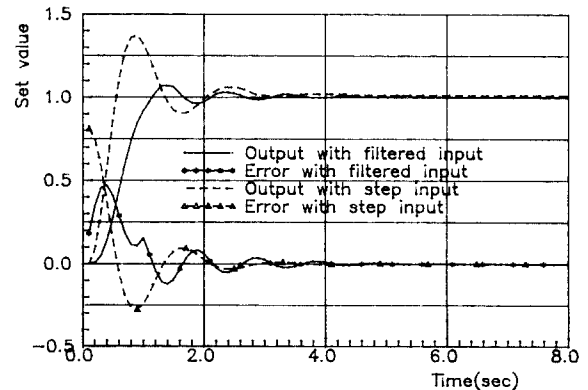


그림 9 PI 제어기를 갖는 경우

그림 9는 제어기로 PI제어기를 갖는 경우의 결과이다. 단위 계단 입력의 경우 최대값 및 오차 신호의 크기 및 시간 변화율도 filtered input의 경우보다 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.

4. 결과 및 검토

제한한 방안에 대한 해석 및 모의 실험을 단위 되먹임을 갖는 제어기에 대하여 행하였다. 그림 6과 7에서 확인 할 수 있는 바와 같이 단위 계단 입력을 사용하는 경우보다 filtered input을 사용하는 경우가 최대값의 크기를 제어기 설계자나 운영자가 손쉽게 줄일수 있음을 알 수 있다. 특히 사용하는 입력값이 범위가 광범위한 경우 PID 제어기도 최대값을 줄이기 위해서는 비례 계수를 줄이나, 이는 외란제거 특성을 저하시키는 결과를 초래할 수 있다. 그러나 제한한 구조에서는 시스템 입력의 크기 변화보다 시스템의 고유 특성과 외란에 대한 영향을 고려하여 제어기를 구성할 수 있다. 특히 아날로그 제어기를 사용하는 산업 현장에서 사용중인 PID 제어기나 다른 형태의 제어기에도 입력단을 변형하여 사용할 수 있다.

그림 8에서는 $\zeta = 0$ 인 경우의 특성을 보여주고 있다. 플랜트에 인가되는 신호의 시간변화율에 따라 시스템 응답이 다른 양상을 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 이는 플랜트 제어 과정에서 입력신호의 특성을 조절하면 시스템의 감쇠계수를 크게 할 수 없는 경우도 입력신호의 시간변화율을 조절하여 원하는 제어 특성을 얻을 수 있다.

그림 9에서 알 수 있는 것처럼 입력 필터를 갖는 경우는 비례 제어 계수의 값이 입력 필터를 갖지 않는 경우에 비하여 크다. 이점은 동일한 크기의 최대값을 갖는 경우 시스템에 사용할 수 있는 비례 계수가 크게되어 외란 제거 특성이나, 시스템 응답 특성 개선을 이룰 수 있다. 또한 오차 신호의 형태를 살펴보면, 입력 필터를 갖는 경우가 과도 응답의 오차신호 형태는 크기 및 시간 변화율이 크지않아 실지 시스템에 인가되는 경우 구동부의 움직임이 최소화 되므로 구동부의 실제조건에 적합할 것으로 판단된다. 이는 $0 < t < T$ 구간에서는 오차 신호에 대해 적분기(1/s)를 첨가한 결과와 비슷하나 $t > T$ 구간에서는 적분기에 대한 영향이 없어져 적분기 첨가로 인한 시간 지연영향이 나타나지 않게되므로 위상여유분도 보존할 수 있어 시스템의 안전성이 좋다.

5. 결론

제한한 방법을 단순 2차 모형에 적용하여 해석적 결과 및 모의 실험을 통하여 결과를 확인 하였다. 이러한 결과는 입력이 광범위한 값을 갖는 경우나 기준 입력이 자주 변동되는 경우의 과도 응답의 크기를 제어기 운영자가 원하는 범위내로 줄일 수 있음을 알 수 있었다. 또한 제어기 설계 및 운영과정에서 플랜트에 인가가능한 입력신호의 특성-크기 및 주파수 특성을 적절히 선택하는 경우 제어특성이 향상될 수 있을 것으로 기대된다.

이 논문에서 제한한 방법을 PID 제어기에 적용할 때의 계수조정법이라든지, 시간 지연이 큰 경우나 비선형 시스템에 대해 적용하였을때 해석적 연구등이 계속 수행되어야할 과제이다.

6. 참고 문헌

- [1] Eitelberg, E., "A regulating and tracking PI(D) controller", INT. J. Control, Vol.45, No. 1, 91- 95, 1987.
- [2] Hang, C. C., K. J. Astrom, W. K. Ho, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula", IEE PROCEEDINGS-D, Vol. 138, No.2, 111-118, MARCH 1991.
- [3] K. J. Astrom, T. Haggland, , "Automatic tuning of PID Controllers", Instrument Society of America, 1988.
- [4] Horowitz, I. M., "Synthesis of Feedback Systems", Academic Press, 1963.