

# 최적 제어 이론을 사용한 비행 경로 선정

김 율 곤  
국방과학연구소

Determination of Flight Route Using Optimal Control Theory

Eulgon Kim  
Agency for Defense Development

## Abstract

A method for optimal route planning is presented with the assumption that the overall defended area is known in terms of threat potential function. This approach employs tangent plane to reduce the dimension of the state space for optimal programming problems with a state equality constraint. One-dimensional search algorithm is used to select the optimal route among the extremal fields which are obtained by integrating three differential equations from the initial values.

In addition to being useful for the route planning through threat potential area, the trajectory planning will be suitable for general two-dimensional searching problems.

## 1. 서론

비행체가 특정임무를 수행하는 명령이 주어졌을때 상대방의 화력에 최소한 노출되고, 최대한의 생존확률을 성취할 수 있는 최적경로의 선택이 필수적이다. 역사적으로 이와같은 임무기획(mission planning)은 수동으로 이루어져 노동집약적이고 시간소모가 많은 업무였다[1]. 특히 현대와 같은 기동성이 높은 첨단무기체계하의 전투에서 비행경로 선정을위해 장시간의 비행지연은 전투력의 효율성이나 상대방에게 주는 시간적여유의 관점에서 자동화가 반드시 이루어져야하는 부분이다. 현재 미군에서는 TAMPS(Tactical Aircraft Mission Planning System) 라는 시스템이 개발되어 페르시아 걸프전에 사용되었고, 이와 유사한 제품으로 미육군에서는 TACPLAN(Tactical Planning) 이라는 knowledge-base 을 이용한 시스템을 개발하여 사용중이다[2].

본 논문에서는 임무기획을 자동화하기위한 시스템 개발의 일환으로 최적 비행경로 산출에 관하여 언급하겠다. 문제를 단순화하기위해 모든 가능한 작전지역의 정보 및 무기의 특성이 수집되어 각 지점에서 상대 위험도가 구하여졌다고 가정한다.

일반적으로 최소 경로 찾기 문제의 해는 대부분 동적 계획법(Dynamic Programming)이나 구배탐색법(Gradient Search)을 이용하고있다. 전자는 전역해를 찾을 수 있으나 각 상태를 Quantization 하기때문에 유연한 경로를 찾기 위해서는 많은 처리시간과 메모리영역을 요구한다. 반면 후자는 계산적으로 전자보다 효율적이고 세밀한 경로를 산출하나 그 해가 전역해가 아닐 가능성이 높은 단점을 지니고있다.

Kim[3] 은 지형을 이용한 비행경로산정에 구배탐색법의 일종인 1차원 searching 방법을 제시하였으며, 전역해의 여부를 판단할 수 있는 Second Variation Test를 보여주었다.

## 2. 직접방법

전역역에 걸친 위험분포가 그림1. 과 같이 주어졌고, 각 구간마다의 피격확률이 독립적이라면, 비행경로 A-B에 따른 생존확률  $P_s$  은

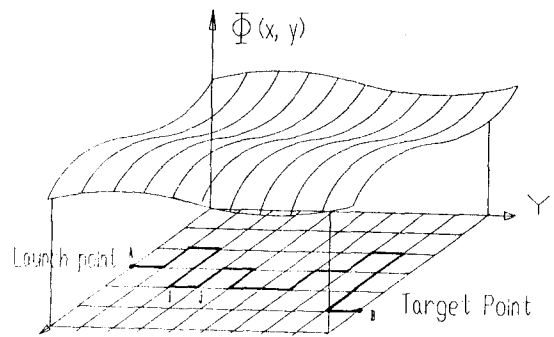


그림 1. 동적 계획법에 의한 경로 선정

$$P_s = \prod_{ij} (1 - P_{ij}) \quad (1)$$

으로, 구간별 피격확률  $P_{ij}$  은

$$P_{ij} = \int p \, ds = \int p \, v \, dt \quad (2)$$

로 표현된다. 여기서  $p$ 는 위치  $(x, y)$ 에 따른 위험 확률밀도 함수,  $ds$ 는 구간거리,  $v$ 는  $i-j$  구간의 일정한 비행속도,  $dt$ 는  $i-j$  구간을 통과하는데 걸리는 소요시간을 나타낸다.

식(1)의 양변에 대수를 취하고, 새로운 변수  $T$ 를 도입하면

$$T = -\ln P_s = \sum -\ln(1 - P_{ij}) = \sum T_{ij} \quad (3)$$

이 되며, 새로 정의된 변수  $T$ 는 비행경로의 위험함수로 표현될 수 있다.  $T$ 는 비행체가 날고있는 각 구간의 위험치  $T_{ij}$ 의 합이기 때문에 이는 다음과 같은 위험 포텐셜 함수의 적분형으로 나타낼 수 있다.

$$T = \int \Phi \, dt \quad (4)$$

원하는 비행경로는 식(1)을 최대화하는 대신 식(4)를 최소화하는 경로가 되며, 이는 동적계획법으로 구하여 질 수 있으나, 넓은 작전 범위에서의 경로 선정시 과도한 계산량 때문에 다음과 같은 방법을 제시한다.

### 3. Tangent Plane의 도입

앞서 다룬 문제는 위험함수로 명명된 Potential 함수의 표면위의 출발점에서 목표점까지를 비행체가 기어갈 때 전체 Potential 고도의 합이 가장 낮은 경로를 찾는 문제로 전환될 수 있다. 함수의 표면이 매우 smooth 하다면 임의의 위치에서 그 점에 접하는 Tangent Plane을 그림2.와 같이 그을 수 있다. 그림2.에서 벡터  $i, j, k$ 는 위험함수를 묘사하기 위한 단위 벡터이고, 벡터  $t_1, t_2, n$ 은 Tangent Plane상에서 서로 직교하는 단위벡터이다. 수직벡터  $n$ 은

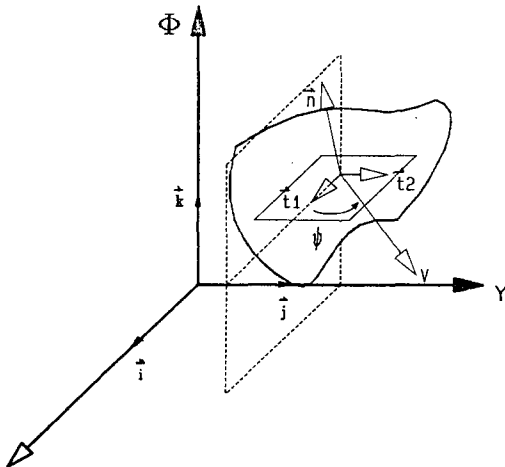


그림 2. Tangent Plane과 좌표

표면상의 한점에 대하여 유일한 값을 갖지만,  $t_1, t_2$ 는 Tangent Plane상에서 서로 교차하는 임의의 벡터이기 때문에 다음과 같이  $t_1$ 을 정의하였다. 즉, 수직벡터  $n$ 과 Tangent Plane의 한 벡터성분  $t_1$ 이 만든 평면이 항상  $i, k$ 가 이루는 평면과 평행하도록하여 이를 수학적으로 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$n = \frac{-\Phi_x \vec{i} - \Phi_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \quad (5)$$

$$t_1 = \frac{\vec{i} + \Phi_x \vec{k}}{\sqrt{1 + \Phi_x^2}} \quad (6)$$

$$t_2 = \frac{\Phi_x \Phi_y \vec{i} - (1 + \Phi_x^2) \vec{j} - \Phi_y \vec{k}}{\sqrt{1 + \Phi_x^2} \sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \quad (7)$$

### 4. 간접방법

제 2 절의 직접방법에서 비행체가 일정한 속도로 날을 경우 최적경로는 여러 방향각에 대해 구하였음에도 불구하고 하나의 자유도를 갖는 변수로 나타나지 않았다. 본 간접 방식에서는 방향각  $\psi$ 을 자유도를 갖는 제어변수로 삽입하였다. 즉, 매 위치에서 방향각을 적절히 선택하여 발사점에서 목표점까지 잇는 궤적을 찾는 문제로 바꿀 수 있다. Tangent Plane의 크기를 아주 미소하게 잡으면 거리 성분은 다음의 1차 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_t = V \cos \psi \quad (8)$$

$$\dot{y}_t = V \sin \psi \quad (9)$$

여기서, 첨자  $t$ 는 거리 성분이 Tangent Plane에서 측정함을 의미한다. 상수  $V$ 는 동적계획법의 grid 간격과 유사한 성격을 갖는데 그 값이 크면 거친 search를 행하여 최적이 아닌 경로를 선택할 가능성이 크고, 너무 작으면 계산시간이 길어지고 비행 불가능한 경로를 산출할 가능성이 있으므로 본 논문에서는 비행체의 순항속도를  $V$  값으로 고려하였다.

주어진 조건인 출발점과 목표점은  $ijk$  좌표상의 값이고 위의 식들은 Tangent Plane 상에서 유도된 식이기 때문에 두 좌표 간의 변환을 통하여  $ijk$  좌표상의 속도성분으로 바꾸었다.

$$\dot{x} = V \left( \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 + \Phi_x^2}} + \frac{\Phi_x \Phi_y \sin \psi}{\sqrt{1 + \Phi_x^2} \sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \right) \quad (10)$$

$$\dot{y} = -V \frac{\sqrt{1 + \Phi_x^2} \sin \psi}{\sqrt{1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2}} \quad (11)$$

$$\Phi = f(x, y) \quad (12)$$

위의 미분방정식은 경계조건

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (13)$$

$$x(t_f) = x_f, \quad y(t_f) = y_f \quad (14)$$

을 만족하여야 하는데,  $(x_0, y_0)$ 는 출발점,  $(x_f, y_f)$ 는 목표점을 나타낸다.

### 5. 최적경로의 산출

앞절에서 방향각은 임의의 값을 갖을 수 있으므로 주어진 경계조건을 만족하는 비행궤적은 무수히 많다. 따라서 위험을 최소화하기 위해 식(4)를 성능함수로 고려하면 이 문제는 다음과 같이 정리될 최적제어문제가 된다: 즉, 경계조건 (13)(14)와 미분식 (10)(11)를 만족하며 성능함수 (4)를 최소화하는 방향각의 궤적을 찾는 문제로 전환된다.

최적제어이론을 적용하기 위해 costate  $\lambda_x, \lambda_y$ 를 도입한 Hamiltonian은

$$H = \Phi + V\lambda_x \left( \frac{\cos \psi}{\sqrt{1+\Phi_x^2}} + \frac{\Phi_x \Phi_y \sin \psi}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}} \right) - V\lambda_x \frac{\sqrt{1+\Phi_x^2} \sin \psi}{\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}} \quad (15)$$

로 표현되고, Euler-Lagrange 방정식은

$$\dot{\lambda}_x = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (16)$$

$$\dot{\lambda}_y = - \frac{\partial H}{\partial y} \quad (17)$$

으로부터 유도할 수 있으며, 최적조건으로부터

$$\tan \psi = \frac{\lambda_x \Phi_x \Phi_y - \lambda_y (1+\Phi_x^2)}{\lambda_x \sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}} \quad (18)$$

을 얻을 수 있다.

미분방정식 (10)(11)(16)(17)은 costate  $\lambda_x, \lambda_y$ 의 초기조건이 주어지면 쉽게 풀 수 있는 비선형 2점경계문제이다. Hamiltonian (15)가 시간에 대한 explicit 함수가 아니고 또 최종시간에 대한 조건이 없기 때문에 Hamiltonian은 항상 zero로 일정하다. 즉,

$$H(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (19)$$

위의 조건 (18)과 (19)를 이용하여 costate  $\lambda_x, \lambda_y$ 를 직접 구한 뒤 그 중 하나를 시간에 대한 미분을 취하고 이를 해당하는 미분식 (16)이나 (17)에 대입하여 방향각의 미분형을 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\dot{\psi} = \frac{(A_1 \cos \psi + A_2 \sin \psi) V}{A_3} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_1 &= (\Phi - 1 - \Phi_x^2) \Phi_y \\ A_2 &= (\Phi_x \Phi_{xx} - (1 + \Phi_x^2)) \Phi_x \Phi_y^2 - \Phi (1 + \Phi_x^2) \Phi_{xy} \Phi_y \\ &\quad - (1 + \Phi_x^2)^2 \Phi_x \\ A_3 &= (1 + \Phi_x^2)^{1.5} (1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2) \end{aligned}$$

이제 최적경로는 미분방정식 (10)(11)(20)을 초기 출발점에서 부터 최종 목표점까지 적분함으로써 구할 수 있다. 그러나, 목표점에 정확하게 도달시킬 초기 방향각은 미지수이기 때문에 (11)을  $x_f$  까지 적분하고 이때  $y_f - y(t_f)$ 의 차를 비교하여 이 값이 영으로 수렴할 때 까지 Bisection 방식을 사용하여 방향각을 보정하였다. 처음에 시도하는 초기 방향각은 출발점과 목표점을 잇는 직선이 이루는 각을 선택하도록 하는 것이 빨리 수렴함을 모의실험에서 확인하였다.

위 문제는 위험함수를 제한경계조건으로 가상함으로서 다음 결과 같이 풀 수도 있다.

### 6. 제한경계조건을 이용한 최적경로

그림3. 과 같이  $x$ 를 방향각으로 하는 좌표를 정하면 거리 성분은

$$x = V \cos \alpha \quad (21)$$

$$y = V \sin \alpha \quad (22)$$

로 나타낼 수 있고, 위험 함수  $\Phi$ 는 상태변수  $x, y$ 의 제한경계조건으로 간주할 수 있다.

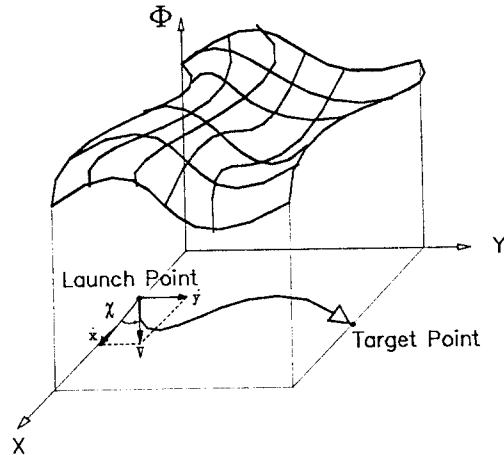


그림 3. 위험 Potential 함수와 평면 좌표

Bryson[4]이 제시한 등호조건을 갖는 최적제어문제의 극한해의 충분조건을 이용하기 위해 위험 함수를 시간에 대한 1차 미분을 취하면

$$\dot{\Phi} = (\Phi_x \cos \chi + \Phi_y \sin \chi) V \quad (23)$$

으로 제어변수  $\chi$ 를 포함하고 있으므로 1차 상태변수 등호제한 문제이다. 이는 위험함수  $\Phi = 0$ 를 초기에 경계조건으로하고 식(23)을 접선조건으로하는 기하학적 성격을 나타낸다.

Hamiltonian 은

$$H = \Phi + V\lambda_x \cos \chi + V\lambda_y \sin \chi + \mu(\Phi_x \cos \chi + \Phi_y \sin \chi) V \quad (24)$$

로 costate  $\mu$ 가 식 (15)보다 더 첨가된 꼴이다. 앞 절에서는 최적조건과  $H = 0$ 을 이용하여 해석적으로 costate를 구할 수 있었으나 여기서는 미지수가 증가되어 앞에서 다른 방식과 똑 같은 방식으로 구할 수 없고 두점경계문제에 사용되는 수치해석적 방법에 의존하여야한다.

이와 같은 차이점은 앞 절에서는 Tangent Plane을 도입함으로써 상태공간의 차원을 3차원에서 2차원으로 줄여 준 경우에 해당하고 본 절에서는 제한조건을 explicit 하게 포함시킴으로서 발생한다. 이는 본 절에서 구한 제한조건에 해당하는 costate  $\mu$ 가  $\lambda_x, \lambda_y$ 의 선형 조합으로 다음과 같이 표시할 수 있음에서도 알 수 있다 [5].

$$\mu = \frac{\lambda_x \sin \chi - \lambda_y \cos \chi}{-\Phi_x \sin \chi + \Phi_y \cos \chi} \quad (25)$$

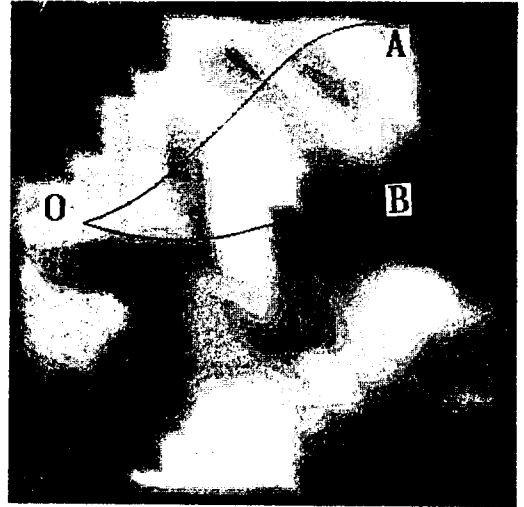
## 7. 시뮬레이션 및 고찰

구한 알고리즘이 타당한 해를 산출하는가를 알아보기 위해 먼저 임의의 위험 Potential 함수를 생성하였다. 앞에서 식들을 유도하는 과정에서 알 수 있듯이 위험 Potential 함수는 2번 편미분 가능한 것으로 가정하였다. 그러나 실제 함수는 대부분 2차원 행렬로 주어지기 때문에 이를 Cubic Spline에 의해 내삽하였다. 그림4. 는 한번이 20Km 인 작전지역으로 밝게 보이는 지역이 어둡게 보이는 지역에 비해 상대적으로 덜 위험함을 나타낸다. 발사지점 A와 두 목표지점이 각각 B, C 로 주어진 경우 최적해는 위험분포의 경상을 피해 능선으로 귀적을 산출함을 알 수 있다.

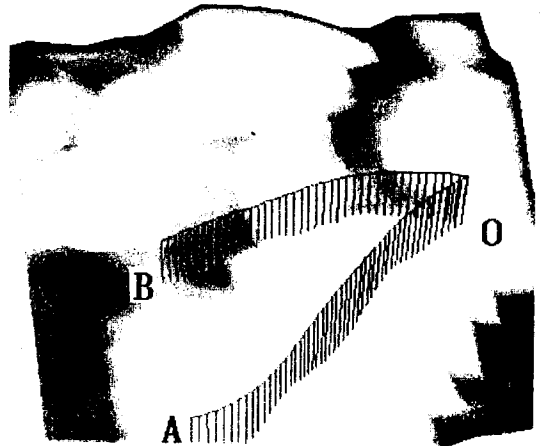
## 8. 결론

본 논문에서는 군사작전 지역내에서의 위치에 따른 위험확률이 주어진 경우 비행임무를 성공리에 수행키위한 최적경로 산출에 관해 다루었다. 광범위한 지역에서 단시간에 유연한 안전 비행경로를 찾기위한 새로운 개념으로 최적 제어이론을 이용한 방법을 제시하였다.

여기서 제시한 방법은 일반적인 2차원 최적화 문제에 쉽게 적용가능하고 특히 지형을 이용한 비행경로 산정이나 항성 표면을 탐사할 이동용 로봇의 경로산정과 같은 실시



(a) 경로의 overhead view



(b) 경로의 perspective view

그림 4. 경로 산정 예

간 문제에도 적용 가능하리라 생각된다.

실제 비행시 고려되어야 할 연료소모량, 회전반경의 제한, 가속도의 제한과 같은 고차원 항을 포함하는 상세한 경로를 설계하여야할 경우 여기서 언급한 방법으로 얻은 경로를 nominal path로 하여 더욱 실제적 경로를 얻을 수 있을 것으로 본다.

## 9. 참고문헌

1. A. Hanley, "Automated Mission Planning: A Striking Capability," Aerospace America, AIAA, March 1992, pp.34-39.
2. Stephen J. Andriole, ed., Artificial Intelligence and National Defense: Applications to C<sup>3</sup>I and Beyond, AFCEA International Press, Washington D.C., 1987, pp.143-153.
3. E. Kim, "Optimal Helicopter Trajectory Planning for Terrain Following Flight," PhD Dissertation, G.I.T., Atlanta, GA, 1991.
4. A. E. Bryson Jr., Y. Ho, Applied Optimal Control, A Halsted Press, New York, 1975, pp.99-101.
5. J. L. Speyer, and A. E. Bryson, Jr., "Optimal Programming Problems with Bounded State Space," Journal of AIAA, Vol.6, No.8, Aug. 1968, pp.1488-1491.