

H_{∞} 기법에 의한 발사체의 견실한 제어기 설계

이 군석^a, 권 오규
인하대학교 공과대학 전기공학과

Robust Controller Design by H_{∞} Method for a Launch Vehicle

K.S. Lee and O.K. Kwon
Dept. of Electrical Engineering, Inha University

Abstract

In this paper, discrete-time H_{∞} controller design in δ -domain using Normalized Coprime Factor plant description is proposed and the loop-shaping method developed by McFarlane[2], which is known to be very simple and systematic method, is adopted here in H_{∞} controller design. In particular, we show that δ - H_{∞} controller proposed here is a unified form for the continuous and discrete-time cases.

1. 서론

H_{∞} 기법은 1980년대 초반(Zames, [4])에 개발된 이래 비구조화된 모델 불확실성에 대한 안정도 견실성을 해석적인 방법으로 접근할 수 있음으로 해서 많은 연구가 진행되어왔다. 초기에 제시된 H_{∞} 제어기설계는 주로 주파수 영역에서 문제를 풀어왔으나, 최근에는 상태공간 모델에서의 제어기 설계기법들이 제시되고 있다[9]. 하지만 대부분의 기법들이 일반적인 플랜트에 적용되기 위해서는 플랜트를 재구성[15]해야 하는 어려움이 있고, 안정도 여유(또는 안정시킬 수 있는 최대 모델 불확실성)는 반복적인 방법(γ -iteration)으로 구해왔다. 후자의 경우는 혼합된 감도함수 문제[16,17]와 4-불력 문제[3,14]를 푸는 방법에 의해 개선할 수가 있는데, 특히 4-불력 문제는 1-불력 또는 2-불력 문제에서와는 달리 항상 Continuity와 Well-Posedness 특성을 보장하게 되고[14] 모델 정합(Model-Matching) 문제나 혼합된 감도함수 문제등에서 나타나는 무한영점을 포함하는 허수축 영점과 허수축 극점에 의한 설계상의 제약이 없다[14,17]. 일반적인 플랜트의 전달함수 행렬이 진분수(strictly proper)임을 고려할 때, 허수축 영점은 실제 H_{∞} 제어기설계상의 문제가 되고 따라서 4-불력 문제는 매우 유용함을 알 수 있다. 그러나 4-불력 문제로 제어기를 설계할 때에는 적당한 주파수역을 갖는 4개의 다른 가중함수를 선정해야 하는 어려움이 있고 1-불력, 2-불력 문제보다 계산부담이 크게 된다[14].

이 논문에서는 정규 소인수 분해 모델에 대해 소인수 분해 모델 불확실성을 생각함으로써 4-불력 H_{∞} 최적화 문제를 푼다. 비구조화된 모델 불확실성에 대한 기존의 고려방법, 즉 곱셈형과 덧셈형 모델 불확실성에 비해 소인수 분해 모델 불확실성의 유용성은 그동안 많이 논의되어져 왔다[3,6,18]. 특히 McFarlane와 Glover[5,6]는 소인수 분해 모델이 정규화 됐을 때 1-불력 Nehari 확장(Extension) 문제로 단순화됨을 보였다.

또한 이런 모델에 대해 개루프 제어기 설계방식을 제시함으로써 4개의 다른 주파수 가중함수를 선택해야하는 문제를 대신하고 견실성과 원하는 성능을 만족하는 보다 체계적인 제어기 설계를 가능하게 했다. 이 경우 플랜트의 비최소 위상영점이나 불안정 극점에 상관없이 루프의 회복정도는 단지 안정도 여유에 관계하게 된다. 이런 점에서 볼 때 이방식은 체계적이면서도 견실한 설계방법이라고 할 수 있다.

이 논문에서는 위에서처럼 McFarlane와 Glover가 제시한 H_{∞} 설계기법에 대해 수치적 오차가 적다고 알려진 δ -변환을 이용해 연속형과 이산형의 통합형 제어기를 유도한다. 이 제어기는 연속형과 이산형 시스템에 대해 따로 제시되고 있는 결과들을 통합하는 것이라는 점에서 의의를 갖는다.

이 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 2장에서 제어기 설계에 필요한 수학적 배경과 용어 그리고 정리들을 살펴본다. 그리고 3장에서는 정규화된 소인수 분해모델에 대해 δ -영역에서의 이산형 H_{∞} 제어기를 설계하고 샘플링 시간을 0으로 했을 때 바로 연속형에서의 제어기가 됨을 보인다. 4장에서는 발사체의 선형화된 모델에 대해 3장에서 유도한 알고리즘을 이용해 발사체에 대한 제어기를 설계한다. 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

2. 수학적 배경 및 용어

가. δ -변환

우선 다음과 같은 상태공간 모델을 생각한다.

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = C_c x(t)$$

여기서 A_c 는 $n \times n$, B_c 는 $n \times m$, C_c 는 $p \times n$ 행렬들이다. (2.1)의 모델은 다음과 같은 δ -연산자에 의한 이산화 모델로 바꿀 수 있다.

$$\delta x(k) = A x(k) + B u(k) \quad (2.2)$$

$$y(k) = C x(k)$$

여기서 $\delta = \frac{q-1}{\Delta}$ 이고, q 는 전향이동연산자, Δ 는 샘플링 시간이다. 그리고 각 행렬들은 다음과 같다.

$$A = \Omega A_c \quad (2.3)$$

$$B = \Omega B_c \quad (2.4)$$

$$C = C_c \quad (2.5)$$

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \exp(A_c \tau) d\tau \quad (2.6)$$

이때 (2.1), (2.2)에 대해 복소평면에서 Laplace 변환변수 s 와 δ -변환변수 γ 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\frac{\Delta}{2} |\gamma|^2 + \text{Re}(\gamma) < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Re}(s) < 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\Delta}{2} |\gamma|^2 + \text{Re}(\gamma) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Re}(s) = 0 \quad (2.8)$$

특히 δ -변환은 이동연산자 모델에 대한 Z-변환과는 달리 새로운 불안정 영점을 만들지 않는 특징을 가진다[19].

나. δ -영역에서의 정의와 용어

RL_{∞} 은 안정 경계 즉 $\gamma = (\exp(j\omega\Delta) - 1)/\Delta$ 을 제외한 전 복소영역에서 해석적이고 노름, $\|\cdot\|_{\infty}$, 이 유한한 proper 실유리함수들로 이루어진 집합이다. 그리고 RH_{∞} 는 RL_{∞} 의 부분공간으로 안정 경계의부에서 해석적인 실유리함수들의 집합으로 정의된다. RH_{∞} 는 RL_{∞} 내에서 RH_{∞} 의 직교여집합으로 정의된다. 이때 H_{∞}/L_{∞} 노름은 다음과 같이 정의된다.

$$\|G(\gamma)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[(\exp(j\omega\Delta)-1)/\Delta] \quad (2.9)$$

$G(\gamma) = C(\gamma I - A)^{-1}B + D$ 에 대한 상태공간모델은 다음과 같이 표현하기로 한다.

$$G(\gamma) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$G(\gamma)$ 의 공역복소 시스템 $G(\gamma)^*$ 은 A , $(I + \Delta A)$ 의 역행렬이 존재한다는 가정하에 다음과 같은 상태공간모델로 표현된다.

$$G(\gamma)^* = \begin{bmatrix} -A^T \hat{\lambda} & \hat{\lambda}^T C^T \\ -B^T \hat{\lambda}^T & D^T - B^T \hat{\lambda}^T C^T \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

여기서 $\hat{\lambda} = (I + \Delta A)^{-1}$ 이다. 그리고 상태변환 T 에 대해 다음과 같이 된다.

$$G(\gamma) = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

하한선형분해변환(Lower Linear Fractional Transformation, LLFT)은 다음과 같이 정의 된다.

$$FL \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Phi \right) := P_{11} + P_{12}\Phi(I - P_{22}\Phi)^{-1}P_{21} \quad (2.13)$$

만약 $G(\gamma)$ 가 안정하고 (2.10)의 상태공간모델을 가지면 가제어, 가관측 gramian은 다음의 통합형 Lyapunov 식들을 만족하게 된다.

$$AP + PAT + BBT + \Delta APAT = 0 \quad (2.14)$$

$$A^TQ + QA + C^TC + \Delta A^TQA = 0 \quad (2.15)$$

δ -영역에서의 FARE(Filter Algebraic Riccati Equation) 와 CARE(Control Algebraic Riccati Equation)은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$AZ + ZAT + BBT + \Delta AZAT - H(I + \Delta CZCT)HT = 0 \quad (2.16)$$

$$H = -\hat{\lambda}^{-1}ZCT(I + \Delta CZCT)^{-1}$$

$$A^TX + XA + C^TC + \Delta A^TXA - L^T(I + \Delta B^TXB)L = 0 \quad (2.17)$$

$$L = -(I + \Delta B^TXB)^{-1}B^TXA^{-1}$$

보조정리 2.1 $G(\gamma) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 에 대해 다음을 만족하는 $P = P^T$ 가 존재하면 $GG^* = I$ 이다.

$$(1) AP + PAT + BBT + \Delta APAT = 0 \quad (2.18)$$

$$(2) DBT + CP + \Delta CPA^T = 0 \quad (2.19)$$

$$(3) DDT + \Delta CPC^T = I \quad (2.20)$$

증명 : 식 (2.11) 를 이용하면 GG^* 는

$$GG^* = \begin{bmatrix} A & -BBT + \Delta BB^T \hat{\lambda}^T A^T & BD^T - \Delta BB^T \hat{\lambda}^T C^T \\ 0 & -A^T + \Delta A^T \hat{\lambda}^T A^T & C^T - \Delta A^T \hat{\lambda}^T C^T \\ C & -DBT + \Delta DB^T \hat{\lambda}^T A^T & DDT - \Delta DB^T \hat{\lambda}^T C^T \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

(2.21)에서 유사변환 $\begin{bmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 을 이용하면 쉽게 증명된다. □ □ □

이제 보조정리 2.1 의 결과를 이용하여 $G(\gamma)$ 에 대한 NLCF (Normalized Left Coprime Factorization)를 구성하는 $[N \ M]$ 의 상태공간모델을 구할수 있다.

정리 2.1 $G(\gamma) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 와 가역행렬 Y 에 대해

$$[N \ M] = \begin{bmatrix} A + HC & B & H \\ YC & 0 & Y \end{bmatrix}, \quad N, M \in RH_{\infty} \text{ 이고}$$

$$G(\gamma) = N^{-1}N \quad (2.22)$$

이라 할때 다음을 만족하면, $[N \ M]$ 은 $G(\gamma)$ 의 NLCF 요소들이다. 즉,

$$NN^* + MM^* = I \quad (2.23)$$

$$(1) YTY = (I + \Delta CZCT)^{-1} \quad (2.24)$$

$$(2) H = -\hat{\lambda}^{-1}ZCT(I + \Delta CZCT)^{-1} \quad (2.25)$$

(3) $Z = Z^T$ 는 다음 FARE 를 만족한다.

$$AZ + ZAT + BBT + \Delta AZAT - H(I + \Delta CZCT)HT = 0 \quad (2.26)$$

증명 : Y 가 가역행렬임을 이용하면 보조정리 2.1 로부터 쉽게 증명된다.

정리 2.1 은 $G(\gamma)$ 의 FARE에 대한 안정화시키는 해가 존재하면 $G(\gamma) = N^{-1}N$ 이 되는 정규화된 $[N \ M]$ 을 얻을 수 있음을 보여준다. $(A + HC)$ 가 안정하게 되는 유일한 FARE 의 해 Z 가 존재하기 위한 필요충분 조건은 (C, A) 가 검출가능하면 된다. 이것은 $[N \ M] \in RH_{\infty}$ 이 $G(\gamma)$ 의 NLCF 요소가 되는 Z 가 존재하기 위한 필요충분조건을 말해준다([19], Theorem 10.7.1).

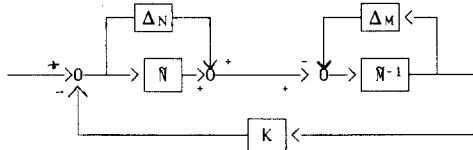
3. Loop-Shaping 방법에 의한 δ -H_∞ 제어기 설계

앞절에서 δ -영역에서의 NLCF 모델에 대한 H_∞ 최적화 문제를 풀기 위한 용어와 몇가지 간단한 결과들을 살펴보았다. 이절에서는 [20]에서 유도한 δ -영역에서의 Nehari 문제에 대한 해를 이용해 간단히 연속형과 이산형의 통합형 H_∞ 제어기를 설계한다.

일반적으로 다변수 피드백 설계에서 성능과 견실안정성은 주로 특정 전달함수의 특이치를 이용해 해석한다. 더우기 페루프에서의 특이치 특성은 개루프 전달함수의 특이치 특성에 의해 근사적으로 해석할수 있고 이것은 개루프상에서의 제어기 설계, 즉 Loop-Shaping 설계방법을 가능하게 한다[12]. 특히 개루프 설계방식은 설계자의 관점에서 체계적으로 설계할수 있을뿐만 아니라 페루프 설계방식에서 나타날수 있는 제어기와 플랜트사이의 극점-영점 소거를 방지할수 있다[7]. 개루프 설계방식중에 최근 많이 응용되고 있는 LQG/LTR 방법이 있는데, 여기서는 페루프를 안정화시키는 LQG 문제로 원하는 루프형상을 만든 다음 LTR 을 하게 되는데 이때 제어기의 견실성은 LQG의 특성을 가지게 된다. 그런데 이때의 성능과 견실 안정성은 설계방식에 따라 플랜트의 입력측 혹은 출력측에 대해서만 만족하게 된다. 더우기 LQG/LTR 방법은 플랜트가 비최소 위상인 경우 만족할만한 LTR 이 이루어지지 않는다는 단점을 가지고 있다.

H_∞ 최적화문제는 사실 건설 안정성의 문제이기 때문에 원하는 주파수에서의 성능 또한 만족하는 제어를 설계하기 위해서는 주파수 가중함수가 포함된 일반적인 플랜트를 설정해야 한다. 하지만 NLCF 모델 불확실성에 대한 H_∞ 최적화 문제와 같은 4-블럭 문제에서 4개의 다른 주파수 가중함수를 선택한다는 것은 또 하나의 어려운 문제가 된다. McFarlane 과 Glover 는 CF 모델을 정규화할 때 4-블럭 문제에 대한 개루프 설계 방식을 제시함으로써 이런 어려움을 해결하고 또한 두정의 회복정도는 비최소 영점이나 불안정 극점에 상관없이 단지 안정도 여유에 관계됨을 보였다[2]. 더우기 4-블럭 문제의 해는 플랜트의 입력 혹은 출력측 모두에서 성능과 건설 안정성을 보장한다.

가. NLCF 모델에 대한 H_∞ 준최적화 문제의 해



$\epsilon = \|\Delta_N, -\Delta_M\|_\infty, \epsilon < \epsilon_{max}$
그림 3.1 NLCF 모델표현과 CF 모델불확실성

다음 정리는 그림 3.1 과 같은 LCF 모델을 정규화시켰을 때 4-블럭 H_∞ 최적화 문제는 1-블럭 Nehari 확장 문제를 푸는 문제로 간략화되는 것을 보여준다.

정리 3.1 [5,6] $\epsilon < \epsilon_{max}$ 일때 NLCF 모델에 대해 다음은 등가이다.

(1) (G, K) 가 내부안정이고 다음을 만족한다.

$$\left\| \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} (I-GK)^{-1} \begin{pmatrix} G & I \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \epsilon^{-1} \quad (3.1)$$

(2) $U, V \in RH_\infty$ 에 대해 $K = UV^{-1}$ 이고 다음을 만족한다.

$$\left\| \begin{pmatrix} -N^* \\ N^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq (1-\alpha^2)^{1/2} \quad (3.2)$$

여기서 $\alpha = \epsilon^{-1}$ 이다.

Loop-Shaping 방법에 의해 δ - H_∞ 제어를 설계하기 전에 (3.2)를 풀기위해 [21]에서 유도된 δ -영역에서의 Nehari 문제의 해를 살펴본다.

정리 3.2 식(3.3) 를 만족하는 $G(\gamma) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $G \in RH_\infty$
 $\inf \|G + X\|_\infty < \alpha$ (3.3)

를 생각하자. (3.4)를 만족하는 X 는 되먹임 이득 $K \in RH_\infty$, $\|K\|_\infty \leq \alpha^{-1}$, 에 대해 다음 $Q(\gamma)$ 의 LLFT 로 주어진다.

$$\|G + X\|_\infty \leq \alpha \quad (3.4)$$

$$X(\gamma) = F_L(Q(\gamma), K(\gamma)), X \in RH_\infty \quad (3.5)$$

$$Q(\gamma) = \begin{pmatrix} (-A^T - B_1 B^T) \hat{A}^T & B_1 & RT^{-1} \hat{A}^T C^T D_{12} \\ -CP - D_{11} B^T \hat{A}^T & D_{11} - D & D_{12} \\ -D_{21} B^T \hat{A}^T & D_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

여기서 $B_1 = RT^{-1}(\hat{A}^T C^T D_{11} + QB)$.

$R = PQ - \alpha^2 I$, P, Q 는 각각 $G(\gamma)$ 에 대한 가제어, 가관측 Gramian 들이다. 그리고 D_{11}, D_{12}, D_{21} 는 다음을 만족한다:

$$D_{11} = -\Delta \alpha^2 (I + \Delta \hat{C} \hat{A} R^{-1} P \hat{A}^T C^T)^{-1} \hat{C} \hat{A} R^{-1} B \quad (3.7)$$

$$D_{12} \hat{A}^T (I + \Delta \hat{C} \hat{A} R^{-1} P \hat{A}^T C^T) D_{12} = \alpha^2 I \quad (3.8)$$

$$D_{21}^T D_{21} = -\Delta \alpha^2 \hat{B}^T R^{-1} \hat{A}^T C^T D_{11} - \alpha^2 (\Delta B^T Q R^{-1} B - I). \quad (3.9)$$

이제 식 (3.2) 을 풀기위해 정리 2.1 과 식 (2.11)을 이용하여 $[-N^* \ N^*]^*$ 의 상태공간모델을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -N^* \\ N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(A + HC)^T \hat{A}_h^T & \hat{A}_h^T C^T Y^T \\ B^T \hat{A}_h^T & \Delta B^T \hat{A}_h^T C^T Y^T \\ -HT \hat{A}_h^T & Y^T - \Delta HT \hat{A}_h^T C^T Y^T \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

여기서 $\hat{A}_h^T = [I + \Delta(A + HC)T]^{-1}$ 이다.

정리 (3.2)를 이용하면 식(3.10)의 Nehari 확장은 LLFT 의 되먹임 이득 $\Phi = 0$ 으로 하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + HC - RT^{-1} \Sigma Y C & RT^{-1} \Sigma \\ B^T \hat{A}_h^T P + \Delta \beta^2 \Omega_b Y C & -\Delta \beta^2 \Omega_b - \Delta B^T \hat{A}_h^T C^T Y^T \\ -HT \hat{A}_h^T P + \Delta \beta^2 \Omega_b Y C & -Y^T + \Delta (\beta^2 \Omega_h + HT \hat{A}_h^T C^T Y^T) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

여기서 $\beta = (1-\alpha^2)^{1/2}$

$$\Omega_b = -B^T R^{-1} C^T Y^T (I + \Delta Y C Q R^{-1} C^T Y^T)^{-1}$$

$$\Omega_h = H^T R^{-1} C^T Y^T (I + \Delta Y C Q R^{-1} C^T Y^T)^{-1}$$

$$\Sigma = -\Delta \beta^2 (B B^T \Omega_b - H^T \Omega_h) + Q \hat{A}_h^T C^T Y^T$$
 이고

P, Q 는 각각 $[-N^* \ N^*]^*$ 의 가제어, 가관측 Gramian 을 나타내는 데 이때 P, Q 와 각각 $G(\gamma)$ 의 FARE, CARE 의 해인 Z, X 는 다음과 같은 관계를 가짐을 알 수 있다.

보조정리 3.1 (1) $P = -X(I+ZX)^{-1}$ (3.12)

(2) $Q = -Z$ (3.13)

증명 : (2)항은 $[-N^* \ N^*]^*$ 의 Q-Lyapunov 식과 $G(\gamma)$ 의 FARE 을 비교하면 쉽게 알 수 있다. (1)항은 P-Lyapunov 식과 $G(\gamma)$ 에 대한 CARE 의 Hamiltonian Matrix Penciles 사이의 유사변

환 $\begin{pmatrix} I & Z \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 를 이용해 쉽게 증명된다. □ □ □

정리 3.1로부터 제어기 $K = UV^{-1}$ 는 그림 3.2의 단위 되먹임 시스템으로 재구성될수 있는데 이렇게 하면 n 차의 제어기 K 가 얻어진다.

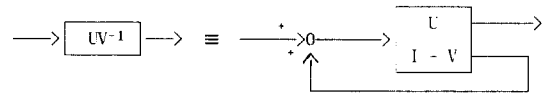


그림 3.2 CF 모델의 피드백 구성

정리 3.3 NLCF 모델불확실성에 대해 안정도 여유가 ϵ 인 준 최적 Central 제어기 K 는 다음과 같다.

$$K = \begin{pmatrix} K_a & K_b \\ K_c & K_d \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

여기서

$$K_a = A + HC - RT^{-1} \Sigma (YC - D_2^{-1} HT \hat{A}_h^T P + \Delta \beta^2 D_2^{-1} \Omega_b Y C)$$

$$K_b = RT^{-1} \Sigma D_2^{-1}$$

$$K_c = B^T \hat{A}_h^T P + D_{12} D_2^{-1} + \Delta \beta^2 \Omega_b + D_{12} D_2^{-1} (HT \hat{A}_h^T P - \Delta \beta^2 \Omega_b Y C)$$

$$K_d = D_{12} D_2^{-1}$$

$$D_1 = -\Delta (\beta^2 \Omega_b + B^T \hat{A}_h^T C^T Y^T)$$

$$D_2 = -Y^T + \Delta (\beta^2 \Omega_h + HT \hat{A}_h^T C^T Y^T).$$

여기서 샘플링 시간 $\Delta = 0$ 으로 할때 제어기 K 는 [6]에 제시된 연속형 제어기와 같아진다. 이것은 δ -영역에서 H_∞ 최적화문제를 해결함으로써 연속형과 이산형의 통합형 제어기 설계가 가능하다는 것을 뜻한다.

나. Loop-Shaping 설계방법

이제 [2] 에서 제시한 Loop-Shaping 설계과정을 간단히 살펴 보면 다음과 같다.

(1) 먼저 공칭 플랜트의 극점-영점 소거가 없는 전후 보상

기 W_1, W_2 를 선택하여 W_2GW_1 이 원하는 루프형상이 되게 한다.

(2) W_2GW_1 에 대해 (3.14)을 적용하여 안정도 여유가 ϵ 인 되먹임 제어기 K_w 를 설계한다.

(3) 마지막으로 제어기 $K = W_1K_wW_2$ 를 구성한다.

여기서 루프형상 W_2GW_1 에 대해 K_w 에 의한 루프의 회복정도는 공칭 플랜트의 위상에 관계없이 단지 안정도 여유 ϵ 에 비례하게 된다([2], Theorem 5.1, 5.3).

루프형상은 통상 저주파에서의 외란과 고주파에서의 측정잡음에 의한 영향을 제거하도록 설정해야 하고, 특히 교차주파수 근처에서의 안정성을 높이고 시간응답에서의 최대 오버슈트를 고려해 교차주파수 근처에서의 물-오프를 줄이도록 설정해야 한다. 또한 각 방향에 대한 시간응답을 고려해 최대 교차주파수와 최소 교차주파수를 설정해야 하고 특히 모든 방향에 대해 시간응답을 일치시킬 필요가 있을 경우에는 교차주파수에서 특이치를 일치시켜 준다. 그러면 이런 사양을 만족시키는 루프형상을 만들기 위한 가중함수 선택방법을 살펴보자. 일반적으로 W_1 과 W_2 중에 하나는 1로 하고 나머지 하나의 가중함수에 대해서만 고려해도 충분하므로 여기서는 하나의 가중함수를 선택하는 방법을 제시한다.

(1) 먼저 응답시간의 개선을 고려해 공칭플랜트의 대역폭보다 적당하게 넓은 교차주파수 ω_{cmax} 와 ω_{cmin} 를 선택한다.

(2) GW_c 의 교차주파수 ω_{cmax} 와 ω_{cmin} 가 적당한 간격이 되도록 하거나 또는 교차주파수 ω_c 에서 GW_c 의 특이치 선도가 일치되게 하는 상수행렬 W_c 를 정한다.

(3) 각 교차주파수 근처에서의 물-오프를 줄이기 위해 진상 보상기 형태의 W_d 을 결정한다.

(4) 필요에 따라 정상상태 오차를 줄이기 위해 적분기를 추가하고 (3)항에서의 물-오프를 유지하기 위한 영점을 추가하는 W_i 를 결정한다.

(5) 따라서 앞에서 언급한 사양들을 만족하는 가중함수는

$$W = W_iW_dW_c$$

의 형태로 선택할 수 있다.

4. 발사체 적용 모의실험

지금까지 살펴본대로 Loop-Shaping 방식에 의한 H_∞ 제어를 설계는 매우 간단한 방식이면서도 견실함을 알 수 있다. 이제 4단으로 구성된 일본의 실용위성용 M-3H-3 발사체의 3 단계에 대한 견실한 제어를 앞에서 제시된 δ - H_∞ 제어기 알고리즘에 의해 설계한다. 발사체의 운동 방정식과 선형화된 모델은 [21]에 제시되어 있다. 설계될 페루프 전달함수 행렬의 대역폭을 고려해 샘플링 시간을 0.02(sec)로 하면 다음과 같은 δ -이산형 모델이 얻어진다.

$$A = \begin{bmatrix} -2.25e-4 & -1.0 & 1.99e-3 & -5.79e-5 & -5.79e-3 \\ 1.82e-2 & -1.82e-4 & 3.62e-7 & -7.03e-9 & -1.05e-6 \\ 1.82e-4 & 1.0 & 2.41e-9 & -3.51e-11 & -7.03e-9 \\ 0 & 0 & 0 & -5.03e-8 & -5.03e-5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & -5.03e-8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -6.08e-2 & -6.64e-6 \\ 5.895 & -6.05e-10 \\ 5.90e-3 & -2.42e-12 \\ 0 & 17.21 \\ 0 & 0.172 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이때 이산형 플랜트의 영점을 조사하면 Z-영역에서와는 달리 새로운 불안정 영점을 만들지 않은것을 알 수 있다.

제어기 설계사양은 다음과 같다.

(1) 정상상태오차는 0 이다.

(2) 플랜트의 입력력단에 고려되는 외란과 센서잡음에 의한

출력과 제어입력에의 영향을 최소화한다.

(3) 응답시간의 개선을 위해 교차주파수는 15(rad/sec)로 일치시킨다

(4) 최대 오버슈트는 20% 이내로 한다.

위의 사양을 만족시키는 개루프 형상을 만들기 위해 주파수 가중함수는 다음과 같이 선택한다.

$$W_2 = 1$$

$$W_1 = \text{diag} \left\{ \frac{0.083s^2 + 0.333s + 0.25}{s(0.025s + 1)} \right\} W_c$$

여기서 W_c 는 15(rad/sec)에서 특이치를 일치시키기 위한 상수 행렬이다. 이렇게 할때 가중된 모델에 대한 최대 허용가능한 NLCF 모델 불확실성, 즉 안정도 여유는 $\epsilon_{max} = 0.5164$ 가 된다.

$\epsilon = 0.95\epsilon_{max}$ 로 하여 준최적 δ - H_∞ 제어를 설계했을때의 성능함수와 플랜트의 입력쪽에 반영된 외란에 대한 성능함수의 특이치 선도를 각각 그림 4.3 과 4.4에 나타내었다. 그리고 이렇게 설계했을 때의 허용가능한 덧셈형 모델 불확실성과 후 곱셈형 모델 불확실성의 크기를 각각 그림 4.5 와 4.6에 나타내었다. 그림에서 보듯이 δ -영역에서의 특이치 선도는 Z-영역에서와는 달리 샘플링 주파수까지는 연속형과 같은 형상임을 알 수 있고 이것은 δ -영역에서 이산형 제어를 설계할때 좋은 수치적 특성을 가진다는 것을 말해준다.

공칭플랜트에 대한 계단응답과 비선형 모델에 대한 계단응답을 그림 4.7 와 4.8에 각각 나타냈다. 모의실험 결과에서 보면 δ -영역에서 설계된 제어기는 연속형 제어기와 특성이 비슷하고 비선형 플랜트에 대해서도 응답특성이 거의 변하지 않고 견실함을 알 수 있다.

5. 결론

살펴본 바와 같이 NLCF 모델 불확실성을 고려할때 H_∞ 최적화 문제가 쉽게 풀릴뿐만 아니라 간단하면서도 체계적인 Loop-Shaping 설계방식이 가능함을 보였다. 또 δ -영역에서 문제를 해결함으로써 이산형과 연속형의 통합형태인 제어를 구성할 수 있음을 보였다. 그리고 여기서 제시된 통합형 H_∞ 제어를 발사체의 자동조종장치에 적용하는 모의실험을 수행함으로써 이 제어기의 유용성을 확인하였다. 그러나 루프의 회복정도를 말해주는 안정도 여유와 주파수 가중함수 선택과의 관계는 앞으로 계속 연구되어야 할 과제이다.

후기

이 논문은 과거처 특정연구과제인 "위성 발사체 시뮬레이션 연구 (연구책임자, 서울대 노오현 교수)"의 위탁과제인 "과학위성체의 자동조종장치에 관한 연구"의 제 2 차년도 연구결과와 일부이다.

References

- [1] B.A. Frances, A Course of H_∞ Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.88, Springer-Verlag, 1987.
- [2] D. McFarlane, K. Glover, "An H_∞ design procedure using robust stabilization of normalized coprime factors", Proc. 27th CDC, pp. 1343-1348, 1988.

- [3] K. Glover, D. McFarlane, "Robust stabilization of normalized coprime factors: An explicit solution", Proc. '88 ACC, pp. 842-847, 1988.
- [4] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 24, pp. 301-320, 1981.
- [5] K. Glover and D. McFarlane, "Robust stabilization of normalized coprime factor plant description with H_∞ -norm bounded uncertainty", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 34, pp. 821-830, 1989.
- [6] D.C. McFarlane and K. Glover, Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.138, Springer-Verlag, 1990.
- [7] J. M. Maciejowski, Multivariable Feedback Design, Addison Wesley, 1989.
- [8] S.J. Williams and R.A. Hyde, "A comparison of different H_∞ method in VSTOL flight control system design", Proc. 28th CDC, pp. 2508-2513, 1989.
- [9] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Frances, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. Auto. Con., Vol. 34, pp. 831-847, 1989.
- [10] D.G. Meyer and G.F. Franklin, "A connection between normalized coprime factorizations and linear quadratic regulator theory", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol.32, pp. 227-228, 1987.
- [11] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds", Int. J. Cont., Vol.39, pp. 1115-1193, 1984.
- [12] J. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design : Concept for a classical/modern synthesis", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol.26, pp. 4-16, 1981.
- [13] D.J. Walker, "Robust Stabilizability of discrete-time systems with normalized stable factor perturbation", Int. J. Cont., vol.52, pp. 441-155, 1990.
- [14] M.J. Englehart and M.C. Smith, "A four-block problem for H_∞ design : Properties and applications", Automatica, Vol. 27, pp. 811-818, 1991.
- [15] M.G. Safonov, D.J.N. Limebeer and R.Y. Ching, "Simplifying the H_∞ theory via loop-shifting, matrix-pencil and descriptor concepts", Int. J. Cont., Vol. 50, pp. 2467-2488, 1989.
- [16] D.J. Walker, "The discrete-time parametric mixed sensitivity problem", Int. J. Cont., Vol. 55, pp. 225-239, 1992.
- [17] M.G. Safonov, "Imaginary-axis zeros in multivariable H_∞ optimal control", In R.F. Curtain(Ed.), NATO ASI Series, Vol. F34, pp. 71-81, Springer Berlin, 1987.
- [18] M. Vidasagar, Control System Synthesis : A Factorization Approach, MIT Press, 1985.
- [19] R.H. Middleton and G.C. Goodwin, Digital control and Estimation : Unified Approach, Prentice-Hall, 1990.
- [20] K.S. Lee and O.K. Kwon, "Unified approach to continuous and discrete nehari problems", Proc. '92 KACC, 1992.
- [21] 이 명의, 김 승환, 권 오규, " δ -LQG/LTR 보상에 의한 디지털 자동조종장치 설계", 대한전기학회지, Vol. 40, No. 9, pp. 920-928, 1991.

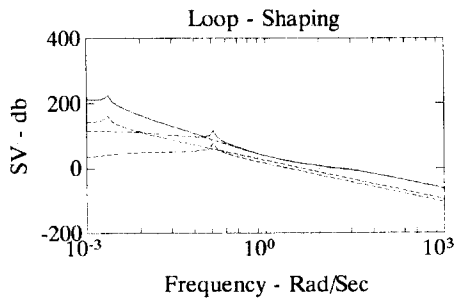


그림 4.1 루프 형성
 — : 루프 형성, ---- : 공칭 플랜트

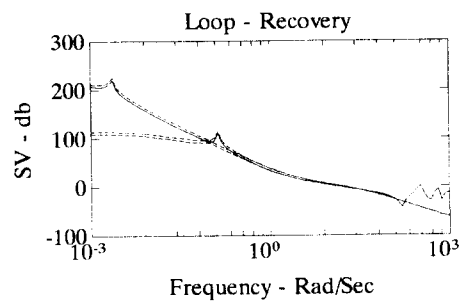


그림 4.2 루프 회복
 — : 루프 회복, ---- : 루프 형성

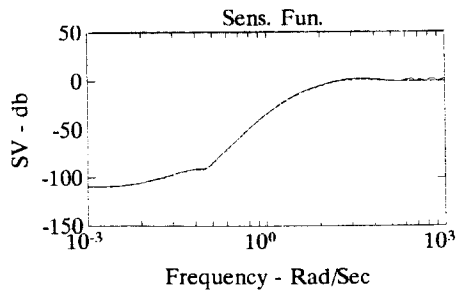


그림 4.3 감도함수
 — : δ -이산형, ---- : 연속형

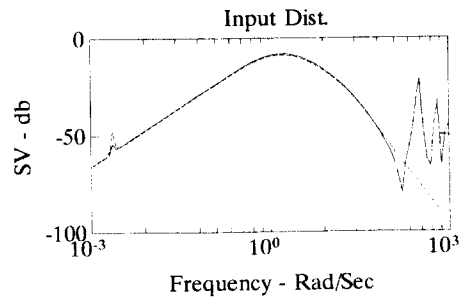


그림 4.4 입력측에 반영된 외란에 대한 감도함수
 — : δ -이산형, ---- : 연속형

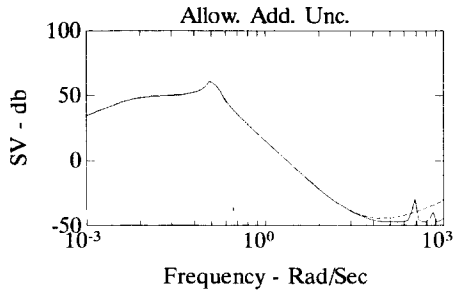


그림 4.5 허용가능한 덧셈형 모델 불확실성의 크기
 — : δ -이산형, ---- : 연속형

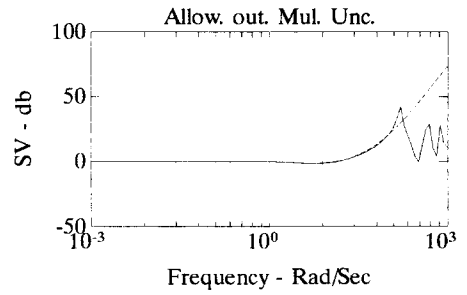


그림 4.6 허용가능한 후곱셈형 모델 불확실성의 크기
 — : δ -이산형, ---- : 연속형

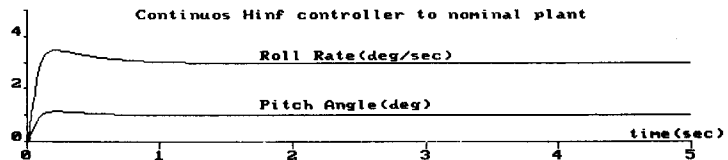
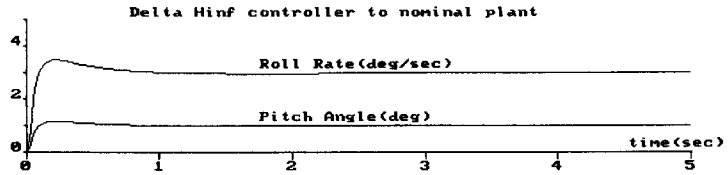


그림 4.7 공칭 모델에 대한 계단응답

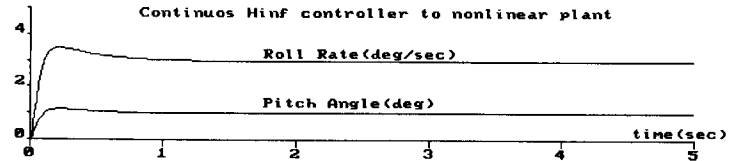
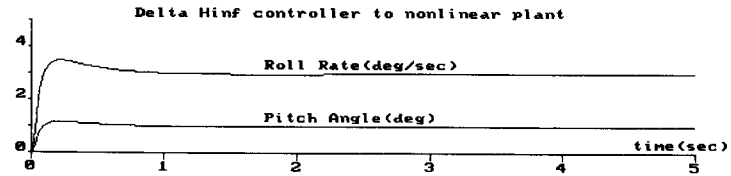


그림 4.8 비선형 모델에 대한 계단응답