

Actuator와 Sensor의 위치 변화에 따른 Beam의 Zero 궤적과 동역학적 해석

이 영 재

건국대학교 항공우주공학과

Zero Locus of a Beam with Varying Actuator and Sensor Locations and Dynamical Analysis

Young Jae Lee,

Dept. of Aerospace Engineering
Kon-Kuk University, Seoul, Korea

Abstract

The non-rational transfer function of a Bernoulli-Euler beam, as an important component of a flexible structure, is analyzed. The true pattern of zeros of that transfer function is investigated as a function of sensor and actuator separation. Translational displacement sensors are used for two cases in which a force input and a moment input are separately applied. When the displacement sensor is located at a certain point, the first pair of zeros on the real axis of the s -plane arrive at the origin and cancel the rigid-body mode. The location of the translational displacement sensors on the beam at which the rigid-body mode of the beam is unobservable is analyzed as the *center of percussion* and is uniquely located for each case. If sensor is moved beyond such a point, a pair of zeros appear on the imaginary axis and move away from the origin along the imaginary axis of the s -plane.

1. 서론

이상화된 유연구조물의 동역학적 운동은 초월 전달 함수 (Transcendental Transfer Function)들의 Pole 과 Zero들로 특징지어진다. 이런 전달 함수의 Pole들은 System의 고유 진동수들과 일치하지만, 함수의 Zero들은 System의 Sensor 와 Actuator의 위치에 의해 결정된다. 보가 유연구조의 기본적인 요소이므로, 이 논문에서는 Sensor 와 Actuator 위치의 함수로써 보의 Zero들의 실제 패턴을 수치적으로 분석하고 동역학적으로 해석한다.

편의상, 입력은 보의 한쪽 끝에 가해졌고, Sensor는 보 위의 임의의 점에 위치하고 있는 특수한 경우에 관하여 주로 다루나 (자세한 것은 참고서적 4 참조), 입력이 보의 임의의 점에 가해지는 일반적인 경우도 검토한다.

2절에서는 두가지의 다른 경우가 고려된다. 첫째로 힘 입력(Force Input)이 보의 한쪽 끝에 가해지고, 병진 변위 Sensor를 사용하여 변위를 측정한다. 둘째로는 모멘트 입력(Moment Input)이 동일한 보의 끝에 가해지고, 동일한 Sensor를 사용한다. 3절에는 두 복소수 함수의 Zero의 이동이 Sensor 위치와의 관계로 설명되고, 보의 충격 중심 (*Center of Percussion*)에 Sensor가 놓였을 때의 강체 모드의 불관측성에 대하여 설명한다. 4절에서 결론을 맺었다.

2. 힘 / 모멘트 입력과 병진 변위에 대한 보의 전달 함수

두가지 경우가 연구된다. 첫째 경우를 위해 힘입력(Force Input)이 보의 끝에 가해지고, 두번째 경우에는 동일한 보의 끝이 모멘트 입력 (Moment Input)을 받는다. 두 경우 모두 병진 변위(Translational Displacement)가 측정된다. 그림 1과 2는 Shear Distorsion 과 Rotary Inertia를 무시한 이상적인 Bernoulli-Euler보에 힘과 모멘트가 각각 입력으로 가해졌을 때의 운동을 보여준다. 아래와 같이 Laplace 변환이 되고 무차원화 된 Bernoulli-Euler보의 운동 방정식은 참고서적 1 과 2에서 찾을 수 있다.

$$\bar{y}''''(x, s) - \lambda^4 \bar{y}(x, s) = 0$$

힘 입력일 경우의 경계 조건은

$$\begin{aligned} \bar{y}''(0, s) &= \bar{y}''(1, s) = 0 \\ \bar{y}'''(0, s) &= \bar{F}(s) \\ \bar{y}'''(1, s) &= 0 \end{aligned}$$

이고, 모멘트 입력이 가해지는 경우는

$$\begin{aligned} \bar{y}''(0, s) &= \bar{M}(s) \\ \bar{y}''(1, s) &= 0 \\ \bar{y}'''(0, s) &= \bar{y}'''(1, s) = 0 \end{aligned}$$

이다.

Sensor 위치 x 에서 제어 입력 $F(s)$ 부터 변위 $y(x, s)$ 까지 전달 함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$G(x, \lambda) = \frac{y(x, s)}{F(s)} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \cdot \left[(\sinh \lambda \cdot \cos \lambda - \cosh \lambda \cdot \sin \lambda) (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) + \sinh \lambda \cdot \sin \lambda (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right] \quad (1)$$

여기서 $\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \lambda \cosh \lambda)$ 이다.

Sensor 위치 x 에서 모멘트 입력 $M(s)$ 에 대한 출력인 변위 $y(x, s)$ 의 초월 전달 함수는 다음과 같다.

$$H(x, \lambda) = \frac{y(x, s)}{M(s)} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[(\cosh \lambda \cdot \sin \lambda - \sinh \lambda \cdot \cos \lambda) (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + \sinh \lambda \cdot \sin \lambda (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) + (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) (\cosh \lambda x - \cos \lambda x) \right] \quad (2)$$

식 (1)과 (2)에서 Sensor가 보의 왼쪽 끝 $x = 0$ 에서 오른쪽 끝 $x = 1$ 까지 이동할 때 전달 함수의 Zero 궤적을 정하기 쉽게 하기 위해서, 전달 함수 (1)과 (2)의 부분들을 각각 다음으로 정의한다.

$$g(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3} \left[(\sinh \lambda \cdot \cos \lambda - \cosh \lambda \cdot \sin \lambda) (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) + \sinh \lambda \cdot \sin \lambda (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right] \quad (3)$$

$$h(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3} \left[(\sinh \lambda \cdot \cos \lambda - \cosh \lambda \cdot \sin \lambda) (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) + \sinh \lambda \cdot \sin \lambda (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right] \quad (4)$$

3. s-평면 상에서 보의 Zero의 궤적과 그 해석

3.1 Zero의 수치적 해석

먼저, λ -평면상에서 $g(x, \lambda)$ 와 $h(x, \lambda)$ 의 Zero를 수치적으로 구한다. 이 λ -평면상에서의 Zero의 패턴으로부터 $\lambda^4 = -s^2$ 의 관계를 이용하여 s -평면 상에서 보의 전달 함수의 Zero의 궤적을 구한다.

보 위에는 한쌍의 Zero가 s -평면의 원점에 도달하면서 강제 모드가 소거되는 점이 유일하게 존재한다. $g(x, \lambda)$ 가 비선형 복소수 함수이기 때문에 Taylor 급수의 도움 없이 Pole-Zero 소거 현상을 해석적으로 나타내기가 불가능하다. x 를 매개변수로 하고 $\lambda = 0$ 에 대한 $g(x, \lambda)$ 의 Taylor 급수는 다음과 같다.

$$g(x, \lambda) = \left(-\frac{4}{3} + 2x \right) + \left(\frac{2}{315} - \frac{2x}{90} + \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{18} + \frac{x^5}{60} \right) \lambda^4 + \left(-\frac{311880}{15120} + \frac{56700}{30240} - \frac{x^2}{7560} + \frac{x^3}{3780} - \frac{x^4}{5400} + \frac{x^5}{181440} \right) \lambda^8 + O(\lambda^{12}) \quad (5)$$

식 (5)로부터 $x = 2/3$ 일 때만 $g(x, \lambda)$ 의 상수항이 "0"이 됨을 쉽게 알 수 있다.

x 가 증가함에 따라서 (즉, Sensor가 오른쪽으로 움직임에 따라서) $g(x, \lambda)$ 의 Zero들은 λ -평면의 실수축과 허수축 모두에서 원점으로부터 멀어지고, s -평면 상에 상응되는 Zero들은 허수축을 따라 원점에서 멀어진다. 동시에, λ -평면의 $p = q, p = -q$ 선 상에 있는 $g(x, \lambda)$ 의 Zero들은 원점으로 접근하고, 이들은 s -평면상에서 실수축을 따라 원점으로 접근하는 보의 Zero들에 해당한다. 제일 앞서서 접근하는 한쌍의 Zero들은 $x = 2/3$ 일 때 두 평면의 원점들에 도달한다. 그 후에 이 Zero들은 s -평면 상의 허수축을 따라 원점으로부터 멀어져간다 (그림 3 참고).

3.2 강제 모드의 불관측성과 충격 중심

$x = 2/3$ 인 점은, 그림 4와 같이 단순화된 보에서 처럼, 가속도의 접선 방향 성분이 "0"인 위치와 일치한다. 힘에 의한 보의 각 가속 도는 $\alpha = FL/2I$ 이므로, 질량중심에서 거리 x_b 만큼 떨어진 곳의 접선방향 가속도는 $a = \alpha x_b$ 이고, a 의 반대방향으로 발생하는 강제 보의 가속도는 $a_{cg} = F/m$ 이다. F 는 보에 가해진 힘, L 은 보의 길이, m 은 보의 질량, I 는 질량중심에 대한 보의 관성 모멘트이다 (균질의 보에 대하여는 $mL^2/12$). 결국 $(FL/2I)x_b - F/m = 0$ 로부터 $x_b = L/6$ 에서 가속도는 "0" 이 되고, $L = 1$ 일 때 왼쪽 끝으로부터의 거리는 $x = x_b + 1/2 = 2/3$ 이다. 이 점은 충격 중심 (Center of Percussion)으로 알려져 있다.³ 이 점에서는 s -평면 원점에서 강제 모드를 나타내는 한쌍의 Pole과, Sensor를 이동함으로써 원점에 도달한 한쌍의 Zero들이 소거되므로, 강제 모드가 없어진다.

강제 보에 대해 모멘트를 가하면 보는 질량중심에 대하여 회전 할것이다. 질량중심이 $x = 1/2$ 이므로, 이 점은 접선방향의 가속도가 없게된다 (그림 5 참고). 그러므로, $h(x, \lambda)$ 의 경우 $x = 1/2$ 일 때, $g(x, \lambda)$ 의 경우 $x = 2/3$ 전 후에 나타났던 것과 같은 현상이 발생한다.

한편, 그림 6과 같이 힘 입력이 보의 임의의 점에 가해졌을 경우 충격 중심은 아래와 같이 표현된다.

$$x_b = \frac{L^2}{12} \cdot \frac{1}{x_a}$$

여기서 x_a 와 x_b 는 그림 6에서와 같다. x_a 와 x_b 가 보 내에 존재하기 위해서는, 그 절댓값 모두가 $L/2$ 보다 작아야 한다는 물리적인 구속조건이 있다. 식 (6)에 이 구속조건을 적용하면, 힘 입력이 보의 중심점으로부터 좌우로 $L/6$ 인 구간내에 가해질 경우에 충격 중심이 보 내에 존재하지 않는다는 사실을 쉽게 알 수가 있다.

4. 결론

유연구조물의 기본적인 요소로 생각될 수있는 Zero의 실제 패턴을 Sensor와 Actuator의 위치를 매개변수로 하여 수치적으로 분석하였고, 동역학적으로 설명하였다. 두가지 경우가 연구되었다. 하나는 힘 입력이 보에 가

해지고, 나머지 경우는 같은 보의 끝에 모멘트 입력을 가한다. 두가지 경우 모두 병진 변위 Sensor들이 이용되었다. Sensor가 오른쪽 끝으로 이동함에 따라서, s -평면 상에 있는 보의 Zero들의 일반적 패턴은 다음처럼 바뀐다. Zero들은 허수축을 따라 원점으로부터 멀어지고 새로운 Zero쌍들이 실수축에 나타나 원점으로 접근한다. Sensor가 보내에서 유일하게 정의되는 충격 중심에 놓였을 경우, 실수축 위의 Zero들의 첫째번째 쌍은 원점에 도달하여 강체 모드를 소개한다. 전달함수의 주요부분의 Taylor 급수 전개로 이 현상을 설명하였다. Sensor를 이 점 이후로 더 움직이면 s -평면의 원점에 도달하였던 한쌍의 Zero는 허수축을 따라 원점에서부터 멀어진다. 또 이 충격 중심이 보 내에서 유일하게 존재한다는 동역학적인 설명³은 s -평면의 실수축에 나타났던 첫째 쌍의 Zero만이 원점에 도달 한다는 점이 말하여준다.

참고서적

1. G. Martin and A. Bryson Jr., "Attitude Control of a Flexible Spacecraft," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 3, No. 1, Jan.-Feb. 1980, pp. 37-41.
2. D.K. Miu, "Poles and Zeros of Control Systems with Mechanical Flexibilities," *Technical Report*, No.90-08, Laboratory for Computation Mechanics, Dept. of Mechanics, Aerospace, and Nuclear Engineering, UCLA, April 1990.
3. D. Greenwood, *Principles of Dynamics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1965, pp.341-432.
4. Y. J. Lee and J. L. Speyer, "Zero Locus of a Beam with Varying Sensor and Actuator Locations," *To Be Published at J. of Guidance, Control, and Dynamics*.

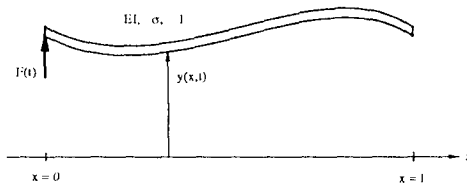


Figure 1. A Uniform Bernoulli-Euler Beam with Input Force at the Left End

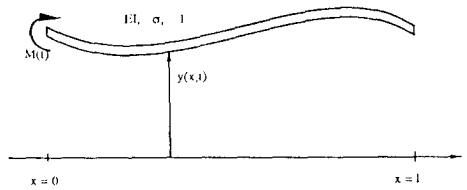


Figure 2. A Uniform Bernoulli-Euler Beam with Input Moment at the Left End

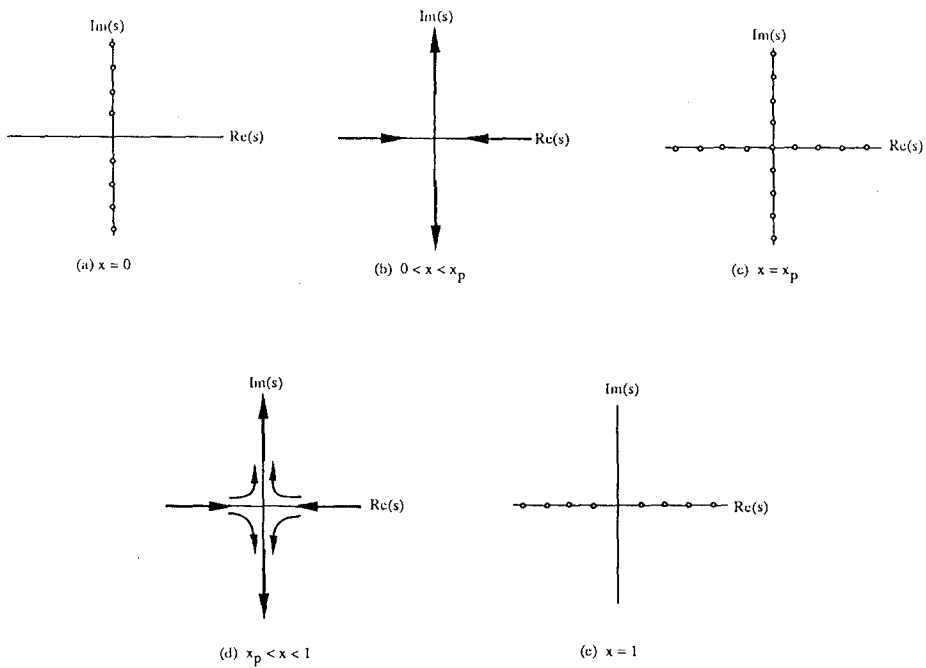


Figure 3. Trends of Zeros on the λ -Plane as Increase x for Force and Moment Input Cases ($x_p = 2/3$ for Force Input and $x_p = 1/2$ for Moment Input)

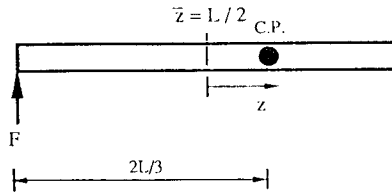


Figure 4. A Rigid Beam with a Force Input

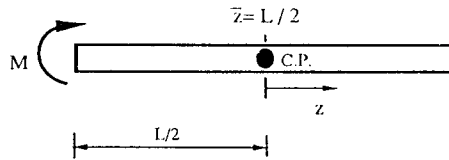


Figure 5. A Rigid Beam with a Moment Input

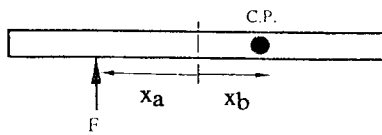


Figure 6. A Rigid Beam with a Force Input at an Arbitrary Location