

리아프노프 방법을 이용한 3 차원 비례항법의 성능 분석

송 성 호, 하 인 중

서울 대학교 공과대학 제어계측 공학과

Performance Analysis of the Three Dimensional Pure PNG Law via Lyapunov-Like Method

Seongho Song, Injoong Ha

Dept. of Control and Instrumentation Eng.,

Seoul National University

Abstract

The 3-dimensional PPNG (Pure proportional navigation guidance) law was proposed about forty years ago, but the satisfactory analysis of its performance has not been presented since then. In this note, we prove under some reasonable assumptions that the missile guided according to this 3-dimensional PPNG law can always intercept a randomly maneuvering target if (1) the target acceleration varies with a certain bound, (2) the navigation constant is selected large and (3) the initial heading error is small. We introduce a Lyapunov-like method that proves to be a very powerful tool in obtaining our results.

θ_m, ϕ_m : θ_{LM}, ϕ_{1M}
 θ_t, ϕ_t : θ_{LT}, ϕ_{LT}
 $s\theta_i, s\phi_i$: $\sin\theta_i, \sin\phi_i$
 $c\theta_i, c\phi_i$: $\cos\theta_i, \cos\phi_i$
 N : 항법 상수
 r : 미사일과 목표물사이의 거리
 t_f : 미사일의 비행시간
 ρ : V_t / V_m
 Ω_L : LOS의 각속도 벡터
 Ω_M : LOS에 대한 미사일의 상대적인 각속도벡터
 Ω_T : LOS에 대한 목표물의 상대적인 각속도벡터
 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$: 각각 LOS의 각속도벡터의 i_L, j_L, k_L 축방향 성분

Nomenclature

LOS : 시선 (line of sight)
 (X_I, Y_I, Z_I) : 기준좌표계 (reference frame)
 (X_L, Y_L, Z_L) : 시선좌표계 (LOS frame)
 (X_M, Y_M, Z_M) : 미사일의 좌표계 (missile frame)
 (X_T, Y_T, Z_T) : 목표물의 좌표계 (target frame)
 i_I, j_I, k_I : 각각 X_I, Y_I, Z_I 축의 단위벡터 (unit vector)
 i_L, j_L, k_L : 각각 X_L, Y_L, Z_L 축의 단위벡터 (unit vector)
 i_M, j_M, k_M : 각각 X_M, Y_M, Z_M 축의 단위벡터 (unit vector)
 i_T, j_T, k_T : 각각 X_T, Y_T, Z_T 축의 단위벡터 (unit vector)
 L : LOS 벡터
 $\|V\|$: 벡터 V 의 Euclidean Norm
 $V_M (V_T)$: 미사일(목표물)의 속도벡터
 V_m, V_t : $\|V_M\|, \|V_T\|$
 $A_M (A_T)$: 미사일(목표물)의 가속도 벡터
 $A_{ym}(A_{zm})$: 미사일의 요 (피치) 가속도
 $A_{yt}(A_{zt})$: 목표물의 요 (피치) 가속도
 A_M^c : 미사일의 가속도 명령 벡터
 $A_{ym}^c(A_{zm}^c)$: 미사일의 요 (피치) 가속도 명령
 θ_{ij}, ϕ_{ij} : 좌표계 (X_i, Y_i, Z_i) 와 (X_j, Y_j, Z_j) 의 관계를 나타내는 Euler 각으로서 좌표계 (X_i, Y_i, Z_i) 을 Z_i 축을 중심으로 ϕ_{ij} 만큼 회전시켜 얻어진 좌표계 (X_d, Y_d, Z_d) 를 다시 Y_d 축을 중심으로 $-\theta_{ij}$ 만큼 회전시키면 좌표계 (X_j, Y_j, Z_j) 이 된다.
 θ_L, ϕ_L : θ_{1L}, ϕ_{1L}

I. 서론 (Introduction)

비례항법은 호명 미사일의 유도법칙으로써 널리 이용되어 왔다. 미사일과 목표물간의 시선(LOS)의 각속도에 비례하여 미사일의 가속도명령을 만들어 주는 비례항법은 목표물을 명중시키는 데 필요한 미사일의 가속도의 제곱의 적분량을 최소화하는 최적의 유도법칙임이 알려져 있다 [8]. 비례항법은 가속도 명령의 주어지는 방향에 따라 순비례항법(pure proportional navigation, PPN) 과 진비례항법(true proportional navigation, TPN) 으로 나누어진다.

TPN의 경우에는 미사일의 가속도 명령이 시선에 수직하게 주어지는데 현재까지 많은 연구가 되어왔다. [5]에서는 처음으로 평면상에서 방향조종을 하지 않는 목표물에 대하여 해석근(closed form solution)이 구해졌는데 초기조건이 일정한 원의 내부에 존재하여야만 명중이 보장된다. 따라서 초기조건 제약의 완화를 위해서는 일반화된 TPN (generalized TPN) 과 일반화된 유도법칙 (generalized guidance law)이 제시되었고 이에 대한 해석이 이루어졌다 [10, 11]. 최근에 Cochran et al. [3]은 3 차원 공간상에서의 유도문제에 대하여 해석을 하였으며 명중을 보장하는 초기조건을 구하였다. 그러나 이러한 연구 결과에도 불구하고 구현상의 어려움과 초기조건 제약으로 인한 강인성(robustness)의 저하로 실제적인 면에서는 PPN이 보다 효율적임이 알려져 있다 [9].

PPN은 미사일의 가속도명령이 미사일의 속도벡터에 수직으로 주어지는데, [2]에서는 처음으로 방향조종을 하지 않는 목표물에 대한 PPN의 해석근(closed form solution)이 구해졌다. 방향조종을 하는 목표물의 경우에는 정상적 방법에 의해

서 일정한 가속도로 방향조종을 하는 목표물 [6] 과 유한한 시변 가속도 (bounded, time varying acceleration) 로 임의의 방향조종을 하는 목표물 [7] 에 대한 명증성이 입증되어있다.

그러나 위의 연구결과들은 평면상에서의 추적상황 (planar pursuit) 만을 고려한 것으로 실제 3 차원 공간상에서의 PPN 유도문제에 대한 연구는 미진한 상태이다. 목표물이 공간상에서 방향조종을 하는 경우 추적상황은 피치나 요평면상에서만 이루어지지 않으므로 이들간의 상호 연관성을 고려하여야 한다. 3 차원 공간상에서의 유도문제 (guidance problem)에 대한 연구는 Adler [1] 가 처음으로 3 차원 비례항법에 대하여 고려하였으며 미사일과 목표물이 충돌코스 (collision course) 에서 크게 벗어나지 않는다는 가정하에서 미사일과 목표물사이의 운동관계식을 선형화하였다. 그러나 목표물과 미사일이 방향조종을 하여 충돌코스에서 벗어나는 경우에는 이러한 선형화 된 식의 정확도는 떨어지게 된다.

본 논문에서는 [1] 과 같이 3 차원 공간의 추적상황하에서의 3차원 PPN 비례항법의 성능을 이론적으로 분석한다. 그러나 본 논문의 분석에서는 [1] 에서보다 일반적 상황을 고려한다. 첫째, 추적상황의 비선형 역학특성을 선형화하지 않고 그대로 고려한다. 둘째, 미사일과 목표물이 충돌 코스에 가까이 있다는 가정이 필요없다. 셋째, 목표물은 3차원 공간상에서 시변가속도로 임의의 방향조정을 한다. 이러한 일반적 추적상황을 완전히 고려한 성능분석을 위해 잘 알려진 리아프노프 방법 (Lyapunov direct method) 을 변형하여 활용한다. 결과적으로 그동안 실험또는 시뮬레이션을 통하여 잘 알려진 3차원 PPN 비례항법의 고명증성을 이론적으로 잘 설명할 수 있다. 또한, 본 논문은 유사 리아프노프 방법(Lyapunov-like method)를 미사일 유도분야 연구에 처음 도입한 점에서도 기여한다고 볼 수 있다. 본 논문의 연구결과는 2차원 평면 추적시 PPN 비례항법의 성능분석을 한 [7] 의 연구결과를 3 차원 경우로 일반화한 것 이나 단순한 확장이 아니며 훨씬 복잡한 이론전개가 요구된다.

II. 문제 설정 (Problem Statement)

먼저 3 차원 공간상에서 유한한 시변 가속도로 임의의 방향조종을 하는 목표물과 PPN 비례항법에 의해서 유도되는 미사일과의 추적문제를 수학적으로 표현한다. 이를 단순화하기 위하여 미사일과 목표물은 공간상의 점으로 가정하고 미사일의 자동조종장치와 탐색기의 역학(dynamics)는 무시할 정도로 빠르다고 가정한다. 또한, 미사일의 속도와 목표물의 속도는 일정하다고 보고 미사일의 공격각은 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정한다. 이러한 가정들하에서 미사일과 목표물의 추적상황을 3 차원 공간상에서 나타내면 그림 1 과 같고 그 역학방정식은 다음과 같이 구해질 수 있다.

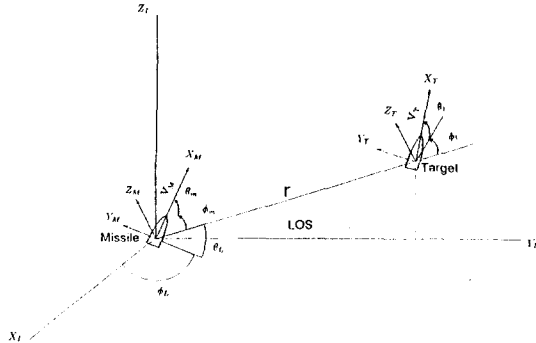


그림 1. 3차원 공간의 추적상황 (3D-space pursuit situation)

추적상황의 기하학적 상황(Geometry) 와 각 좌표계 및 오일러(Euler) 각들의 정의, 그리고 잘 알려진 고전의 동역학 이론 (classical dynamics) [4] 로부터

$$dL/dt = d/dt (r i_L) = V_t i_T - V_m i_M = r \dot{i}_L + r \Omega_L \times i_L \quad (2.1)$$

$$A_T = A_{yt} j_T + A_{zt} k_T = \Omega_L \times V_T + \Omega_T \times V_T \quad (2.2)$$

$$A_M = A_{ym} j_M + A_{zm} k_M = \Omega_L \times V_M + \Omega_M \times V_M \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Omega_L &= \dot{\phi}_L s_{\phi_L} i_L - \dot{\theta}_L j_L + \dot{\phi}_L c_{\phi_L} k_L \\ &= \lambda_x i_L + \lambda_y j_L + \lambda_z k_L \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Omega_M = \dot{\phi}_m s_{\phi_m} i_M - \dot{\theta}_m j_M + \dot{\phi}_m c_{\phi_m} k_M \quad (2.5)$$

$$\Omega_T = \dot{\phi}_t s_{\phi_t} i_T - \dot{\theta}_t j_T + \dot{\phi}_t c_{\phi_t} k_T \quad (2.6)$$

이 성립함을 알 수 있고, 위의 식들로부터 추적상황의 역학방정식을 다음과 같은 비선형 미분방정식으로 표시할 수 있다.

$$\dot{r} = (\rho c_{\theta_t} c_{\phi_t} - c_{\theta_m} c_{\phi_m}) V_m \quad (2.7)$$

$$r \dot{\lambda}_y = (s_{\theta_m} - \rho s_{\theta_t}) V_m \quad (2.8)$$

$$r \dot{\lambda}_z = (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m}) V_m \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m &= A_{zm}/V_m + V_m \tan \lambda_y s_{\phi_m} (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m})/r \\ &\quad - (\rho s_{\theta_t} - s_{\theta_m}) c_{\phi_m} V_m/r \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &= -V_m \tan \lambda_y s_{\theta_m} c_{\phi_m} (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m})/(r c_{\theta_m}) \\ &\quad - V_m (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m})/r + A_{ym}/(V_m c_{\theta_m}) \\ &\quad - V_m s_{\theta_m} s_{\phi_m} (\rho s_{\theta_t} - s_{\theta_m})/(r c_{\theta_m}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_t &= A_{zt}/V_t + V_m \tan \lambda_y s_{\phi_t} (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m})/r \\ &\quad - V_m c_{\phi_t} (\rho s_{\theta_t} - s_{\theta_m})/r \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_t &= -V_m s_{\theta_t} c_{\phi_t} \tan \lambda_y (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m})/(r c_{\theta_t}) \\ &\quad - V_m s_{\theta_t} s_{\phi_t} (\rho s_{\theta_t} - s_{\theta_m})/(r c_{\theta_t}) + A_{yt}/(\rho V_m c_{\theta_t}) \\ &\quad - V_m (\rho c_{\theta_t} s_{\phi_t} - c_{\theta_m} s_{\phi_m})/r \end{aligned} \quad (2.13)$$

여기서 자동조종장치의 역학(dynamics)이 무시할 수 있을 정도로 빠르다는 가정에 의해서

$$\dot{A}_{ym}^c = A_{ym}, \quad \dot{A}_{zm}^c = A_{zm} \quad (2.14)$$

볼 수 있다.

비례항법에서는 미사일의 회전율(turning rate) 를 시선의 회전율(turning rate) 에 비례하도록 미사일의 가속도 명령을 만들어준다. 따라서 3 차원 공간상에서의 비례항법은 다음과 같이 정의할 수 있다 [1].

$$\begin{aligned} A_M^c &= A_{ym}^c j_M + A_{zm}^c k_M \\ &\equiv N \Omega_L \times V_M \end{aligned} \quad (2.15)$$

여기서 N 는 항법 상수 (Navigation constant) 이다.

그러나 실제 탐색기에서 측정가능한 양은 λ_y 와 λ_z 이고 λ_x 는 측정할 수 없으므로 3 차원 비례항법에서의 미사일의 가속도 명령은 다음과 같이 주어진다.

$$A_{ym}^c = -N V_m \dot{\lambda}_y s_{\theta_m} s_{\phi_m} + N V_m \lambda_z c_{\theta_m} \quad (2.16)$$

$$A_{zm}^c = -N V_m \dot{\lambda}_z c_{\phi_m} \quad (2.17)$$

이와 같은 3 차원 비례항법은 평면상의 비례항법을 확장한 형태이다. 예를 들면 피치 평면상에서의 추적상황만을 고려한다면,

$$\dot{\phi}_m = \dot{\lambda}_z = 0$$

인 경우이므로 식(2.16) 과 식(2.17) 이

$$A_{ym}^c = 0, \quad A_{zm}^c = -N V_m \dot{\lambda}_y$$

이 되어 잘 알려진 피치 평면상의 비례항법과 일치한다.

본 논문에서는 식(2.7)-(2.13) 의 비선형 미분방정식으로 표시되는 3 차원 공간상의 추적상황에서 식(2.16)과 식(2.17) 에서 정의한 3 차원 비례항법의 성능을 이론적으로 분석한다.

III. 주요 결과 (Main Results)

다음의 정리 1 은 미사일의 속도가 목표물보다 빠르고, 미사일의 초기헤딩 오차가 작고, 항법상수가 매우 크다면, 3차원 비례항법에 의해 유도되는 미사일은 유한한 시변 가속도로 임의의 방향조종을 하는 목표물을 항상 명중시킬 수 있다는 것을 보여준다.

정리 1

다음의 조건이 만족된다고 하자.

(A 1) $0 \leq \rho < 1$

(A 2) A_T 는 시간의 함수이고 piecewise continuous 하며 양의 상수 a 에 의해서 크기가 제한된다.

$$\|A_T(t)\| \leq a, \quad \forall t \geq 0.$$

(A 3) 어떤 상수 $\beta \in (0, 1-\rho)$ 에 대해서 다음이 만족된다.

$$|r(0)\dot{\lambda}_y(0)| < \beta V_m/2, \quad |r(0)\dot{\lambda}_z(0)| < \beta V_m/2 \quad (3.1)$$

$$|\theta_m(0)| < \pi/2, \quad |\phi_m(0)| < \pi/2 \quad (3.2)$$

(A 4) 항법 상수 N 가 다음을 만족한다.

$$N > 1 + [\rho + \{2\sqrt{2} a r(0) / (\beta V_m^2)\}] / \{1 - (\rho + \beta)^2\}^{1/2} \quad (3.3)$$

그러면 (2.15)-(2.16) 식으로 정의된 비례항법은

$$|\theta_m(t)| < \pi/2, \quad |\phi_m(t)| < \pi/2, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t) s\phi_m(t)|^2 < |\rho + \beta|^2, \quad \forall t \geq 0$$

을 보장하고 다음과 같은 유한한 명중시간 t_f 가 존재한다.

$$r(t_f) = 0, \quad t_f < r(0) / [V_m \{(1-\rho)^2 - \beta^2\}^{1/2}]. \quad (3.5)$$

정리 1 에서 식(3.1)과 식(3.2)는 발사시에 미사일이 충돌 코스에서 벗어난 헤딩오차의 크기가 $\beta V_m/2$ 보다 작아야 함을 나타낸다. 여기서 β 는 0 과 $1-\rho$ 사이의 임의의 값으로 최종 명중 시간을 결정하는 변수이다. 즉, 초기 헤딩오차가 크면 식(3.3) 과 식(3.5) 으로부터 명중시간이 길어지고 항법상수가 커야함을 알 수 있다. 식(3.2) 은 발사시 미사일이 목표물을 정면에 바라보고 있어야 함을 의미하고 항법상수가 식(3.3) 을 만족하면, 식(3.4)와 식(3.5)는 미사일이 목표물을 명중시킬 때까지 항상 목표물을 정면에 바라보면서 날아가게 되고 명중이 항상 보장됨을 의미한다. 식(3.3)에서 3 차원 비례항법에서는 목표물이 어떻게 방향조종을 하느냐에 관계없고 목표물의 가속도의 최대크기만이 중요하다라는 것을 알 수 있다.

정리 1 의 증명을 위하여 다음의 세 보조정리들을 먼저 증명한다.

보조 정리 1

미사일의 초기자세가 식(3.2) 을 만족하고, 헤딩 오차가 어떤 상수 $\beta \in (0, 1-\rho)$ 와 어떤 시간 $t_0, t_1 \in [0, \infty)$ 에 대해서

$$|r(t)\dot{\lambda}_y(t)| < \beta V_m/\sqrt{2}, \quad |r(t)\dot{\lambda}_z(t)| < \beta V_m/\sqrt{2}, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.6)$$

$$|\theta_m(t_0)| < \pi/2, \quad |\phi_m(t_0)| < \pi/2 \quad (3.7)$$

을 만족하면

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t) s\phi_m(t)|^2 < |\rho + \beta|^2, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.8)$$

$$|\theta_m(t)| < \pi/2, \quad |\phi_m(t)| < \pi/2, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.9)$$

$$r(t) < -V_m \{(1-\rho)^2 - \beta^2\}^{1/2}, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.10)$$

이 성립한다. ■

증명)

식(2.8), 식(2.9), 식(3.6) 과

$$|s\theta_t| + |c\theta_t s\phi_t| \leq \sqrt{2} \quad (3.11)$$

으로부터

$$\begin{aligned} & |s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t) s\phi_m(t)|^2 \\ & < (\beta/\sqrt{2} + |\rho s\theta_t(t)|)^2 + (\beta/\sqrt{2} + |\rho c\theta_t(t) s\phi_t(t)|)^2 \\ & < \beta^2 + \sqrt{2}\beta\rho \{|s\theta_t(t)| + |c\theta_t(t) s\phi_t(t)|\} \\ & \quad + \rho^2 \{|s\theta_t(t)|^2 + |c\theta_t(t) s\phi_t(t)|^2\} \\ & < \beta^2 + 2\beta\rho + \rho^2 \{1 - |c\theta_t(t) c\phi_t(t)|^2\} \\ & \leq |\rho + \beta|^2 < 1, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

이다. $\theta_m(t)$ 와 $\phi_m(t)$ 가 연속이므로 식(3.7)과 식(3.12) 은 식(3.9)를 보장한다. 따라서, 임의의 $t \in [t_0, t_1)$ 에 대해서 $c\theta_m(t) c\phi_m(t) > 0$ 이므로

$$c\theta_m(t) c\phi_m(t) = [1 - |s\theta_m(t)|^2 - |c\theta_m(t) s\phi_m(t)|^2]^{1/2}, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.13)$$

이다. 결국, 식(2.1), 식(3.12)의 첫 부등식, 그리고 식(3.13) 으로부터 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$r(t) < V_m f(\theta_t(t), \phi_t(t)), \quad \forall 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.14)$$

여기서

$$\begin{aligned} f(\theta_t, \phi_t) & \triangleq \rho c\theta_t(t) c\phi_t(t) - \{1 - (\beta/\sqrt{2} + |\rho s\theta_t(t)|)^2 \\ & \quad - (\beta/\sqrt{2} + |\rho c\theta_t(t) s\phi_t(t)|)^2\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

이다. 식(3.15) 의 우변의 두 항을 제곱하여 비교하면 두 번째 항이 첫번째 항보다 항상 크다는 것을 알 수 있으며 복잡한 계산을 통하여 함수 f 의 최대값을 계산해보면

$$\max_{-\pi \leq \theta_t \leq \pi} \max_{-\pi \leq \phi_t \leq \pi} f(\theta_t, \phi_t) = -\{(1-\rho)^2 - \beta^2\}^{1/2} \quad (3.16)$$

이 된다. 위의 결과로부터 식(3.10)이 성립함이 명백하다. ■

비례항법에서는 시선 (LOS) 의 각속도(Angular rate)를 작계함으로써 목표물을 명중시키는데 목적이 있다. 따라서 시선의 회전과 관계되도록 유사리아프노프 함수(Lyapunov-like function) V 를 다음과 같이 정의한다.

$$V(t) \triangleq V_1(t) + V_2(t), \quad (3.17)$$

$$V_1(t) \triangleq |r \dot{\lambda}_y|^2 / 2, \quad V_2(t) \triangleq |r \dot{\lambda}_z|^2 / 2$$

다음의 보조정리 2 는 V 의 성질을 설명한다.

보조 정리 2

정리 1의 가정들이 만족되고 어떤 시간 $t_2 \in [0, \infty)$ 에 대하여

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t)s\phi_m(t)|^2 \leq (\rho + \beta)^2, \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \quad (3.18)$$

$$r(t) \leq r(0), \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \quad (3.19)$$

이면, 식(2.16)과 식(2.17)의 비례항법은

$$V^{1/2}(t) < \beta V_m/2, \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \quad (3.20)$$

을 보장한다. ■

증명)

식(2.7)-(2.13)에 의해서

$$\begin{aligned} (r\dot{\lambda}_y) &= \{ \theta_m c\theta_m - \rho \theta_t c\theta_t \} V_m \\ &= r\dot{\lambda}_z \dot{\lambda}_x - r\dot{\lambda}_y - A_{zt} c\theta_t + A_{zm} c\theta_m \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} (r\dot{\lambda}_z) &= \{ -\rho \theta_t s\theta_t s\phi_t + \rho \phi_t c\theta_t c\phi_t + \theta_m s\theta_m s\phi_m \\ &\quad - \phi_m c\theta_m c\phi_m \} V_m \\ &= -r\dot{\lambda}_y \dot{\lambda}_x - r\dot{\lambda}_z - A_{zt} s\theta_t s\phi_t + A_{yt} c\phi_t \\ &\quad + A_{zm} s\theta_m s\phi_m - A_{ym} c\phi_m \end{aligned} \quad (3.22)$$

이다. 따라서 식(2.14), 식(2.16), 식(2.17), 식(3.17), 식(3.21), 그리고 식(3.22)에 의해서 다음의 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= r\dot{\lambda}_y \cdot (r\dot{\lambda}_y) + r\dot{\lambda}_z \cdot (r\dot{\lambda}_z) \\ &= r|\dot{\lambda}_y|^2 V_m \{ -\rho c\theta_t c\phi_t + (1-N) c\theta_m c\phi_m \} \\ &\quad + r|\dot{\lambda}_z|^2 V_m \{ -\rho c\theta_t c\phi_t + (1-N) c\theta_m c\phi_m \} \\ &\quad - r\dot{\lambda}_y A_{zt} c\theta_t - r\dot{\lambda}_z (A_{zt} s\theta_t s\phi_t - A_{yt} c\phi_t) \\ &< (r|\dot{\lambda}_y|^2 + r|\dot{\lambda}_z|^2) \cdot V_m [\rho + (1-N) c\theta_m c\phi_m] \\ &\quad + \alpha \{ |r\dot{\lambda}_z| (|s\theta_t s\phi_t| + |c\phi_t|) + |r\dot{\lambda}_y| |c\theta_t| \}, \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

이다. 한편, 식(3.2)와 식(3.18)에 의해 식(3.12)가 $t_1=t_2$ 로 성립하고 결국

$$c\theta_m c\phi_m \geq [1 - |\rho + \beta|^2]^{1/2}, \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \quad (3.24)$$

이 성립한다. 또한,

$$|s\theta_t s\phi_t| + |c\phi_t| \leq \sqrt{2}, \quad |c\theta_t| \leq \sqrt{2} \quad (3.25)$$

이므로 식(3.3), 식(3.17), 식(3.22)로부터 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -2\sqrt{2}\alpha r(0) (r|\dot{\lambda}_y|^2 + r|\dot{\lambda}_z|^2) / (\beta V_m) \\ &\quad + \sqrt{2}\alpha \{ |r\dot{\lambda}_z| + |r\dot{\lambda}_y| \} \\ &< -4\sqrt{2}\alpha V / (\beta V_m) + 2\alpha (V_1^{1/2} + V_2^{1/2}) \\ &< -4\sqrt{2}\alpha V / (\beta V_m) + 2\sqrt{2}\alpha V^{1/2}, \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

약간의 계산을 통하여 이 부등식은

$$V^{1/2}(t) < \beta V_m/2 + \{ V^{1/2}(0) - \beta V_m/2 \} \exp[-2\sqrt{2}\alpha t / (\beta V_m)], \quad \forall 0 \leq t \leq t_2 \quad (3.27)$$

을 의미함을 알 수 있고, 식(3.1)과 식(3.17)로부터

$$V^{1/2}(0) < \beta V_m/2$$

이므로 식(3.20)이 성립한다. ■

이제 세번째 보조정리를 제시한다.

보조 정리 3

정리 1의 가정들이 만족되고 어떤 시간 $t_1 \in [0, \infty)$ 에 대하여

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t)s\phi_m(t)|^2 \leq |\rho + \beta|^2, \quad \forall 0 \leq t \leq t_3 \quad (3.28)$$

을 만족하면 식(2.16)-(2.17)으로 정의되는 비례항법은

$$r(t) < -\{ (1-\rho)^2 - \beta^2 \}^{1/2} V_m, \quad \forall 0 \leq t \leq t_3 \quad (3.29)$$

을 보장한다. ■

증명)

모순법에 의해서 증명을 하겠다. $t_3 = 0$ 일 때 (A 3)에 의해 보조정리 1이 $t_0 = t_1 = 0$ 으로 성립하기 때문에

$$r(0) < -\{ (1-\rho)^2 - \beta^2 \}^{1/2} V_m \quad (3.30)$$

이다. 만약 식(3.29)이 성립하지 않는다면 (3.30)식과 r의 연속성에 의해

$$r(t) < -\{ (1-\rho)^2 - \beta^2 \}^{1/2} V_m, \quad \forall 0 \leq t < t_4 \quad (3.31)$$

$$r(t_4) = -\{ (1-\rho)^2 - \beta^2 \}^{1/2} V_m, \quad (3.32)$$

을 만족하는 $t_4 \in [0, t_3)$ 가 존재한다. 따라서

$$r(t) < r(0), \quad \forall 0 \leq t \leq t_4 \quad (3.33)$$

이다. 식(3.28), 식(3.33)과 보조정리 2로부터

$$V^{1/2}(t) < \beta V_m/2, \quad \forall 0 \leq t \leq t_4 \quad (3.34)$$

이다. 식(3.17)과 식(3.34)에 의해 식(3.6)이 $t_0=0, t_1=t_4$ 로 만족되므로 보조정리 1이 $t = t_4$ 로 성립하여

$$r(t) < -\{ (1-\rho)^2 - \beta^2 \}^{1/2} V_m, \quad \forall 0 \leq t \leq t_4 \quad (3.35)$$

이다. 그런데 식(3.35)은 $t = t_4$ 에서 식(3.32)와 모순된다. 따라서 식(3.29)이 성립해야 한다. ■

이제 앞의 보조정리들을 이용하여 정리 1을 증명하겠다.

정리 1의 증명)

모순법에 의해서 증명한다. (A 3)에 의해 보조정리 1이 $t_0 = t_1 = 0$ 으로 성립하므로

$$|s\theta_m(0)|^2 + |c\theta_m(0)s\phi_m(0)|^2 < |\rho + \beta|^2 \quad (3.36)$$

이다. 만약 식(3.4)이 성립하지 않는다면

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t)s\phi_m(t)|^2 < |\rho + \beta|^2, \quad \forall 0 \leq t < t_5 \quad (3.37)$$

$$|s\theta_m(t_5)|^2 + |c\theta_m(t_5)s\phi_m(t_5)|^2 = |\rho + \beta|^2 \quad (3.38)$$

이 되는 $t_5 \in (0, \infty)$ 가 존재한다. 따라서 보조정리 3에 의해

$$\dot{r}(t) < -\{(1-\rho)^2 - \beta^2\}^{1/2} V_m, \quad \forall 0 \leq t \leq t_5 \quad (3.39)$$

이 되므로

$$r(t) \leq r(0), \quad \forall 0 \leq t \leq t_5 \quad (3.40)$$

이다. 따라서 보조정리 2가 $t_2 = t_5$ 로 성립하므로

$$V^{1/2}(t) < \beta V_m/2, \quad \forall 0 \leq t \leq t_5 \quad (3.41)$$

이다. 식(3.17)과 식(3.41)에 의해 식(3.6)이 $t_1 = t_5$ 로 만족되므로 보조정리 1이 $t_1 = t_5$ 로 성립하여

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t)s\phi_m(t)|^2 < |\rho + \beta|^2, \quad \forall 0 \leq t \leq t_5 \quad (3.42)$$

이 된다. 그런데 식(3.42)은 식(3.38)과 모순되므로 식(3.4)은 성립해야만 한다. 식(3.4)는 보조정리 3에 의해서 결국 어떤 임의의 시간 $t_3 \in [0, \infty)$ 에 대해서도 식(3.28)이 성립함을 의미하므로

$$\dot{r}(t) < -\{(1-\rho)^2 - \beta^2\}^{1/2} V_m, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.43)$$

이 되므로 결국 식(3.5)가 성립한다. ■

정리 1에서는 초기 헤딩오차가 작고 항법상수가 크다면 미사일이 목표물을 명중시킬 수 있다는 것을 보였다. 다음의 정리 2는 식(2.16)과 식(2.17)의 3차원 비례항법으로 유도되는 미사일이 정리 1의 제한적인 초기조건을 만족하지 않더라도 전체 추적기간동안 미사일이 목표물을 바라보면서 추적하기만 한다면 항법상수가 비교적 작아도 반드시 목표물을 명중시킬 수 있음을 보여준다.

정리 2

(A 1), (A 2)이 성립하고 (A 3), (A 4) 대신 다음의 조건이 만족된다고 하자.

(A 3)' 어떤 상수 $\bar{\beta} \in (0, 1-\rho)$ 에 대해서

$$|s\theta_m(t)|^2 + |c\theta_m(t)s\phi_m(t)|^2 < |\rho + \bar{\beta}|^2, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.44)$$

$$|\theta_m(0)| < \pi/2, \quad |\phi_m(0)| < \pi/2 \quad (3.45)$$

이다.

(A 4)' 항법상수 N가

$$N > 1 + \{\rho + (2\sqrt{2} \alpha r(t)/(\bar{\beta}V_m^2))\} / \{c\theta_m(t)c\phi_m(t)\} \quad (3.46)$$

을 만족한다.

그러면 식(2.16), 식(2.17)의 3차원 비례항법은 목표물을 명중시킨다. ■

증명)

식(3.17)의 주어지는 유사 리아프노프 함수 (Lyapunov-like function) V를 시간에 대해 미분하면 식(3.22)이 성립한다. 식(3.22)와 식(3.44)에 대해

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -\{2\sqrt{2}\alpha/(\bar{\beta}V_m)\}(|r\dot{\lambda}_y|^2 + |r\dot{\lambda}_z|^2) + \sqrt{2}\alpha\{|r\dot{\lambda}_y| + |r\dot{\lambda}_z|\} \\ &= -\{4\sqrt{2}\alpha/(\bar{\beta}V_m)\}V + 2\sqrt{2}\alpha V^{1/2}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

이므로

$$\begin{aligned} V^{1/2}(t) &< \{V^{1/2}(0) - \bar{\beta}V_m/2\} \cdot \exp[-\{2\sqrt{2}\alpha/(\bar{\beta}V_m)\} \cdot t] \\ &\quad + \bar{\beta}V_m/2, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

이다. 따라서

$$V^{1/2}(t) < \bar{\beta}V_m/2, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.49)$$

을 만족하는 $t_0 \in [0, \infty)$ 와 $\beta \in (\bar{\beta}, 1-\rho)$ 가 존재한다. 식(3.45), 식(3.49)과 보조정리 1에 의해서

$$\dot{r}(t) < -\{(1-\rho)^2 - \beta^2\}^{1/2} V_m, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.50)$$

이므로 항상 목표물을 명중시킨다. ■

이제 정리 2의 조건들에 대하여 부연 설명한다. θ_m 과 ϕ_m 이 연속이므로 식(3.44)과 식(3.45)에 의해서 식(3.4)의 첫 번째 식이 성립한다. 이는 미사일이 추적중 계속하여 목표물을 정면에 바라봄을 뜻하고

$$c\theta_m(t)c\phi_m(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.51)$$

을 보장한다. 따라서,

$$\begin{aligned} c\theta_m(t)c\phi_m(t) &= [1 - |s\theta_m(t)|^2 - |c\theta_m(t)s\phi_m(t)|^2]^{1/2} \\ &> [1 - |\rho + \bar{\beta}|^2]^{1/2}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

이므로 식(3.46)에 있는 부등식의 우변은 상한이 존재하므로 (A 4)'은 어떤 시간에도 항법상수 N가 ∞ 가 되기를 요구하지 않는다.

IV. 결론 (Conclusion)

미사일의 초기헤딩 오차가 작고, 항법상수가 매우 크다면, 기존의 비례항법에 의해서 유도되는 미사일은 3차원 공간상에서 유한한 시변 가속도로 임의의 방향조종을 하는 목표물을 항상 명중시킬 수 있음을 유사 리아프노프 방법(Lyapunov-like Method)을 이용하여 입증하였다. 그러나, 실제 상황에서는 탐색기와 자동조종장치의 역학(dynamics)에 의한 시간지연이 발생하므로 본 논문에서 규명한 명중조건이 만족되는 경우라도 약간의 거리오차(miss distance)는 피할 수 없다.

본 논문에서 도입한 유사 리아프노프 방법(Lyapunov-like method)에 의한 이론 전개는 앞으로 보다 효과적인 유도법칙을 개발하는 데 도움이 될 수 있는 많은 정보를 제공하고 있다.

참고 문헌

- [1] F. P. Adler, "Missile guidance by three dimensional proportional navigation," *Journal of Applied Physics*, 27, pp.500-507, May 1956.
- [2] K. Becker, "Closed form solution of pure proportional navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-26, pp.526-533, May 1990.
- [3] J. E. Cochran Jr., T. S. No, and D. G. Thaxton, "Analytical solutions to a guidance problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14, pp.117-122, Jan. - Feb. 1991.
- [4] D. T. Greenwood, *Principles of dynamics*, Prentice-Hall.
- [5] M. Guelman, "The closed form solution of true proportional navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-12, pp.472-482, July 1976.

- [6] M. Guelman, "Proportional navigation with a maneuvering target," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-8, pp.364-371, May 1972.
- [7] I. J. Ha, J. S. Hur, M. S. Ko, and T. L. Song, "Performance analysis of PNG laws for randomly maneuvering targets," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-26, pp.713-721, Sep. 1990.
- [8] Y. C. Ho, A. E. Bryson, and S. Baron, "Differential games and optimal pursuit evasion strategies," *IEEE Transactions on Automatic control*, AC-10, pp.385-389, Oct. 1965.
- [9] U. S. Shukla and P. R. Mahapatra, "The proportional navigation dilemma - pure or true ?," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-26, pp.382-392, March 1990.
- [10] C. D. Yang, F. B. Yeh, and J. H. Chen, "The closed form solution of generalized proportional navigation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp.216-218, Mar. - Apr. 1987.
- [11] C. D. Yang, F. B. Hsiao, and F. B. Yeh, "Generalized guidance law of homing missiles," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-25, pp.197-211, March 1989.