

표적충돌각과 최대기속도 제한을 고려한 최적유도기법

류 창 경, 조 항 주
국 방 과 학 연 구 소

Optimal Guidance with Terminal Impact Angle and Control Constraint

Chang K. Ryoo, Hangju Cho
Agency for Defense Development

Abstract

In this paper, we consider an optimal guidance problem with both the terminal impact angle and control constraints in addition to the usual zero miss distance constraint. We first present the optimal solution of the problem for the missile of an arbitrary order, and show that it is a linear combination of a step response and a ramp response of the missile. Therefore the usual practice of using the control obtained by saturating the optimal solution for the case of unlimited control may result in a large terminal miss. A method called the initial command saturation is suggested to reduce this terminal miss, where the control in the initial phase of guidance is forced to be saturated until a certain condition for a guidance variable is met.

1. 서론

자동조종장치 시간지연과 기동제한과 같은 유도탄 고유의 특성 혹은 표적의 기동능력등이 유도법칙내에 고려될때 유도성능은 개선된다. 특히, 표적충돌각을 고려할 수 있다면 적정 비행경로의 설정에 유리하며 우회공격등이 가능할 뿐만 아니라 탄두효과를 극대화 할 수 있다. 이러한 유도법칙은 종말구속조건과 조종입력 제한조건등을 고려한 최적제어 이론을 적용하여 구할 수 있다. 일반적으로 최적제어 문제는 TPBVP(Two Point Boundary Value Problem)로 변환되어 해석적인 해를 구하기가 까다롭다. 특히, 유도탄의 최대명령제한을 고려할 경우, 최적해는 포화함수의 형태로 주어지며 최적해를 구하는데 필요한 종말 상태변수(terminal state)가 포화함수를 포함하는 적분 방정식으로 주어지기 때문에 명확한 형태의 유도법칙의 계산이 어렵다. 실제로 구현가능한 유도법칙을 얻기 위해서는 유도탄의 최대명령제한을 무시하고 얻은 최적해에 포화함수를 적용시키는 근사적인 방법이 주로 사용된다. 만일, 유도오차만이 종말구속조건으로 고려된다면, 최소위상(minimum phase) 유도탄일 경우 이와같은 근사적인 유도 알고리즘은 최적성이 보장되지만 유도탄이 비최소위상(non-minimum phase) 일 경우에는 그렇지 못하다는 것이 알려져 있다[1].

유도오차만을 종말구속조건으로 할 경우, 최적유도명령은 유도탄의 탭프입력에 대한 응답의 형태를 갖지만, 표적충돌각이 부가되면 최적유도명령은 계단입력과 탭프입력에 대한 응답들의 선형조합으로 표현된다. 시스템이 시간지연을 포함하고 있고 표적충돌각이 고려되면 최소위상 유도탄

임에도 불구하고 유도명령이 단조함수로 표현되지 않는 선형조합이 존재할 수 있으며, 또한 유도말기에 큰 유도명령이 요구될 수 있다. 이때 유도말기의 유도명령의 포화는 심각한 유도오차를 유발하게 된다.

본 논문에서는 유도오차는 물론 표적충돌각을 종말구속조건으로 하고 최대명령제한을 포함하며 고차의 자동조종장치를 갖는 유도탄의 최적유도 법칙의 일반적인 형태를 고찰한다. 또한 표적충돌각을 고려하지 않은 최적유도법칙과는 달리, 최대 기동명령 제한이 있을 경우의 최적해가 최대 기동기속도를 고려하지 않을 경우의 최적해의 포화함수로는 주어지지 않음을 보이고 이러한 유도명령을 그대로 사용할 경우 발생하는 유도오차에 대해 논한다. 이러한 유도오차를 감소시키기 위해 최대명령제한이 없는 경우 1 차의 시간지연 시스템에 대한 최적유도법칙을 산출하고 이의 특성을 분석하여 항상 단조함수가 되도록하는 비형조건을 결정한 다음 이조건을 만족할때 까지 초기유도명령을 강제로 포화시키는 방법에 관하여 설명한다.

2. 최적제어문제의 일반해

조종입력제한을 갖는 다음과 같은 최적제어 문제를 고려하자.

Minimize

$$J = \frac{1}{2} \{x(t_f) - x_f\}^T G \{x(t_f) - x_f\} + \int_{t_0}^{t_f} u^T(\tau) R u(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (2)$$

$$\text{with input constraint } u^T(t) u(t) \leq U_0^2 \quad (3)$$

여기서 $x(\cdot)$ 는 상태변수 벡터이며, x_f 는 $t=t_f$ 에서 만족해야 할 종말 상태변수값 벡터이다. $u(\cdot)$ 는 조종입력 벡터이며, U_0 는 최대 조종입력이다. G 와 R 은 가중행렬(weighting matrix)로서 각각 positive semi-definite, positive definite 하다. 이상의 최적제어문제의 해의 계산 과정은 참고문헌 [1]에 수록되어 있으며 최적해 $u^*(t)$ 의 형태는 다음과 같다.

$$u^*(t) = -U_0 \text{Sat} \left[(1/U_0) R^{-1} B^T \Phi^T(t_f, t) G \{x(t_f) - x_f\} \right] \quad (4)$$

여기서 포화함수 $\text{Sat}(\cdot)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Sat}[x] = \begin{cases} x, & \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > 1 \end{cases} \quad (5)$$

최적 조종입력 계산에 필요한 종말상태변수 $x(t_f)$ 는 다음과 같은 적분방정식을 풀어 얻는다.

$$x(t_f) - x_f = \Phi(t_f, t)x(t) - x_f - \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B U_0 \text{Sat} \left[\frac{1}{U_0} R^{-1} B^T \Phi^T(t_f, \tau) G(x(t_f) - x_f) \right] d\tau \quad (6)$$

만일 조종입력에 제한을 두지 않는다면 $x(t_f)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$x(t_f) - x_f = \left[1 + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B R^{-1} B^T \Phi^T(t_f, \tau) G d\tau \right]^{-1} \{ \Phi(t_f, t)x(t) - x_f \} \quad (7)$$

(6) 식으로 주어지는 적분방정식의 해석적 해를 계산하는 것은 매우 어렵기 때문에 일반적으로 식 (7) 로 계산된 $x(t_f)$ 를 식 (4) 에 대입한 근사적 해를 이용한다.

3. 유도탄의 운동방정식

그림 1 과 같은 요격 상황에 대한 시스템 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= V_m \sin \theta_m(t) \\ \dot{\theta}_m(t) &= -\frac{a_m(t)}{V_m} \end{aligned} \quad (8)$$

유도탄 속도 V_m 이 일정하고 $\theta_m(t)$ 이 작다고 가정하면 식 (8) 은 다음과 같이 선형화된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= v(t), \quad z(0) = z_0 \\ \dot{v}(t) &= -a_m(t), \quad v(0) = v_0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $v(t)$ 는 기준선에 수직한 방향의 유도탄 속도성분으로 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$v(t) = V_m \theta_m(t), \quad v_0 = V_m \theta_m(0) = V_m \theta_{m0} \quad (10)$$

유도탄이 n 차로 기술훈다고 할때 유도명령에 대한 유도탄 가속도는 다음과 같은 선형 관계식을 갖는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_m(t) \\ \dot{p}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m(t) \\ p_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (11)$$

여기서 a_{11} 과 b_1 은 1×1 이며, a_{12} , a_{21}^T , b_2 는 각각 $(n-1) \times 1$ 벡터이며, a_{22} 는 $(n-1) \times (n-1)$ 인 행렬이다. 따라서 최적제어 적용을 위한 선형화된 시스템 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}_m(t) \\ \dot{p}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ v(t) \\ a_m(t) \\ p_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (12)$$

그림 1 로 부터 시선각(line of sight angle)이 작다고 가정하면 $z(t)$ 는 다음과 같이 시선각 $\theta(t)$ 와 time-to-go 의 함수로서 표현될 수 있다.

$$z(t) = -r \sin \theta(t) \approx -r \theta(t) \approx -V_m t_{go} \theta(t) \quad (13)$$

여기서 r 은 유도탄과 표적간의 남은 직선거리이며, time-to-go 는 다음과 같이 가정한다.

$$t_{go} = t_f - t \approx r/V_m \quad (14)$$

4. 최대동명령 제한을 포함한 유도법칙

유도오차와 표적충돌각을 가중치를 갖는 종말구속조건으로 고려하면 성능지수는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \frac{1}{2} [g_1 z(t_f)^2 + g_2 \{v(t_f) - v_f\}^2] + \frac{1}{2} \int u^2(\tau) d\tau$$

혹은

$$J = \frac{1}{2} [g_1 z(t_f)^2 + g_2 V_m^2 \{\theta_m(t_f) - \theta_{mf}\}^2] + \frac{1}{2} \int u^2(\tau) d\tau$$

여기서 θ_{mf} 는 표적충돌각이다. 따라서 가중행렬 G 와 R 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (16)$$

식 (12) 와 (16) 를 식 (4) 와 (6) 에 대입하여 풀면 다음과 같은 최대명령제한이 있을 경우의 최적해를 얻는다.

$$u^*(t) = U_0 \text{Sat} \{ (1/U_0) u(t) \} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} u(t) &= g_1 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} z(t_f) \\ &+ g_2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} [v(t_f) - v_f] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} z(t_f) &= z(t) + (t_f - t)v(t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{a_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} a_m(t) \\ &- \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{p_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} p_m(t) - \int_t^{t_f} U_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} \\ &\times \text{Sat} \left\{ \frac{1}{U_0} \left[g_1 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} z(t_f) \right. \right. \\ &\left. \left. + g_2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} [v(t_f) - v_f] \right] \right\} d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
v(t_f) = & v(t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{a_m(0)} \right\} \Big|_{t_f-t} a_m(t) \\
& - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{p_m(0)} \right\} \Big|_{t_f-t} p_m(t) - \int_t^{t_f} U_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Big|_{t_f-\tau} \\
& \times \text{Sat} \left\{ \frac{1}{U_0} g_1 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \right\} \Big|_{t_f-\tau} z(t_f) \\
& + g_2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Big|_{t_f-\tau} [v(t_f) - v_f] \Big] d\tau \quad (20)
\end{aligned}$$

최대명령제한을 포함하는 최적제어해를 얻기 위해서는 식 (19) 과 (20) 의 적분방정식을 풀어야하며, 이는 매우 까다로운 작업일 뿐만 아니라 실제구현이 불가능하다.

실제 구현이 가능한 유도법칙으로 최대명령제한이 없다고 가정하여 얻은 해에 포화함수를 적용하는 근사적 방법이 주로 이용된다. 즉 식 (19), (20) 대신에 부록의 식 (I-2) ~ (I-8) 를 이용하여 식 (18) 에 필요한 $z(t_f)$ 와 $v(t_f)$ 를 얻는다. 이와같이 근사적으로 얻어진 유도법칙은 식 (18) 이 다음과 같은 조건을 만족할때는 최적유도법칙이 된다.

$$\|u(t)\| < U_0 \quad (21)$$

식 (18) 의 유도명령은 다음과 같이 유도탄의 계단응답 함수와 램프응답함수의 선형조합으로 구성된다.

$$u(t) = \text{STEP}(t_{g0}) + \text{RAMP}(t_{g0}) \quad (22)$$

$$\text{RAMP}(t_{g0}) = g_1 z(t_f) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Big|_{t_{g0}} \quad (23)$$

$$\text{STEP}(t_{g0}) = g_2 [v(t_f) - v_f] \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Big|_{t_{g0}} \quad (24)$$

윗식에서 $g_1 z(t_f)$ 는 램프응답함수의 정상상태 기울기를 그리고 $g_2 [v(t_f) - v_f]$ 는 정상상태에서의 계단응답함수의 크기를 결정한다. 일반적으로 유도탄의 전달함수가 n 차의 최소 위상함수로 기술된다면, 유도오차만을 종말구속조건으로 고려할 경우($g_2=0$), 최적해 $u(t)$ 는 램프응답으로만 구성된 단조함수가 된다. 그러나 표적충돌각이 부가되면 유도탄이 최소위상이라고 하더라도 그림 2 의 b) 와 같이 $u(t)$ 는 더이상 단조함수가 아니며 유도명령의 포화 가능시점은 유도말기 부분에도 존재하게 된다. 유도오차만을 고려한 경우와는 달리, 표적충돌각을 고려했을때 근사적 유도법칙은 유도말기에서 포화되기가 쉬우며 심각한 유도오차가 발생할은 물론 표적충돌각도 유지하지 못하기 때문에 근사적 유도법칙의 직접적인 적용은 매우 제한적이다.

6. 초기유도명령 포화에 의한 근사적 유도법칙의 개선

유도탄이 1 차의 시간지연 시스템으로 가정될 때 비행 각 $\theta_m(t_1)$ 가 다음과 같은 구간안에 존재하면 t_1 이후의 시간에 대해 유도명령은 단조함수의 형태를 갖는다. 이 식의 유도과정 및 A_1, A_2 는 부록 II 에 있다.

$$A_1 \leq \theta_m(t_1) \leq A_2 \quad \text{for } A_1 < A_2 \quad (25)$$

$$A_2 \leq \theta_m(t_1) \leq A_1 \quad \text{for } A_2 < A_1 \quad (26)$$

만일 유도명령의 포화가 $t=t_1$ 에서 완료되고 이때 $\theta_m(t_1)$ 이 식 (25) 혹은 식 (26) 로 주어지는 영역안에 있다면, t_1 이후의 유도명령은 단조감소 혹은 단조증가하는 함수가 보장되므로 주어진 표적충돌각 및 유도오차를 만족한다. 유도탄이 1 차의 시간지연 시스템으로 가정될때 최대유도명령은 $t=0$ 과 $u'(t')=0$ 인 t' 근방에 발생할 가능성이 높다. 부록 III 으로부터 계산된 u_{max} 가 U_0 보다 클 경우, 매순간 얻어지는 $\theta_m(t)$ 가 식 (25) 혹은 식 (26) 을 만족할때까지 유도초기에 강제로 유도명령을 포화시킨다. 초기 포화유도명령의 크기는 U_0 이고 부호는 $u(0)$ 와 같다.

7. 시뮬레이션에 의한 고찰

초기 유도명령 포화 방법의 유용성을 알아보기 위해 유도탄을 1 차로 가정하고 유도법칙내의 파라미터를 다음과 같이 구성한다.

시정수(time constant) : $T = 1/\alpha = 1 \text{ sec}$

가중치 : $g_1 = 1 \times 10^{10}, \quad g_2 = 1 \times 10^{10}$

유도탄 속도 : $V_m = 300 \text{ m/s}$

표적과의 초기거리 : $r_0 = 5000 \text{ m}$

여기서 근사해법이란 최대명령제한을 무시하고 얻은 최적해에 포화함수를 적용한 유도법칙을 말하며, 초기 유도명령 포화방법 (Initial Command Saturation Method, ICSM)이란 최대명령제한을 무시하고 얻은 최적해가 최대명령제한을 초과할 경우, 유도초기에 고의로 유도명령을 포화시키는 방법을 말한다.

그림 3 은 $\theta_m(0)=0^\circ, \theta_{mf}=-60^\circ, U_0=5g$ 일때 유도명령의 시간에 대한 궤적을 나타내었다. 근사해법의 경우 유도말기의 유도명령 포화는 $90.8 \text{ m}, -7^\circ$ 의 유도오차와 표적충돌각 오차를 나타낸 반면 초기 유도명령 포화 기법은 1 m 와 0.1° 이내의 오차량만을 갖는다. 그림 4 는 $\theta_m(0)=-10^\circ, \theta_m(0)=-60^\circ, U_0=5g$ 일때로서 근사해법이 유도초기에도 포화될 경우이다. 이 경우 오차량은 근사해법이 142.6 m 와 -12° 이지만 초기 유도명령 포화 방법은 각각 1 m 와 0.1° 이내의 오차량을 갖는다.

그림 5 는 근사해법이 유도초기에만 포화되고 유도말기에는 포화되지 않는 경우로서 유도오차는 매우 작다. 초기 유도명령 포화 방법에 의한 결과도 유도오차를 유발시키지는 않지만 근사해법에 비해 비교적 많은 유도에너지를 소모하고 있음이 나타나 있다.

그림 6 은 $\theta_m(0)=40^\circ, \theta_{mf}=-40^\circ, U_0=5g$ 로서 근사해법은 물론 초기 유도명령 포화방법도 유도말기에 유도명령이 포화되는 경우로서 근사해법이 $134.3 \text{ m}, -13.5^\circ$ 의 오차를 유발시킨데 반해 초기 유도명령 포화 방법은 각각 $336.0 \text{ m}, -12.5^\circ$ 의 오차량을 발생시켜 오히려 성능저하를 초래했다.

그림 7 은 주어진 표적충돌각에 대해 근사해법과 초기 유도명령 포화방법이 $10 \text{ m}, 1^\circ$ 이상의 종말 유도오차 및 표적충돌각 오차를 유발시키기 시작하는 초기 발사각의 최고한계(upper limit)와 최소한계(lower limit)를 나타낸 그림이다. 각 한계를 초과하는 초기발사각을 가질 경우, 표적충돌각이 45° 보다 작으면 근사해법은 유도 초기와 말기에 포화현상을 나타내며, 45° 보다 큰 표적충돌각에 대해서는 유도말기에만 유도명령이 포화된다. 그림으로부터 유도말기에 유도명령이 포화되는 경우 초기 유도명령 포화 방법의 효용성은 매우 커짐을 알 수 있다.

8. 결론

유도오차 이외에 표적충돌각을 종말구속조건으로 고려했을때의 최적해의 일반적인 형태를 분석한 결과 각 종말구속 조건과 관련된 상태변수의 응답함수들의 선형조합으로 주어짐을 알 수 있었다. 최대유도명령 제한이 없다고 가정하여 구한 최적해에 포화함수를 적용하는 근사해법은 최대유도명령이 존재할때의 유도법칙으로 널리 이용된다. 그러나 표적충돌각이 고려될 경우, 유도법칙의 특성상 유도탄이 최소위상이라 하더라도 유도말기에 유도명령이 포화되기가 쉽기 때문에 초기발사각이나 표적충돌각의 결정에 많은 제한이 있다. 유도명령 포화이후 단조함수가 보장되는 조건이 만족될때까지 발사초기의 유도명령을 포화시키는 초기유도명령 포화 방법은 근사해법의 이러한 제한을 매우 완화시킬 수 있음을 알 수 있었다.

외란을 포함할때 초기 유도명령 포화방법에 대한 오차 해석과 더불어 유도에너지를 감소시킬 수 있는 초기 유도명령 포화함수등에 대한 연구가 이루어져야할 것이다. 그리고 초기 포화유도명령이 가해지는 동안 A_1 , A_2 의 거동에 관한 해석적인 연구가 남은 과제이다.

부록 I. 최대명령제한이 없을때 최적유도법칙

최대명령제한이 없을때의 유도오차와 표적충돌각을 종말구속조건으로 하는 최적해는 다음과 같이 주어진다.

$$u(t) = g_1 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} z(t_f) + g_2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} [v(t_f) - v_f] \quad (I-1)$$

여기서 $z(t_f)$, $v(t_f) - v_f$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$z(t_f) = \frac{1}{\Delta} \left\{ K_4 z(t) + [K_4(t_f - t) - K_2] v(t) - \left[K_4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{a_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} - K_2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{a_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} \right] a_m(t) - \left[K_4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{p_m(s)}{p_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} - K_2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{p_m(s)}{p_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} \right] p_m(t) \right\} \quad (I-2)$$

$$v(t_f) - v_f = \frac{1}{\Delta} \left\{ -K_3 z(t) + [K_1 - K_3(t_f - t)] v(t) + \left[K_3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{a_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} - K_1 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{a_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} \right] a_m(t) + \left[K_3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{p_m(s)}{p_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} - K_1 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{p_m(s)}{p_m(0)} \right\} \Bigg|_{t_f-t} \right] p_m(t) \right\} \quad (I-3)$$

여기서 Δ , K_1 , K_2 , K_3 , K_4 는 다음과 같다.

$$\Delta = K_1 K_4 - K_2 K_3 \quad (I-4)$$

$$K_1 = 1 + g_1 \int_t^{t_f} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} \right]^2 d\tau \quad (I-5)$$

$$K_2 = g_2 \int_t^{t_f} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} d\tau \quad (I-6)$$

$$K_3 = g_1 \int_t^{t_f} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} d\tau \quad (I-7)$$

$$K_4 = 1 + g_2 \int_t^{t_f} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{a_m(s)}{u(s)} \right\} \Bigg|_{t_f-\tau} \right]^2 d\tau \quad (I-8)$$

유도탄이 1 차의 시간지연 시스템으로 가정 된다면 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$\frac{a_m(s)}{u(s)} = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad (I-9)$$

이상과 같은 시스템에 대해 최적유도식은 유도탄 가속도 상태변수를 포함하는 식으로 기술된다.

$$u^*(t) = W_1 z(t) + W_2 v(t) + W_3 v_f + W_4 a_m(t) = V_m \{ W_1 t_{g0} \theta(t) + W_2 \theta_m(t) + W_3 \theta_{mf} \} + W_4 a_m(t) \quad (I-10)$$

여기서 각 계수들은 시변이며 다음과 같이 주어진다.

$$W_1 = \frac{1}{\Delta} [g_1 K_4 K_5 - g_2 K_3 K_6] \quad (I-11)$$

$$W_2 = \frac{1}{\Delta} [g_1 K_5 (t_{g0} K_4 - K_2) + g_2 K_6 (K_1 - t_{g0} K_3)] \quad (I-12)$$

$$W_3 = \frac{1}{\Delta} [g_1 K_2 K_5 - g_2 K_1 K_6] \quad (I-13)$$

$$W_4 = \frac{1}{\alpha \Delta} [g_1 K_5 (K_2 K_6 - K_4 K_5) + g_2 K_6 (K_3 K_5 - K_1 K_6)] \quad (I-14)$$

$$\Delta = K_1 K_4 - K_2 K_3 \quad (I-15)$$

$$K_1 = 1 + g_1 \left\{ \frac{1}{2\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} t_{g0} - \frac{1}{\alpha} t_{g0}^2 + \frac{1}{3} t_{g0}^3 - \frac{2}{\alpha^2} t_{g0} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) - \frac{1}{2\alpha^3} \text{Exp}(-2\alpha t_{g0}) \right\} \quad (I-16)$$

$$K_2 = g_2 \left\{ \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} t_{g0} + \frac{1}{2} t_{g0}^2 - \frac{1}{\alpha^2} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) + \frac{1}{\alpha} t_{g0} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) + \frac{1}{2\alpha^2} \text{Exp}(-2\alpha t_{g0}) \right\} \quad (I-17)$$

$$K_3 = g_1 \left\{ \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} t_{g0} + \frac{1}{2} t_{g0}^2 - \frac{1}{\alpha^2} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) + \frac{1}{\alpha} t_{g0} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) + \frac{1}{2\alpha^2} \text{Exp}(-2\alpha t_{g0}) \right\} \quad (I-18)$$

$$K_4 = 1 + g_2 \left\{ t_{g0} + \frac{2}{\alpha} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) - \frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \text{Exp}(-2\alpha t_{g0}) \right\} \quad (I-19)$$

$$K_5 = \frac{1}{\alpha} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) - \frac{1}{\alpha} + t_{g0} \quad (\text{I-20})$$

$$K_6 = 1 - \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) \quad (\text{I-21})$$

부록 II. 단조함수가 되기 위한 $u(t)$ 의 조건

최대명령제한을 고려하지 않고 유도탄이 최소위상 시스템인 경우, $u(t)$ 가 단조함수가 되기 위한 조건은 $g_1, g_2 \geq 0$ 이므로 다음과 같다.

$$z(t_f) [v(t_f) - v_f] \geq 0 \quad (\text{II-1})$$

이때 $z(t_f)$ 와 $v(t_f) - v_f$ 는 다음과 같이 상태궤환 형태로서 주어진다.

$$z(t_f) = \frac{1}{\Delta} (K_4 z(t) + V_m [K_4 t_{g0} - K_2] \theta_m(t) + V_m K_2 \theta_{mf} - [K_5 K_4 - K_2 K_6] a_m(t) / \alpha) \quad (\text{II-2})$$

$$v(t_f) - v_f = \frac{1}{\Delta} (-K_3 z(t) - V_m K_1 \theta_{mf} + V_m [K_1 - K_3 t_{g0}] \theta_m(t) - [K_1 K_6 - K_3 K_5] a_m(t) / \alpha) \quad (\text{II-3})$$

여기서 Δ 및 $K_i, i=1,6$ 은 부록 (I-21)~(I-27) 에 기술되어 있다. 특히 $K_i, i=1,6$ 에 포함된 지수함수는 t_{g0} 가 작을 경우에만 영향을 미치는 항이므로 $t_{g0} \gg 1$ 인 구간에서의 $K_i, i=1,6$ 는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$K_1 = 1 + g_1 \left[\frac{1}{2\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} t_{g0} - \frac{1}{\alpha} t_{g0}^2 + \frac{1}{3} t_{g0}^3 \right] \quad (\text{II-4})$$

$$K_2 = g_2 \left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} t_{g0} + \frac{1}{2} t_{g0}^2 \right] \quad (\text{II-5})$$

$$K_3 = g_1 \left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} t_{g0} + \frac{1}{2} t_{g0}^2 \right] \quad (\text{II-6})$$

$$K_4 = 1 + g_2 \left[t_{g0} - \frac{3}{2\alpha} \right] \quad (\text{II-7})$$

$$K_5 = -\frac{1}{\alpha} + t_{g0} \quad (\text{II-8})$$

$$K_6 = 1 \quad (\text{II-9})$$

$z(t_f)$ 와 $[v(t_f) - v_f]$ 내에 있는 $\theta_m(t)$ 의 계수항의 부호는 충분히 큰 αt_{g0} 와 g_1 에 대해 다음과 같다.

$$K_4 t_{g0} - K_2 = t_{g0} + \frac{g_2}{2\alpha^2} (\alpha^2 t_{g0}^2 - \alpha t_{g0} - 1) > 0 \quad (\text{II-10})$$

$$K_1 - K_3 t_{g0} = 1 - \frac{g_1}{6\alpha^3} [(\alpha t_{g0} + 2)(\alpha t_{g0} - 1)^2 - 5] < 0 \quad (\text{II-11})$$

따라서 임의의 시간 t_1 이후 $u(t)$ 가 단조함수가 되기 위한 $\theta_m(t_1)$ 은 다음과 같은 구간안에 존재해야 한다.

$$A_1 \leq \theta_m(t_1) \leq A_2 \quad \text{for } A_1 < A_2 \quad (\text{II-12})$$

$$A_2 \leq \theta_m(t_1) \leq A_1 \quad \text{for } A_2 < A_1 \quad (\text{II-13})$$

여기서 A_1 과 A_2 는 다음과 같이 주어진다.

$$A_1 = \frac{1}{V_m (K_4 t_{g0} - K_2)} \{-K_4 z(t_1) - V_m K_2 \theta_{mf} + [K_5 K_4 - K_2 K_6] a_m(t_1) / \alpha\} \quad (\text{II-14})$$

$$A_2 = \frac{1}{V_m (K_1 - K_3 t_{g0})} (K_3 z(t_1) + V_m K_1 \theta_{mf} + [K_1 K_6 - K_3 K_5] a_m(t_1) / \alpha) \quad (\text{II-15})$$

$A_1 = \theta_m(t)$ 일때 램프응답함수의 이득 $g_1 z(t_f)$ 이 0 이 되어 $u(t)$ 는 계단응답함수와 동일해지며, $A_2 = \theta_m(t)$ 이면 $u(t)$ 는 램프함수와 동일 형태를 갖는다. K_1, K_2, K_3, K_4 는 $t=t_1$ 에서의 식 (I-16) ~ 식 (I-19) 로 주어진다.

부록 III. 최대유도명령의 크기 및 발생시점

최대명령제한이 없고 $u(t)$ 가 단조함수가 아닐 경우(즉 $z(t_f)$ 와 $v(t_f) - v_f$ 의 부호가 다를 경우), 1 차의 시간지연 시스템에 대해서 u_{\max} 은 $t=0$ 나 $u'(t')=0$ 가 되는 t' 에 존재한다.

$$u(t) = g_1 z(t_f) \left\{ \frac{1}{\alpha} \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) - \frac{1}{\alpha} + t_{g0} \right\} + g_2 [v(t_f) - v_f] \{1 - \text{Exp}(-\alpha t_{g0})\} \quad (\text{III-1})$$

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t_{g0}} = 0 = g_1 z(t_f) \{1 - \text{Exp}(-\alpha t_{g0})\} g_2 [v(t_f) - v_f] \alpha \text{Exp}(-\alpha t_{g0}) \quad (\text{III-2})$$

식 (III-2) 를 만족하는 t_{g0}' 는 다음과 같이 주어진다.

$$t_{g0}' = t_f - t' = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{g_1 z(t_f) - g_2 [v(t_f) - v_f] \alpha}{g_1 z(t_f)} \quad (\text{III-3})$$

$z(t_f)$ 와 $v(t_f) - v_f$ 의 부호가 다를 경우 t' 는 언제나 $t=0$ 와 $t=t_f$ 사이에 존재한다. $t = t'$ 에서의 유도명령은 다음과 같다.

$$u(t') = \frac{g_1 z(t_f)}{\alpha} \ln \frac{g_1 z(t_f) - g_2 [v(t_f) - v_f] \alpha}{g_1 z(t_f)} + g_2 [v(t_f) - v_f] \quad (\text{III-4})$$

따라서 최대유도명령은 다음과 같이 주어진다.

$$u_{\max} = \max[\|u(0)\|, \|u(t')\|] \quad (\text{III-5})$$

참고문헌

[1] I. Rusnak, L. Meir, "Optimal Guidance for High-Order and Acceleration Constrained Missile," Journal of Guidance, Vol. 14, No. 3, 1991, pp. 589-596.

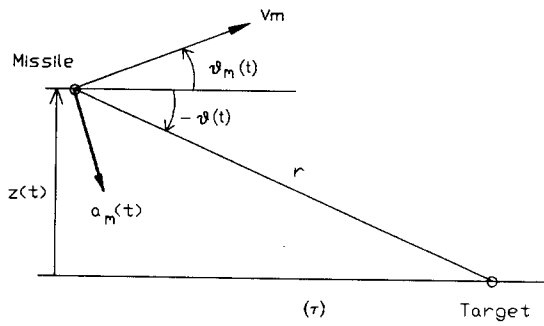


그림 1. 유도 기하(guidance geometry)

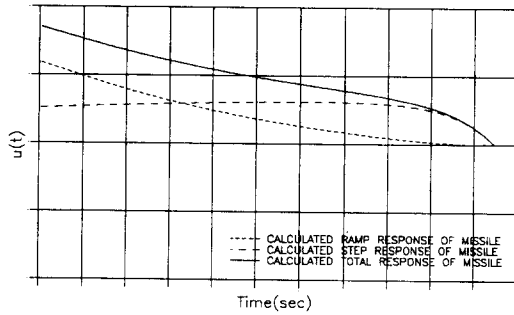


그림 2. a) $z(t_f), v(t_f)-v_f > 0$ 일때 $u(t)$

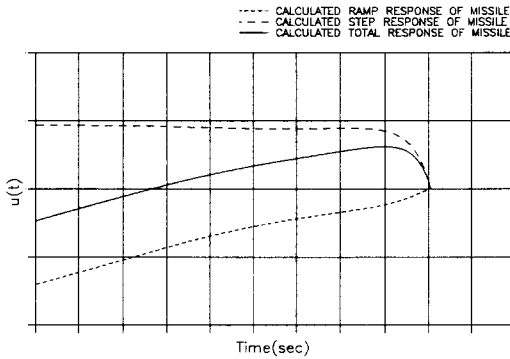


그림 2. b) $z(t_f) < 0, v(t_f)-v_f > 0$ 일때 $u(t)$

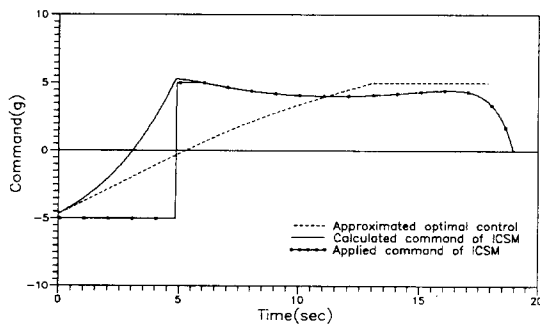


그림 3. $\theta_m(0)=0^\circ, \theta_m(0)=-60^\circ, U_0=5g$ 일때 $u(t)$
근사해법이 유도말기에만 포화되는 경우

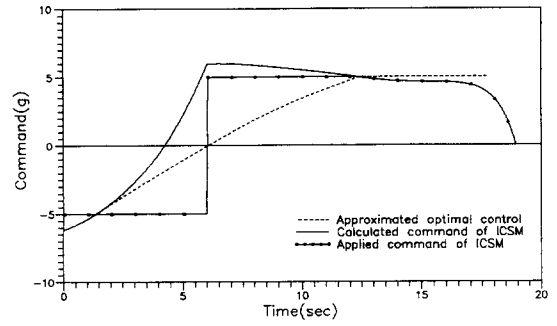


그림 4. $\theta_m(0)=-10^\circ, \theta_m(0)=-60^\circ, U_0=5g$ 일때 $u(t)$
근사해법이 유도초기와 말기에 포화되는 경우

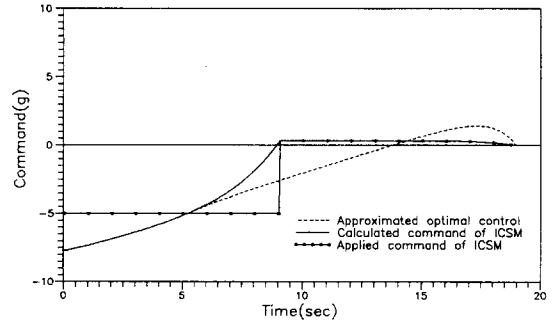


그림 5. $\theta_m(0)=-60^\circ, \theta_m(0)=20^\circ, U_0=5g$ 일때 $u(t)$
근사해법이 유도초기에만 포화되는 경우

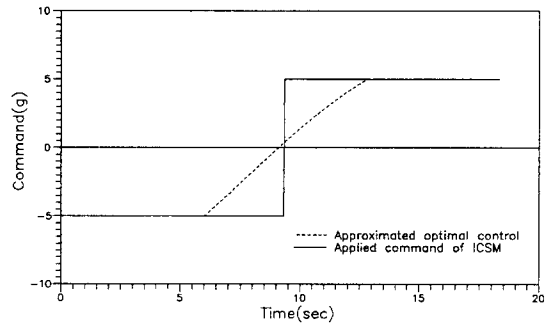


그림 6. $\theta_m(0)=-40^\circ, \theta_m(0)=-40^\circ, U_0=5g$ 일때 $u(t)$
ICSM 에 의한 명령이 유도말기까지 포화되는 경우

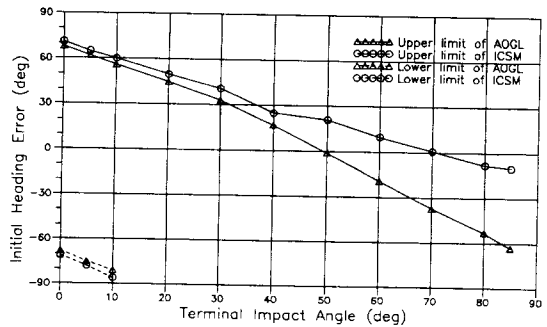


그림 7. 두 유도방법이 주어진 표적충돌각에 대해 유도오차를 발생 시키지 않는 초기값의 최댓값과 최솟값