

## 로봇 매니플레이터에 대한 비례·적분·미분 조절기 설계

남 현성, 김 천중, 유 준  
충남대학교 전자공학과

## PID Regulator Design for Robot Manipulators

Heon Seong Nam, Cheon Joong Kim and Joon Lyou  
Dept. of Electronics Eng., Chungnam National Univ.

## Abstract

This paper presents a model-based control scheme for a robot manipulator to track a desired trajectory as closely as possible in spite of a wide range of manipulator motions and parameter uncertainties of links and payload. The scheme has two components: a nominal control and a variational control. The nominal control, generated from direct calculation of the manipulator dynamics along a desired trajectory, drives the manipulator to a neighborhood of the trajectory. Then a discrete-time PID regulator is designed based on the linearized dynamic model and Linear Quadratic(LQ) method, which generates the variational control that regulates perturbations in the vicinity of the desired trajectory.

## 1. 서론

산업용 로봇에 적용되고 있는 제어기는 일반적으로 미리 결정된 상수 이득(gain)에 의해 각 조인트(joint)가 독립적으로 제어되는 독립 조인트 제어기를 기본으로 하고 있다. 그러나 이러한 제어기는 짐이 옮겨 놓기와 같은 단순한 작업은 원만히 수행할 수 있으나 부하(payload)가 변할때 또는 빠른 궤적을 추종할 경우 만족할 만한 결과를 얻을 수 없다. 이는 비선형적이고, 조인트 운동간의 상호연관이 심하고 시스템 파라미터(parameter)에 불확실성이 내포된(예: 부하 하중의 변동) 매니플레이터의 동특성을 직접적으로 고려하지 않았기 때문이다.

독립 조인트 제어기가 갖는 문제점을 보완하기 위하여 매니플레이터의 동적 모델에 기반을 둔 방법(Model-based Method)이 제시되어 왔다[1-4]. 그러나 이 방법은 비교적 정확한 모델을 요구하고, 특히 Computed Torque Method[1]는 부하 하중이 변하거나 또는 중력항에 모델링 오차가 클때 정상상태 오차를 유발하는 것으로 알려져 있다[3,4].

본 논문에서는 매니플레이터가 주어진 경로를 가능하면 근접되게 따라가도록 하기 위한 제어방식으로 nominal제어와 variational제어로 구성된 형태[5]가 사용되었다. 여기서 nominal제어는 매니플레이터의 비선형성과 상호결합성을 보상하기 위한 부분으로 nominal 모델 및 기준경로로부터 직접 계산되며, variational제어는 부하하중이나 링크(link) 파라미

터들의 불확실성에 의해 주어진 경로로부터 벗어나는 미소변화량을 보상하는 부분으로 비례·미분·적분(PID)작용으로 이루어진다. 이산시간 PID 제어기의 설계법이 제시되었고, 시뮬레이션을 통하여 기존의 Computed Torque Method와 비교되었다.

## 2. 매니플레이터의 선형 상태방정식

$n$ 개의 조인트로 구성된 매니플레이터의 동역학 방정식은 다음과 같이 2차 비선형 벡터 미분방정식으로 표현될 수 있다.

$$D(q) \cdot \ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q, \dot{q}) = \tau \quad (1)$$

여기서  $q$ 는  $n$ 차원의 조인트 각위치 벡터,  $\dot{q}$ 는 각속도 벡터,  $\ddot{q}$ 는 각가속도 벡터,  $D(q)$ 는 symmetric positive definite한  $n \times n$  관성행렬,  $c(q, \dot{q})$ 는  $n$ 차원의 원심력과 코리올리스(Coriolis)력 벡터,  $g(q, \dot{q})$ 는  $n$ 차원의 중력 및 마찰력 벡터,  $\tau$ 는 조인트에 가해지는  $n$ 차원의 토크(torque) 벡터이다.

(1)에 대한 nominal모델이 알려져 있다 하자. 또한 매니플레이터의 각 조인트가 추종할 원하는 궤적이  $(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ 로 주어졌다고 하자. 그러면 nominal모델을 기반으로 기준궤적에 대해 선형화된 섭동(perturbation)방정식은 다음과 같이 주어진다[6].

$$D(q_d) \cdot \ddot{\tilde{q}} + (S_{c1} + S_{c2}) \cdot \dot{\tilde{q}} + (S_D + S_{c2} + S_{c2}) \cdot \tilde{q} = u \quad (2)$$

여기서

$$\tilde{q} = q - q_d \quad (2.a)$$

$$S_{c1} = \frac{\partial c(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \bigg|_{q_d, \dot{q}_d} \quad (2.b)$$

$$S_{c2} = \frac{\partial g(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \bigg|_{q_d, \dot{q}_d} \quad (2.c)$$

$$S_b = \frac{\partial(D(q) \cdot \ddot{q}_d)}{\partial \dot{q}} \Bigg|_{\dot{q}_d, \ddot{q}_d} \quad (2.d)$$

$$S_{c2} = \frac{\partial c(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \Bigg|_{\dot{q}_d, \ddot{q}_d} \quad (2.e)$$

$$S_{g2} = \frac{\partial g(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \Bigg|_{\dot{q}_d, \ddot{q}_d} \quad (2.f)$$

$$u = \tau - \tau_n \quad (2.g)$$

(2.a)의  $\ddot{q}$ 은 기준궤적 추종오차이고, 조인트에 가해줄 실제 토오크 입력  $\tau$ 는 (2.g)에서와 같이 variational 토오크  $u$ 와 nominal 토오크  $\tau_n$ 로 구성된다. 참고로  $\tau_n$ 은 nominal 동적모형을 기반으로 기준궤적 정보를 사용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\tau_n = D(q_d) \cdot \ddot{q}_d + c(q_d, \dot{q}_d) + g(q_d, \dot{q}_d) \quad (3)$$

$\tilde{q}$ 과  $\dot{\tilde{q}}$ 을 상태변수로 택하여 식(2)를 상태방정식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u \quad (4)$$

여기서

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \quad (4.a)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -D^{-1}(q_d) \cdot (S_p + S_{c2} + S_{g2}) & -D^{-1}(q_d) \cdot (S_{c1} + S_{g1}) \end{bmatrix} \quad (4.b)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0_n \\ D^{-1}(q_d) \end{bmatrix} \quad (4.c)$$

아울러 이산(discrete-time)형 제어기의 설계를 위하여 식(4)의 연속시간 상태방정식을 이산화시키면 다음과 같다.

$$x(k+1) = \Phi(k) \cdot x(k) + \Gamma(k) \cdot u(k) \quad (5)$$

여기서

$$\Phi(k) \approx I + A(k) \cdot T + (1/2) \cdot A^2(k) \cdot T^2 \quad (5.a)$$

$$\Gamma(k) \approx B(k) \cdot T + (1/2) \cdot A(k) \cdot B(k) \cdot T^2 \quad (5.b)$$

T : 표본(sampling)시간

### 3. 이산형 PID 조절기의 설계

매니퓰레이터의 제어문제는 주어진 궤적을 충실히 추적할 수 있도록 각 조인트에 가해줄 토오크 벡터  $\tau$ 를 구하는 것이다. 본 논문에서는 매니퓰레이터에 관한 nominal 모델을 기반으로 매니퓰레이터의 비선형성과 상호결합성을 보상하기 위한 nominal 토오크와 부하하중 또는 링크파라미터들의 불확실성에 의해 주어진 경로로부터 벗어나는 미소변화량을 보상하기 위해 PID 작용으로부터 생성되는 variational 토오크를 합하여 제어입력을 구하도록 한다.

PID 제어기의 설계를 위하여 먼저 적분에 관한 상태변수를 도입하자.

$$x_I(k+1) = x_I(k) + \tilde{q}(k) \quad (6)$$

그리고 (6)을 (5)에 병합하여(augment) 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y(k+1) = F(k) \cdot y(k) + G(k) \cdot u(k) \quad (7)$$

여기서

$$y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} \quad (7.a)$$

$$F(k) = \begin{bmatrix} \Phi(k) & 0_n \\ \frac{I_n}{T} & I_n \end{bmatrix} \quad (7.b)$$

$$G(k) = \begin{bmatrix} \Gamma(k) \\ 0_n \end{bmatrix} \quad (7.c)$$

이제 (7)의  $y(k)$ 를 0으로 보내기 위한, 즉 추종오차를 가능하면 작게 하기 위한 제어법칙을 다음과 같이 정하자.

$$u(k) = K(k) \cdot y(k) \quad (8)$$

$$K(k) = [K_P(k) \mid K_D(k) \mid K_I(k)] \quad (8.a)$$

여기서  $K_P$ 는 비례이득,  $K_D$ 는 미분이득,  $K_I$ 는 적분이득이다.

남은 문제는 (8.a)의 PID이득을 결정하는 것인데 본 논문에서는 LQ(Linear Quadratic) 설계법[7]을 이용하여 구한다. 좀 더 구체적으로 quadratic 형태의 성능지수(performance index)를 도입하여

$$V = \sum_{k=1}^{k_f} [y^T(k) \cdot Q \cdot y(k) + u^T(k-1) \cdot R \cdot u(k-1)] \quad (9)$$

(8)의 상태궤환 제어구조 아래서 성능지수를 최소화하는 PID 이득은 다음과 같이 구해진다.

$$K(k) = -[G^T(k) \cdot \bar{Q}(k+1) \cdot G(k) + R]^{-1} \cdot G^T(k) \cdot \bar{Q}(k+1) \cdot F(k) \quad (10)$$

여기서

$$\bar{Q}(k+1) = Q + P(k+1) \quad (10.a)$$

$$P(k) = F^T(k) \cdot [\bar{Q}(k+1) - \bar{Q}(k+1) \cdot G(k) \cdot [G^T(k) \cdot \bar{Q}(k+1) \cdot G(k) + R]^{-1} \cdot G^T(k) \cdot \bar{Q}(k+1)] \cdot F(k) \quad (10.b)$$

$$P(k_f) = 0 \quad (10.c)$$

(9)에서 Q와 R은 symmetric positive definite한 임의의 가중행렬이고,  $k_f$ 는 최종시각이다. 참고로 (10)의 K(k)는 ( $k_f-1$ ) 순간부터 초기시각( $k=0$ )까지 거꾸로 계산되며 이를 미리 저장해 놓고 매순간 불러서 사용하게 된다.

전체 제어기는 그림 1과 같이 구성되며, 실제 토크 입력  $\tau$ 는 nominal토크 (3)과 variational토크 (8)을 합성하여 매순간마다 조인트에 가해지게 된다.

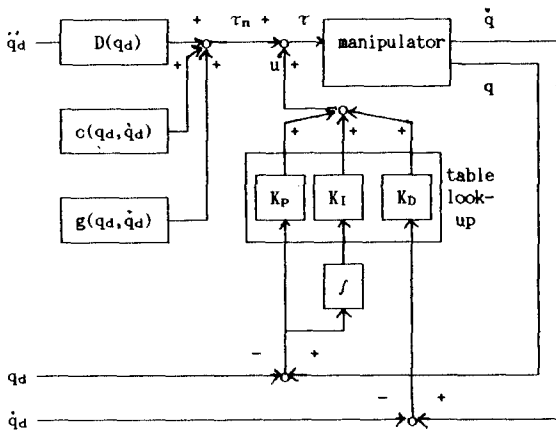


그림 1. 전체 제어기의 구조

#### 4. 시뮬레이션 결과

수직 평면상을 움직이고, 동력이 gear를 통하지 않고 직접 전달되는 수직 2-관절 직결구동형 강체(rigid) 매니플레이터를 컴퓨터 시뮬레이션 대상으로 삼았다. 대상모델의 동적 파라미터들은 다음과 같이 주어지며[8], 이의 실제 외관은 PUMA 560 매니플레이터의 링크 2와 3이 연결된 모습에 해당한다.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= 3.82 + 2.12\cos(q_2) + 2m(0.432)^2(1 + \cos(q_2)) \\ d_{12} &= d_{21} = 0.71 + 1.06\cos(q_2) + m(0.432)^2(1 + \cos(q_2)) \\ d_{22} &= 0.71 + m(0.432)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -2.12\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - 1.06\sin(q_2)\dot{q}_2^2 \\ &\quad - 2m(0.432)^2\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - m(0.432)^2\sin(q_2)\dot{q}_2^2 \\ c_2 &= 1.06\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + m(0.432)^2\sin(q_2)\dot{q}_1^2 \\ g_1 &= 81.82\cos(q_1) + 24.06\cos(q_1 + q_2) + \dot{q}_1 \\ &\quad + m(4.238)(\cos(q_1) + \cos(q_1 + q_2)) \\ g_2 &= 24.06\cos(q_1 + q_2) + \dot{q}_2 + m(4.238)\cos(q_1 + q_2) \\ m &= 5 \text{ kg (payload)} \end{aligned}$$

기준궤적이 초기위치( $q_{d1} = -\pi/2, q_{d2} = 0$ )로부터 최종위치( $q_{d1} = 0, q_{d2} = \pi/2$ )까지 5초 동안에 완만하게(smoothly) 움직이도록 계획되었다.  $q_{d1}$ 는 아래와 같이 주어지며  $\dot{q}_{d1}, \ddot{q}_{d1}$ 은  $q_{d1}$ 로부터 미분하여 구할 수 있기때문에 생략한다. 이러한 경로는 직교좌표(좌표공간)상에서 볼때 Cycloid 모양을 그린다.

$$\begin{aligned} q_{d1} &= -(\pi/2) + (1/4)\{2\pi t/3 - \sin(2\pi t/3)\} \text{ rad} & 0 \leq t \leq 5 \\ &= 0 & 5 < t \\ q_{d2} &= (1/4)\{2\pi t/3 - \sin(2\pi t/3)\} & 0 \leq t \leq 5 \\ &= \pi/2 & 5 < t \end{aligned}$$

nominal모델에서는 매니플레이터가 3kg를 들고 움직이는 것으로 간주하였다. nominal모델을 기준궤적에 대하여 선형화하고 표본시간을 2ms로 삼아 선형 이산시간 상태방정식 (7)의 계수행렬 F(k)와 G(k)를 계산하였다. 또한 성능지수 (9)의 가중행렬 Q, R을 다음과 같이 선택하고

$$Q = 100I_6, \quad R = 0.5I_2$$

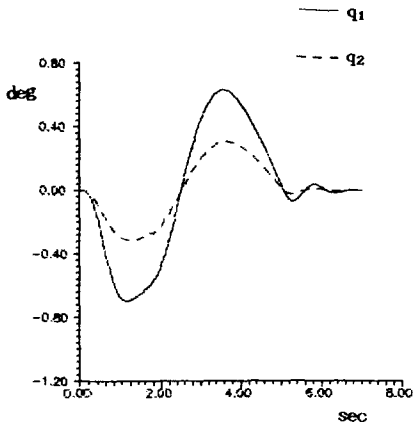
(10)~(10.c)식을 풀어서 PID 이득을 200ms마다 저장해 두었다(이는 저장량을 줄이기 위함이다).

이제 대상 매니플레이터에 대해 본 PID 조절 방식을 적용한 컴퓨터 모사가 수행되었다. 저장된 PID 이득을 불러 variational토크를 구하고 nominal토크와 합한 입력을 매 2ms마다 조인트에 가하였을 때의 결과가 그림 2에 주어져 있다. 그림 2의 (a)는 각 조인트의 위치가 0.8° 범위내의 오차를 가지고 기준궤적을 잘 추종하고 있음을 보여주고 있다. (b)는 이때의 토크 입력을 도시한 것이고, (c)는 적분이득의 변화를 나타낸 것이다.

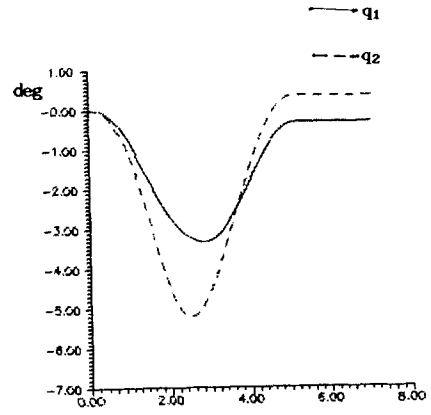
한편으로 본 제어방식과의 성능비교를 위하여 Computed Torque Method를 적용한 컴퓨터 모사가 별도로 수행되었다. 아래와 같은 토크 입력을 매 2ms마다 가하였을 때의 결과가 그림 3에 주어져 있다.

$$\tau = D(q)(\ddot{q}_d - K_p\dot{q} - K_d\dot{q}) + c(q, \dot{q}) + g(q, \dot{q})$$

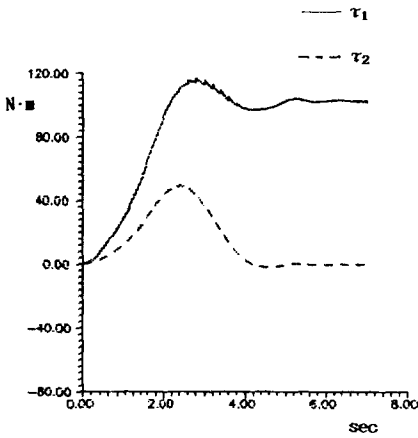
여기서  $K_p = 400, K_d = 40$ . 그림 3에서 보는 바와 같이 위치 오차가 크게 증가하고 최종 위치오차가 더 이상 줄어들지 않음을 알 수 있다.



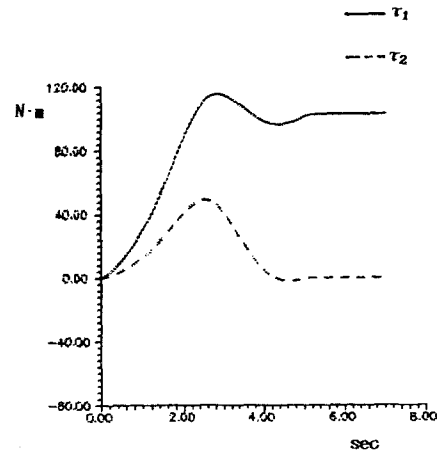
(a) 위치오차



(a) 위치오차

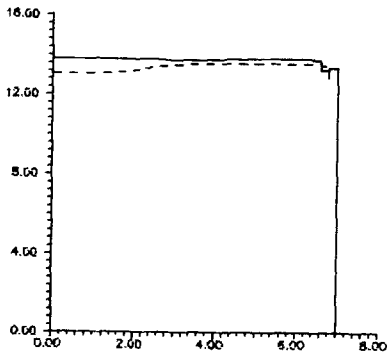


(b) 토크 입력



(b) 토크 입력

그림 3. Computed Torque Method에 의한 결과



(c) 적분이득

그림 2. 본 제어방식에 의한 결과

### 5. 결론

본 논문에서는 매니퓰레이터가 주어진 경로를 가능하면 근접하게 따라가도록 하기 위한 동적 제어방식으로 nominal제어와 variational제어로 구성된 model-based method가 제시되었다. 여기서 nominal토크는 매니퓰레이터의 비선형성과 상호결합성을 보상하기 위한 부분으로 nominal 모델 및 기준경로로부터 직접 계산되며, variational토크는 부하하중이나 링크 파라미터들의 불확실성에 의해 주어진 경로로부터 벗어나는 perturbation을 보상하기 위한 부분으로 PID 조절기를 통하여 생성된다. 본 제어방식에서는 nominal토크와 PID 이득을 off-line으로 계산하여 저장해 둬으로써 on-line 계산량을 크게 줄일 수 있고(토크 입력 계산주기를 단축할 수 있고), 적분기능을 도입함으로써 부하 하중이 변하거나 중력항에 모델링 오차가 클때 유발되었던 정상상태 오차를 개선할 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] J. Y. S. Luh, M. W. Walker and P. C. Paul, "On-line Computation Scheme for Mechanical Manipulators," ASME Trans. J. Dynam. Syst. Measure & Control, Vol. 102, pp. 69-76, 1980.
- [2] E. Freund, "Fast Nonlinear Control with Arbitrary Pole-Placement for Industrial Robots and Manipulators," Int. J. Robotics Research, Vol. 1, pp. 65-78, 1982.
- [3] S. Arimoto and F. Miyazaki, "Stability and Robustness of PID Feedback Control for Robot Manipulators of Sensor Capability," in M. Brady and R. P. Paul eds., Robotics Research: 1st Int. Symp., pp. 783-799, MIT Press, 1984.
- [4] G. L. Luo and G. N. Saridis, "LQ Design of PID Controllers for Robot Arms," IEEE J. Robotics and Automation, Vol. 1, no. 3, 1985.
- [5] C. S. G. Lee and M. J. Chung, "An Adaptive Control Strategy for Mechanical Manipulators," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. 29, pp. 837-840, 1984.
- [6] C. P. Neuman, "Linearization and Sensitivity Functions of Dynamic Robot Models," IEEE Trans. Sys. Man & Cyber., Vol. 14, no. 6, 1984.
- [7] B. D. O Anderson and J. B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, 1971.
- [8] H. Seraji, "Decentralized Adaptive Control of Manipulators: Theory, Simulation and Experimentation," IEEE J. Robotics and Automation, Vol. 5, pp. 183-201, 1989.