

칼만필터를 이용한 직류 모터의 속도조절

°김 천 중, 김 성 수, 유 준
충남대학교 전자공학과

Speed Regulation of DC Motor Using Kalman Filter

Cheon Joong Kim, Sung Soo Kim and Joon Lyou
Dept. of Electronics Eng., Chungnam National Univ.

Abstract

This paper presents a velocity regulation scheme for a DC motor subjected to random torque and velocity-measurement noises of white noise type as well as unknown constant load torque (bias). The scheme separately estimates an unknown bias in addition to state estimation by the bias-free Kalman Filter, and reflects the effect of the bias estimate to the armature input voltage such that velocity variations be regulated. It is shown via computer simulations that the performance of the present scheme is superior to that of the the conventional analog PI regulator.

1. 서론

직류모터(DC motor)는 회전속도가 입력전압에 비례하고 토크(torque)가 아마추어(armature) 전류에 비례하는 좋은 특성을 가지고 있기 때문에 교류모터에 비해 가격이 비싸다는 단점에도 불구하고 산업계의 각종 서보장치, 로봇 등에 널리 활용되고 있다.

그동안 직류모터의 속도 및 위치제어를 위하여 PID (비례-적분-미분) 또는 PI 제어기가 주로 사용되어 왔다[1]. 이는 갑작스런 부하(load) 토크가 모터축에 가해지더라도 기준속도나 위치를 비교적 잘 추종할 수 있도록 하기 때문이다.

본 논문에서는 좀 더 실제적인 상황을 고려하여 직류모터의 외부로부터 未知의 일정한 부하 토크(바이어스 : bias)와 불규칙 특성의 토크 잡음(백색잡음으로 가정)이 들어오고 속도측정치에 백색(white)잡음이 존재한다 할때, 바이어스 분리추정(separate bias estimation) 기능을 갖춘 칼만필터(Kalman Filter)[2,3]를 이용하여 속도조절기를 구성하는 방안이 제시되었다. 본 속도조절 방식은 부하 토크가 가해진 것을 검출하자 마자 바이어스 분리 추정기를 구동하여 미지의 바이어스 크기를 추정하고, 추정된 값을 아마추어 입력전압에 반영하여 부하 토크의 영향을 상쇄시켜 줌으로써 회전속도를 일정하게 유지시켜 줄 수 있다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 본 방식이 유효함을 알 수 있었고 기존의 analog PI 조절방식과 성능이 비교되었다.

2. 직류 모터의 상태방정식

타여자(separately excited) 직류모터의 상태방정식은 다음과 같이 표현된다[5].

$$\dot{\omega} = -\frac{B}{J}\omega + \frac{K_i}{J}i_a - \frac{1}{J}T_L \quad (1)$$

$$\dot{i}_a = -\frac{K_b}{L}\omega - \frac{R}{L}i_a + \frac{1}{L}e_a \quad (2)$$

여기서

- i_a = 아마추어 전류, A
- e_a = 아마추어 전압, V
- ω = 회전수, rad/sec
- B = 모터와 부하의 점성마찰계수, N-m/rad/sec
- J = 모터와 부하의 관성 모멘트, N-m/rad/sec²
- K_i = 토크 상수, N-m/A
- K_b = 역기전력 상수, V/rad/sec
- T_L = 부하 토크, N-m
- L = 아마추어 인덕턴스, H
- R = 아마추어 저항, Ω

이때 부하 토크에는 未知의 상수(바이어스)와 백색잡음이 포함되어 있고, 회전수 만이 측정 가능하되 측정치에는 백색 측정잡음이 존재한다고 가정한다.

$\omega(t)$ 와 $i_a(t)$ 를 상태변수로 선택하고, (1)과 (2)식을 상태방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cb + Cw(t) \quad (3)$$

여기서

$$x(t) = \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix}, \quad u = e_a \quad (3.a)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_i}{J} \\ \frac{K_b}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (3.b)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ - \\ J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.c)$$

b = 부하 토오크의 바이어스 성분 (3.d)

w = 평균(mean)이 0이고 공분산(covariance)이 Q인 백색 토오크 잡음 (3.e)

아울러 회전수를 T시간 간격으로 (sampling time : 표본 시간) 측정한다 했을 때 이산(discrete - time) 측정방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$y(kT) = Hx(kT) + v(kT) \quad (4)$$

여기서

$$y = \text{회전수의 측정치} \quad (4.a)$$

$$H = [1 \quad 0] \quad (4.b)$$

v = 평균이 0이고 공분산이 R이며 (4.c)
w(t)와 상관관계가 없는(uncorrelated)
백색 측정잡음

이산형 제어기를 설계하기 위하여 (3)식을 이산화 하면 다음의 이산시간 상태방정식을 얻는다[6].

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + E b(k) + \bar{C} w(k) \quad (5)$$

$$b(k+1) = b(k) \quad (5.a)$$

여기서 k는 kT의 생략된 표기이다. 또한

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ \Gamma &= B \int_0^T e^{A^t} dt \\ E &= C \int_0^T e^{A^t} dt \end{aligned}$$

$\bar{w} = (0, Q \approx QT)$ 인 백색 토오크 잡음

3. 속도 조절기의 구성

모터속도 조절의 목적은 외부에서 들어오는 부하 토오크와 무관하게 회전속도를 일정하게 유지하는데 있다. 본 논문에서는 (5)와 (4)식으로 주어지는 시스템에 대해 바이어스 분리추정 기능을 갖춘 칼만필터[2,3]를 이용하여 속도조절기를 구성하는 방안을 제시한다.

3.1 바이어스 분리추정

(5)와 (4)의 플랜트 모델에 대해 상태벡터 x(k)와 바이어스 b(k)를 분리추정하는 과정을 요약하면 다음과 같다. 먼저 바이어스가 없는 것처럼 간주하여 상태벡터를 추정하는 칼만필터의 계산 알고리즘에 대해 살펴보자.

1) 칼만 이득행렬을 계산하고 공분산 행렬을 보장한다.

$$K(k) = \bar{P}(k)H^T [H\bar{P}(k)H^T + R]^{-1} \quad (6)$$

$$P(k) = \bar{P}(k) - K(k)H\bar{P}(k) \quad (7)$$

2) 전 단계의 상태 추정치 $\hat{x}(k-1)$ 로부터 상태 예측치 $\bar{x}(k|k-1)$ 을 계산한다. (편의상 $\bar{x}(k|k-1)$ 을 $\bar{x}(k)$ 라 놓는다.)

$$\bar{x}(k) = \Phi \hat{x}(k-1) + \Gamma u(k) \quad (8)$$

3) $\bar{x}(k)$ 와 측정치 y(k)를 이용하여 칼만 필터의 잔여치를 얻는다.

$$\gamma(k) = y(k) - H(k)\bar{x}(k) \quad (9)$$

4) $\gamma(k)$ 와 $\bar{x}(k)$ 를 이용하여 상태 추정치를 얻는다.

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K(k)\gamma(k) \quad (10)$$

5) 공분산 행렬 P(k)는 시스템 동특성에 의하여 다음과 같이 전파된다.

$$\bar{P}(k+1) = \Phi P(k) \Phi^T + C Q C^T \quad (11)$$

6) 앞에서 계산된 $\bar{x}(k)$ 와 $\bar{P}(k+1)$ 을 가지고 단계 1)로 돌아가 다음 번 k에 대해 똑같은 과정을 수행한다.

다음으로 바이어스 분리추정 알고리즘은 다음과 같이 이루어진다.

1) 바이어스 추정기의 공분산 행렬을 계산한다.

$$M^{-1}(k+1) = M^{-1}(k) + S^T(k)[H\bar{P}(k)H^T + R]^{-1}S(k) \quad (12)$$

여기서

$$S(k) = HU(k) + E \quad (13)$$

$$V(k) = U(k) - K(k)S(k) \quad (14)$$

$$U(k+1) = \Phi V(k) \quad (15)$$

2) 바이어스 추정기의 이득을 계산한다.

$$K_b(k) = M(k+1)[V^T(k)H^T + E^T]R^{-1} \quad (16)$$

3) 바이어스 추정치를 구한다.

$$\hat{b}(k) = [I - K_b(k)S(k)]\hat{b}(k-1) + K_b(k)\gamma(k) \quad (17)$$

4) 추정된 $\hat{b}(k)$ 를 이용하여 칼만필터의 상태 추정치 $\hat{x}(k)$ 를 보정한다.

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + V(k)\hat{b}(k) \quad (18)$$

5) 칼만필터 단계 1)로 돌아가 다음번 k에 대해 똑같은 과정을 수행한다.

3.2 바이어스 발생 검출

바이어스(부하 토크)의 발생을 감지하기 위하여 칼만필터의 잔여치에 갑작스런 변동이 있나를 검사하는 방안[4]을 사용한다. 이 방안은 잔여치가 정상시에 머무르는 한계영역을 설정해 놓고 어떤 순간의 잔여치가 이 영역을 벗어나면 부하 토크가 직류 모터에 가해진 것으로 판정한다. 즉

$$|\hat{\gamma}(k)| \geq Th \text{ 이면 바이어스 발생} \quad (19)$$

여기서 $\hat{\gamma}(k) = y(k) - Hx(k)$ 이고, Th 는 한계영역을 규정하는 양의 상수이다. 정상상태에서 잔여치는 평균값이 0이고 백색잡음에 의한 영향만을 포함하고 있으므로 잔여치가 가질수 있는 범위를 조사함으로써 한계영역을 결정할 수 있다.

3.3 속도 조절기의 구조

직류 모터에 부하 토크가 가해진 것을 검출하자 마자 바이어스 분리 추정기를 구동하여 미지의 바이어스 크기를 추정하고, 추정된 값을 모터의 입력단에 반영하여 부하 토크의 영향을 상쇄시켜 줌으로써 회전속도를 일정하게 유지시킬 수 있다.

그림 1은 바이어스 분리 추정기를 이용한 본 속도 조절기의 구조를 보여주고 있다. 바이어스의 발생이 검출된 후 매 kT 순간마다 바이어스 추정치 $\hat{b}(k)$ 를 가지고 제어입력 $u(k)$ 를 다음과 같이 계산하여 모터의 아마추어 전압 e_a 에 인가한다.

$$u(k) = f\omega_r + g\hat{b}(k) \quad (20)$$

여기서 ω_r 은 ω 의 목표치이고, 비례상수 f , g 는 각각 전달함수 $\omega(s)/e_a(s)$, $e_a(s)/b(s)$ 의 직류 이득이다.

$$f = \frac{K_i}{K_b K_i + RB} \quad (20.a)$$

$$g = \frac{R}{K_i} \quad (20.b)$$

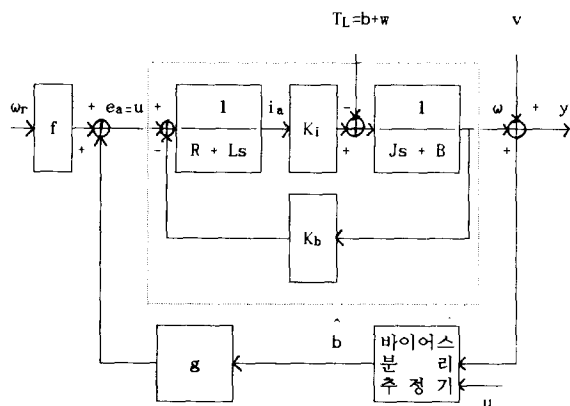


그림 1. 본 속도조절기의 블록선도

4. 시뮬레이션 결과

컴퓨터 시뮬레이션 대상으로 삼은 직류모터의 파라미터들은 다음과 같다[5].

$$\begin{aligned} J &= 0.02 \text{ N-m/rad/sec}^2 \\ B &= 0 \text{ N-m/rad/sec} \\ K_i &= 1 \text{ N-m/A} \\ K_b &= 1 \text{ V/rad/sec} \\ L &= 0.005 \text{ H} \\ R &= 1 \Omega \end{aligned}$$

회전속도의 목표치 ω_r 은 1 rad/sec로 두었으며, 부하 토크(T_L)은 직류모터가 기준속도로 회전하고 있는 중에 1 N-m의 바이어스(b)와 평균이 0이고 1σ 가 0.05 N-m인 백색 토크 잡음(w)이 섞여서 가해지는 것으로 가정하였다. 또한 추정방정식에는 평균이 0이고 1σ 가 0.01 rad/sec인 백색 측정잡음(v)를 포함시켰다.

이제 대상 직류모터에 대한 본 속도조절 방식을 적용한 컴퓨터 모사가 수행되었다. 먼저 표본시간 T 를 1ms로 하여 이산시간 상태방정식 (5)의 계수행렬들을 구하였다. 그리고 나서 (6) ~ (11)식으로 주어지는 정상적인(bias-free) 칼만필터를 실행시켜서 공분산 보강 및 잔여치 조사를 거듭하다가, (19)의 논리에 의하여 바이어스의 발생이 검출되면 (12) ~ (18)식의 추정기를 구동하여 바이어스 크기 \hat{b} 를 추정하고 (20)과 같이 제어입력을 계산하여 매 1ms마다 아마추어 전압에 인가하였다. 잔여치의 임계값 Th 를 0.1로 설정하고, 정상적인 칼만필터의 초기 공분산 $P(0)$ 와 바이어스 분리 추정기의 초기 공분산 $M(0)$ 를 각각 $10I_2$ 와 1로 취하여 시뮬레이션한 결과가 그림 2 ~ 3에 주어져 있다. 그림 2에서 보듯이 잔여치의 특성은 바이어스의 발생을 검출하는데 필요한 단서를 제공한다. 즉 잔여치는 정상상태에서 대략 0을 나타내지만, 바이어스가 들어오면 갑자기 크게 증가한다. 따라서 바이어스의 발생순간을 정확하게 포착할 수 있다. 그림 3의 (a)는 바이어스 분리 추정기에 의해 추정된 바이어스 형태를 도시하고, (b)와 (c)는 모터축의 실제 회전속도와 아마추어에 흐르는 실제 전류 뿐만 아니라 (18)식을 통해 얻을 수 있는 이들의 추정치를 보여주고 있다. 그림 3에서 보는 바와 같이 미지의 바이어스 크기를 잘 추정하여 아마추어 입력전압에 바이어스 영향을 반영해 줌으로써 빠른 시간내에(60 ms) 기준속도로 복귀함을 알 수 있다.

한편으로 본 속도조절 방식과의 성능비교를 위하여 기존의 analog PI 제어기를 적용한 컴퓨터 모사가 별도로 수행되었다. 이때 PI이득은 근궤적(root locus) 방법을 사용하여 $k_p = 0.65$, $k_i = 90k_p$ 로 정하였으며, 아래와 같은 입력전압을 아마추어에 가하였을 때의 결과가 그림 4에 주어져 있다.

$$u(t) = k_p(\omega_r - y(t)) + k_i \int_0^t (\omega_r - y(\tau)) d\tau$$

그림 3과 4를 비교하여 볼때 바이어스 분리추정에 의한 본 속도조절 방식이 기존의 analog PI조절기에 비해 부하 토오크에 따른 회전속도의 변화량이 적고 기준속도로의 복귀시간이 짧다는 의미에서 성능이 우수함을 알 수 있다.

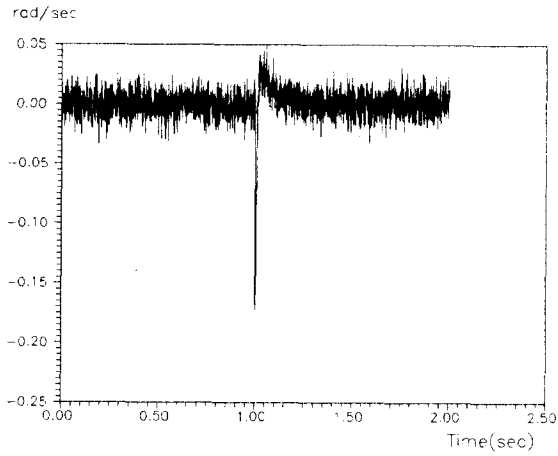
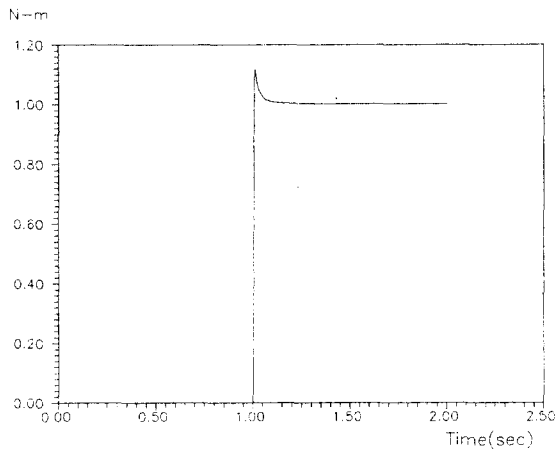
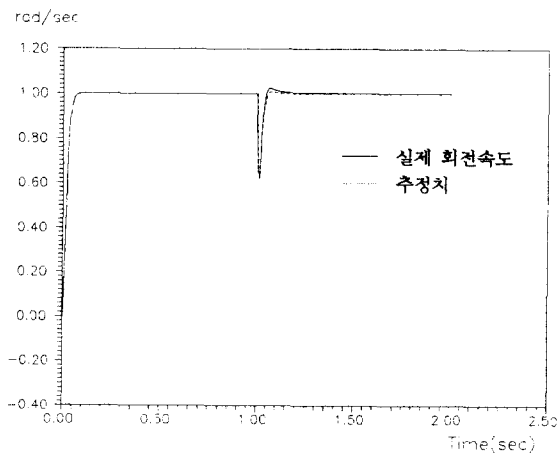


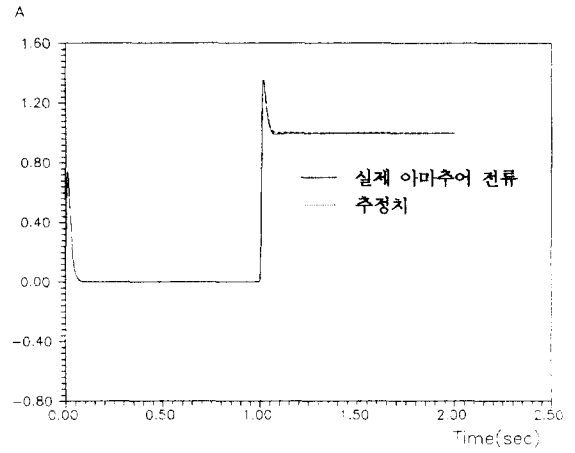
그림 2. 칼만필터의 잔여치 : $\bar{\gamma}(t)$



(a) 추정된 바이어스 : $\hat{b}(t)$

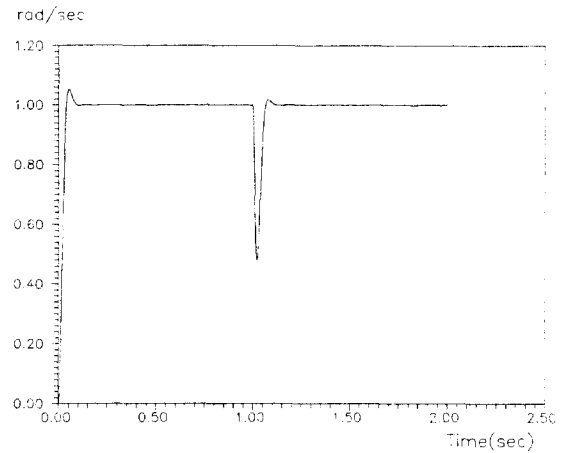


(b) 실제 회전속도 및 추정치 : $\omega(t)$ 및 $\hat{\omega}(t)$

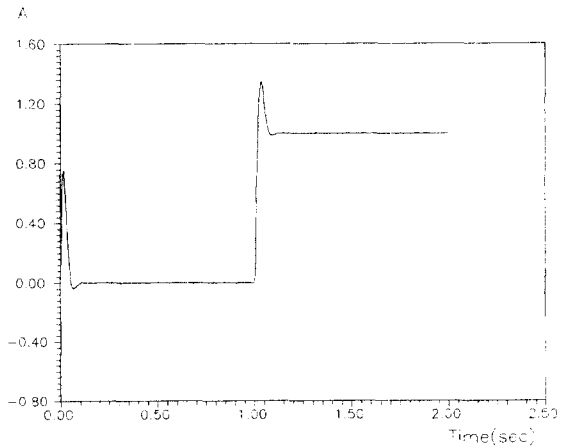


(c) 실제 아마추어 전류 및 추정치 : $i_a(t)$ 및 $\hat{i}_a(t)$

그림 3. 본 속도조절 방식에 의한 결과



(a) 실제 회전속도 : $\omega(t)$



(b) 아마추어 전류 : $i_a(t)$

그림 4. analog PI 조절기에 의한 결과

5. 결론

직류모터의 회전속도가 미지의 상수 부하 토오크와 토오크 및 속도측정 백색잡음으로 인하여 기준속도로 부터 벗어나는 정도를 가능하면 줄이기 위하여 정상적인 칼만필터와 바이어스 분리 추정기를 이용한 속도조절 방식이 제시되었다. 제시된 방식은 부하 토오크의 발생이 감지되면 직류모터의 속도 측정치를 가지고 부하 토오크의 크기를 바이어스 분리 추정기로 추정하여 그 추정치를 아마추어 입력전압에 반영해 준다. 이는 외부 토오크의 영향을 상쇄시키는 작용을 하여 빠른 시간내에 기준속도로 복귀시키는 역할을 한다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 본 속도조절 방식에 의한 시스템 성능이 기존의 analog PI 조절기를 사용한 경우에 비해 부하 토오크에 따른 회전속도의 변화량이 적고 기준속도로의 복귀시간이 짧다는 의미에서 우수함을 확인하였다.

앞으로 실제 적용실험을 통해 본 속도조절 방식의 유용성을 검토하는 것이 남은 과제이다.

참 고 문 헌

- [1] A. Kusko, Solid-State DC Motor Drives, MIT Press, 1969.
- [2] B. Friedland, "Treatment of Bias in Recursive Filtering," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 14, pp. 359-367, 1969.
- [3] B. Friedland, "Notes on Separated-Bias Estimation," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 23, 735-738, 1978.
- [4] A. S. Willsky, "A Survey of Design Methods for Failure Detection Systems," Automatica, Vol. 14, pp. 601-611, 1976.
- [5] B. C. Kuo, Automatic Control Systems, 5th ed., Prentice-Hall, 1987.
- [6] G. F. Franklin et al., Digital Control of Dynamic Systems, 2nd ed., Addison - Wesley, 1990.