

# H<sub>2</sub> 준최적제어기의 변수화를 이용한 혼합된 H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> 최적제어기 설계

류동기    방경호    윤한오    박홍배  
경북대학교    공과대학    전자공학과

## Mixed H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> optimal controller design using parameterization of H<sub>2</sub> suboptimal controller

Dong Ki Ryu, Kyeong Ho Bang, Han O Yun, and Hong Bae Park  
Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l. Univ.

### Abstract

In this paper, we proposed a mixed H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> optimal controller design method using the parameterization of H<sub>2</sub> suboptimal controller. The method is based on the minimization of H<sub>2</sub> performance measure with an H<sub>∞</sub>-norm constraint. We also derived the necessary and sufficient conditions for existence of solution from the decoupled Riccati equations. And the designed controller has state-space representation.

### 1. 서론

Zames[8]가 H<sub>∞</sub> 제어기설계기법을 제안한 이후 이 분야에 관한 연구가 활발히 진행되어 오고 있다[2],[4],[5],[9]. H<sub>∞</sub> 제어기설계는 시스템의 내외부의 불확실성에 대한 안정성을 보장하는 견실한 안정화문제에 기근에 경험적으로 설명되는 여러 가지 요소들을 수학적 모델로 표현할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 방법만으로 다양한 설계사양을 만족하기가 어렵기 때문에 성능최적화 문제로 널리 알려진 H<sub>2</sub>설계기법과 연관한 제어기설계가 최근 많은 관심을 받고 있으며[1],[3],[6],[7] 이를 혼합된 H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> 문제라 한다. 이전의 연구에서는 해가 존재할 조건을 완벽하게 제시하지 못하였으며, 또한 조건들이 결합된 Riccati 방정식으로 표현되어 직접적으로 해를 구할 수 없다.

본 논문에서는 H<sub>2</sub>준최적 제어기의 변수화를 이용하여 분리된 Riccati 방정식으로부터 해가 존재할 필요충분조건을 유도하고, H<sub>∞</sub>-norm제한을 만족하며 H<sub>2</sub>-norm을 최소화하는 제어기를 설계한다. 해가 존재할 필요충분조건은 순수 H<sub>∞</sub> 문제의 해가 존재할 필요충분조건과 매우 유사하고 제어기는 상태공간표현으로 된다. 또한 Rotea 등[7]이 추측한 것처럼 출력궤환 시스템에서 혼합된 H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> 제어기의 차수는 플랜트의 차수보다 커짐을 보인다. 마지막으로 H<sub>∞</sub>-norm제한이 가질 수 있는 범위 및 의미에 대해 알아 보고자 한다.

### 2. 표기법 및 정의

Hardy spaces H<sub>2</sub>와 H<sub>2</sub><sup>-</sup>는 각각 복소평면의 개우반(open right), 개좌반(open left)평면에서 해석적이며 허수축에서 제곱-적분가능한 함수(square-integral function)들로 구성된다. Hardy space H<sub>∞</sub>는 개우반 평면에서 해석적이며 한정된 함수들로 구성된다. H<sub>2</sub>는 Hilbert space이고, H<sub>∞</sub>는 Banach space를 나타내며 문자앞의 R은 실수를 뜻한다.

전달함수행렬의 상태공간 표현은

$$G(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.1)$$

로 정의한다. 상수행렬 M ∈ C<sup>p×q</sup> 또는 R<sup>p×q</sup>에 대해 M<sup>T</sup>는 행렬 M의 전치(transpose)이고, M\*를 행렬 M의 켈레전치(conjugate transpose)이다. σ<sub>max</sub>(M) := ρ(M\*M)<sup>1/2</sup>는 M의 최대 특이치(singular value), ρ(M)를 spectral radius, Im M은 행렬 M의 Null space를 나타낸다. G<sup>-</sup>(s) := G<sup>T</sup>(-s)로 정의하며 H<sub>2</sub>와 H<sub>∞</sub>의 norm의 정의는 각각 아래와 같다.

$$\|G(s)\|_2 := \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

$$\|G(s)\|_{\infty} := \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}[G(j\omega)] \quad (2.3)$$

A, R, Q를 n × n 실수 행렬이라면 2n × 2n Hamiltonian 행렬은

$$H := \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

로 정의하고, H는 허수축에 고유치를 가지지 않는다고 가정한다. 여기서 대수 Riccati 방정식

$$A^T X + XA - XRX + Q = 0 \quad (2.5)$$

을 만족하는 해,  $X := Ric(H)$ 로 정의하고, Ric는 H를 X로 사상하는 연산자이며  $dom(Ric)$ 는 Ric의 정의역이다.

### 3. 혼합된 $H_2/H_\infty$ 문제 제시

혼합된  $H_2/H_\infty$  문제의 표준블럭선도가 그림 3.1과 같이 주어 있다.

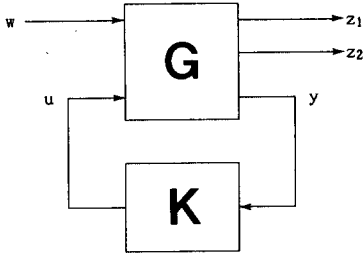


그림 3.1. 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제의 표준블럭선도

G와 K는 유한한-차원(finite-dimensional)을 가지는 선형 시불변 시스템이고 G는 공칭플랜트와 하중함수를 포함하는 일반적인 플랜트이다. w는 외란, 측정오차, 기준입력등을 포함하는 외부입력;  $z_1$ 과  $z_2$ 는 제어될 출력; u는 제어입력; y는 측정출력이다. w에서  $z_1, z_2$ 까지의 페루프 전달함수행렬을 각각  $T_1(K), T_2(K)$ 라 하자.

그림 3.1과 같은 구조는 외부입력에 대한 두가지 해석이 가능하다. 즉, 성능최적화 문제인  $H_2$ 문제로 해석할 때 w를 평균이 영인 백색잡음으로 가정하고, 견실한 안정화문제인  $H_\infty$  문제로 해석할 때 w를 한정된 에너지를 가지는 확정적 신호로 가정한다.

혼합된  $H_2/H_\infty$  최적문제 : 그림 3.1에서 주어진 G에 대해 다음

$$\inf \{ \|T_1(K)\|_2 \mid K \text{ admissible with } \|T_2(K)\|_\infty < \gamma \}$$

을 만족하는 제어기 K를 찾는 문제이다. 여기서 안정가능(stabilizable)하고 관측가능한(detectable) K가 시스템을 내부적으로 안정화할 때 admissible이라 한다.  $\gamma$ 의 선택에 따라 견실한 안정화문제와 성능최적화 문제는 서로 상호보완(tradeoff)관계가 되므로  $\gamma$ 는 제어기 설계할 때 조정인자로 사용할 수 있다.

전달함수행렬  $G(s)$ 의 구현화는

$$G(s) := \begin{array}{c} \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ y \end{array} \left\{ \begin{array}{c|cc} & w & u \\ \hline & A & B_1 \quad B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 \\ C_2 & 0 & D_2 \\ C_3 & D_3 & 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (3.1)$$

이고 다음과 같은 가정을 한다.

- i)  $(A, B_1)$ 는 안정화가가능하고,  $(C_1, A)$ 는 관측가능하다.
- ii)  $(A, B_2)$ 는 안정화가가능하고,  $(C_3, A)$ 는 관측가능하다.
- iii)  $D_1^T [C_1 \ D_1] = [0 \ I]$
- iv)  $D_2^T [C_2 \ D_2] = [0 \ I]$
- v)  $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_3 \end{bmatrix} D_3^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

### 4. 혼합된 $H_2/H_\infty$ 제어기 설계

이 절에서는 Rotea 등[7]에 의해 제안된 상태궤환 시스템에서의 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제를 알아보고, 출력궤환 시스템에서는 확장된 새로운 방법을 알아 본다.

#### 4.1. 상태궤환

Rotea 등은 플랜트 G의 상태공간 표현을 아래와 같이 가정하였고,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w_1 + B_2 w_2 + B_3 u \\ z_1 &= C_1 x + D_1 u \\ z_2 &= C_2 x + D_2 u \\ y &= x \end{aligned} \quad (4.1)$$

$w_1$ 에서  $z_1$ 과  $w_2$ 에서  $z_2$ 까지의 전달함수행렬을 각각  $T_1(K), T_2(K)$ 로 정의하고 다음과 같은 두가지 문제를 제시하였다.

문제 A : 순수 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제로 다음식

$$\inf \{ \|T_1(K)\|_2 \mid K \text{ admissible with } \|T_2(K)\|_\infty < 1 \}$$

을 만족하는 제어기를 찾는 문제이고,

문제 B : 동시적  $H_2/H_\infty$  문제로 다음식

$$\inf \{ \|T_1(K)\|_2 \mid K \text{ admissible} \}$$

을 만족하는 제어기 중에서  $\|T_2(K)\|_\infty < 1$ 를 만족하는 제어기를 찾는 문제이다.

Rotea 등은 문제 B에 대한 해를 풀었고, 문제 B의 해는 역시 문제 A의 해는 되지만 그 역은 성립하지 않음을 보였으며 문제 B를 풀기위해 상태궤환 시스템에서  $\|T_1(K)\|_2$ 이 최소인 제어기 군들을 나타내는 독특한 변수화를 하였다. 만약  $\text{Im } B_1 = \mathbb{R}^n$ 이라면 상태궤환 제어기는 static 이득으로 유일하게 되지만  $\text{Im } B_1$ 이  $\mathbb{R}^n$ 의 적당한 subspace라면 최적제어기 군들로 변수화가 가능하였다. 따라서 최적제어기 군들로 부터 부가적인 조건 ( $H_\infty$ -norm 제한 조건)을 만족하는 제어기를 찾을 수 있게 되었다.

상태궤환 시스템의 경우에 독특한 변수화가 가능하여 최적인 제어기들을 변수화할 수 있었지만 출력궤환 시스템에서는

$$H := \begin{bmatrix} A - B_2 D_1^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T (I - D_1 D_1^T) C_1 & -(A - B_2 D_1^T C_1)^T \end{bmatrix}$$

$$J := \begin{bmatrix} (A - B_1 D_2^T C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 (I - D_2^T D_2) B_1^T & -(A - B_1 D_2^T C_2) \end{bmatrix}$$

와 같이 정의하면 정리 A.1에서  $\|T_2(Q)\|_\infty < \gamma$ 을 만족하는 제어기  $Q \in RH_2$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$i) H \in \text{dom}(\text{Ric}), X := \text{Ric}(H) \geq 0 \text{ 이고} \quad (4.7)$$

$$ii) J \in \text{dom}(\text{Ric}), Y := \text{Ric}(J) \geq 0 \text{ 이고} \quad (4.8)$$

$$iii) \rho(XY) < \gamma^2 \quad (4.9)$$

와 같고, 제어기  $Q \in RH_2$ 의 상태공간 표현은

$$Q := \left[ \begin{array}{c|c} A + B_2 F + \gamma^{-2} (B_1 + Z L D_2) B_1^T X + Z L C_2 & -Z L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (4.10)$$

와 같다. 여기서

$$X := \text{Ric}(H), Y := \text{Ric}(J)$$

$$F := -(B_2^T X + D_1^T C_1), L := -(Y C_2^T + B_1 D_2^T),$$

$$Z := (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1}$$

이다. 여기서 구한  $Q$ 를 식(4.4)에 대입해서 제어기  $K$ 를 구하기 전에 최소 차수의 제어기를 구하기 위해 몇가지 과정을 거친다. 먼저  $X$ 를 다음과 같이

$$X := \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{bmatrix}$$

분할하면 각각의 요소들은 다음 대수 Riccati 방정식

$$A^T X + X A + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_2^T C_2 = 0 \quad (4.11)$$

을 만족하는 해, 즉  $X_1 = X_{12} = X_2 = X_1^T$ 가 된다. 이 때  $D_2 B_2^T X = 0$ 가 되고,  $F_1 := -B_2^T X_1$ 라면  $F = [F_1 - F \quad F_1]$ 이 되며  $Z L C_3 := [N_1^T \quad N_2^T]^T$ 이라 놓으면 제어기  $K$ 는

$$K := \left[ \begin{array}{ccc|c} \hat{A}_2 & B_2 F_1 - B_2 F & B_2 F_1 & -L \\ N_1 & A + B_2 F_1 & -L C_3 + B_2 F_1 + N_1 & 0 \\ N_2 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_1 & A + L C_3 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_1 + N_2 & 0 \\ \hline F & F_1 - F & F_1 & 0 \end{array} \right] \quad (4.12)$$

이 된다. 정칙(nonsingular)행렬  $T := \begin{bmatrix} -I & I & -I \\ 0 & I & -I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 로 similarity transformation하면 제어기  $K$ 는 다음과 같이 된다.

$$K := \left[ \begin{array}{cc|c} \hat{A}_2 - N_1 & -L C_3 + N_1 & L \\ -N_1 - N_2 & A + B_2 F_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_1 + N_1 + N_2 & 0 \\ \hline -F & F_1 & 0 \end{array} \right] \quad (4.13)$$

지금까지의 결과를 아래 정리로 요약할 수 있다.

정리 4.1.

그림 3.1에서 플랜트  $G$ 가 식(3.1)로 주어지고 3절의 가정 (i) - (v)를 만족한다면 혼합된  $H_2/H_\infty$  최적문제의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은 식(4.7) - (4.9)이고, 이를 만족할 때 제어기  $K$ 는 식(4.13)으로 주어진다.

혼합된  $H_2/H_\infty$  문제의 해가 존재할 필요충분조건은 순수한  $H_\infty$  문제의 해가 존재할 필요충분조건과 아주 유사하고 모든 Riccati 방정식이 모두 분리되어 있으므로 직접적으로 해를 구할 수 있어 간편하다. 식(4.13)에서 알 수 있듯이 최종제어기의 차수는 일반적 플랜트  $G$ 의 두배가 되어 Rotea 등[7]이 제시한 출력궤환에서의 제어기는 플랜트의 차수보다 높아진다는 사실에 부합된다.

## 5. 혼합된 $H_2/H_\infty$ 문제의 해석

이 절에서는 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제에서  $H_\infty$ -norm제한이 갖는 의미와 최적화문제의 연관성에 관해 알아보기 위해

$$\gamma_0 := \inf_{K \text{ adm}} \|T_2(K)\|_\infty$$

$$a_0 := \inf_{K \text{ adm}} \|T_1(K)\|_2$$

$$K_{\text{opt}} := \|T_1(K)\|_2 = a_0 \text{로 만드는 유일한 } K$$

$$\gamma_2 := \|T_2(K)\|_\infty \text{ 여기서 } K = K_{\text{opt}}$$

$$a_{\text{mix}} := \text{혼합된 } H_2/H_\infty \text{ 제어기를 넣었을 때 실제적인 } \|T_1(K)\|_2 \text{ 값.}$$

$$\gamma_{\text{mix}} := \text{혼합된 } H_2/H_\infty \text{ 제어기를 넣었을 때 실제적인 } \|T_2(K)\|_\infty \text{ 값.}$$

을 정의하면 다음 두 정리가 성립된다.

정리 5.1.

혼합된  $H_2/H_\infty$  문제에서  $\gamma \geq \gamma_2$ 라 하면 제어기  $K = K_{\text{opt}}$ 이고  $\|T_1(K)\|_2 = a_0$ 이다. 이 때  $\gamma_{\text{mix}} = \gamma_2$ 이다.

증명) 4.2절에서  $a^2 = \|T_1(K)\|_2^2 = a_0^2 + \|e\|_2^2$ 이므로  $\gamma \geq \gamma_2$ 일 때 제어기는  $\|T_1(K)\|_2$ 이 최적이지 않다. 따라서  $\|T_2(K)\|_\infty < \gamma$ 을

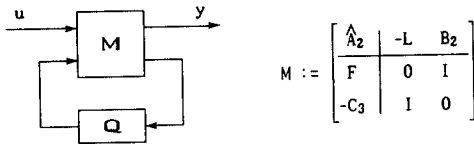
최적제어기가 유일함으로 최적제어기의 변수화가 불가능하다 [2]. 따라서 자유매개변수를 이용한 준최적인 제어기들의 변수화에 대해서 알아보고, 출력궤환 시스템에 대해서 앞의 방법을 적용할 수 없는 이유를 알아본다.

#### 4.2. 제어기의 변수화

출력궤환 시스템인 그림 3.1에서  $\|T_1(K)\|_2$ 를 최소화 하는 제어기를 찾기 위해 먼저 Hamiltonian 행렬을

$$H := \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix}, \quad J := \begin{bmatrix} A^T & -C_3^T C_3 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

정의하면  $X := Ric(H)$ ,  $Y := Ric(J) \geq 0$  이다. 또한  $F := -B_2^T X$ ,  $L := -Y C_3^T$ 로 정의하고,  $A_F := A + B_2 F$ ,  $A_L := A + L C_3$ ,  $\hat{A}_2 := A + B_2 F + L C_3$ 로 정의하며  $a_0 := \inf \|T_1(K)\|_2$ 라 한다. 이 때  $\|T_1(K)\|_2 \leq a$ ,  $a > a_0$ , 을 만족하는 모든 제어기의 변수화는 다음과 같다.



여기서  $Q \in RH_2$ 이고  $\|Q\|_2^2 \leq a^2 - a_0^2$ 이다. 만약  $Q = 0$ 라면 제어기  $K$ 는 유일하고 최적인 제어기가 되므로 상태궤환 시스템에서 최적의 제어기군으로 변수화가 된다는 사실에 모순이다. 따라서 출력궤환 시스템에서 최적인  $H_2$ 제어기 군들로부터  $H_\infty$  제한을 만족하는 해를 찾기는 불가능하다. 이러한 사실때문에 출력궤환 시스템에서는 4.1절에서 제시된 방법으로 해를 구할 수 없으므로 새로운 방법을 제시한다.

#### 4.3. 출력궤환

4.2절에서 변수화된  $H_2$ 준최적 제어기를 선형분수변환 (linear fractional transformation : LFT)으로 나타내면

$$K := M_{11} + M_{12}Q(I - M_{22}Q)^{-1}M_{21} \quad (4.2)$$

와 같으며  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  그리고  $M_{22}$ 는  $M$ 의 분할 요소들이다.  $Q$ 의 상태공간표현을

$$Q := \begin{bmatrix} A_Q & B_Q \\ C_Q & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

와 같이 가정하면 제어기  $K$ 의 상태공간표현은 다음과 같다.

$$K := \left[ \begin{array}{cc|c} \hat{A}_2 & B_2 C_Q & -L_2 \\ -B_Q C_2 & A_Q & 0 \\ \hline F & C_Q & 0 \end{array} \right] \quad (4.4)$$

식(4.2)의 제어기를 그림 3.1의 플랜트  $G$ 에 연결하면  $w$ 에서  $z_2$ 까지의 페루프 전달함수행렬은 아래와 같이 간단히 된다.

$$T_2(Q) := S_2 + U_2 Q V_2, \quad Q \in RH_2 \quad (4.5)$$

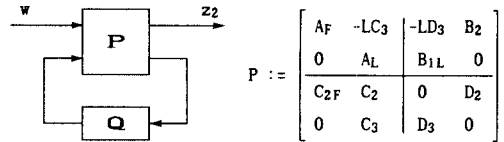
여기서

$$S_2 := \begin{bmatrix} A_F & -L C_3 & -L D_3 \\ 0 & A_L & B_{1L} \\ \hline C_{2F} & C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 := \begin{bmatrix} A_F & B_2 \\ C_{2F} & D_2 \end{bmatrix}$$

$$V_2 := \begin{bmatrix} A_L & B_{1L} \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

$$B_{1L} := B_1 + L D_3, \quad C_{2F} := C_2 + D_2 F$$

$T_2$ 를  $Q$ 에 관한 새로운 LFT로 표현하면



와 같으며 이를 간단히 표현하기 위해

$$P := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 \\ \hline C_2 & D_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

와 같이 두며, 행렬  $A$ 는 안정하다( $\because$  행렬  $A_F$ 와  $A_L$ 이 안정).

혼합된  $H_2/H_\infty$  문제는  $\|T_2(Q)\|_\infty < \gamma$ 을 만족하는  $RH_2$ 에 속하는 제어기  $Q$ 를 찾는 문제로 귀결되었다. 이는 표준  $H_\infty$  문제로 Glover 와 Doyle[5]에 의해 제안된 이론으로 해를 구할 수 있으나 해의 완벽함을 위해 수정된 이론(부록 참조)을 이용한다. 식(4.6)에 주어진 플랜트  $P$ 를 정리 A.1에 적용하기 위해서 먼저 정리 A.1의 가정을 만족하는가를 조사해 본다.

$A$ 는 안정하므로 가정 A.1을 만족하고,  $D_1 = D_2$ 이고  $D_2 = D_3$ 이므로 3절의 가정 (iv), (v)에 의해 가정 A.2도 만족한다.  $A$ 가 안정하고  $D_1$ 과  $D_2$ 가 full rank를 가지므로 가정 A.3과 가정 A.4 역시 만족하므로 플랜트  $P$ 는 정리 A.1에 적용 가능하다. 정리 A.1에 플랜트  $P$ 를 적용하기에 앞서 다음 두 Hamiltonian 행렬  $H$ ,  $J$ 를

만족하는 최적의 제어기는  $Q = 0$  일 때 이므로 제어기  $K = K_{opt}$  이고  $\alpha_{mix} = \alpha_0$  가 되고 이 때  $\gamma_{mix} = \gamma_2$  이다. ■

정리 5.1는  $\gamma$ 를  $\gamma_2$ 보다 크거나 같게 잡는 것은 순수  $H_2$  최적화 문제가 되므로 아무런 의미가 없다는걸 보여준다. 또다른  $\gamma$ 에 대한 제한은 다음 정리에서 보인다.

정리 5.2.

$\gamma_0$ 보다 작은  $\gamma$ 에 대해서는 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제의 해는 없다.

증명)  $H_\infty$ -norm 경계를 만족하는 해는 존재하지 않으므로 이 정리는 당연하다. ■

두 정리는  $H_\infty$ -norm 경계를  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_2$ 으로 제한할 수 있음을 보여준다.

다음의 간단한 예제로서 지금까지 결과의 타당성을 조사한다. 전달함수행렬  $G(s)$ 를 다음과 같이 놓자.

$$G(s) := \begin{array}{c} \begin{array}{c} w \\ u \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (5.1)$$

$G(s)$ 는 3절의 가정(i) - (v)를 모두 만족하고  $\alpha_0 = 1.632992$ ,  $\gamma_0 = 1.9863698$ ,  $\gamma_2 = 2.61$ 이다. 표 5.1에서  $H_2$ -norm과  $H_\infty$ -norm사이에는 상호보완 관계가 있음을 보여주며 이는 성능 최적화문제와 견실안정화문제 사이에는 상호보완의 관계가 있음을 나타낸다.

표 5.1.  $H_2$ ,  $H_\infty$ -norm의 비교.

$H_\infty$ -norm 제한 $\gamma$	실질적인 $\ T_2(K)\ _\infty$ 값 $\gamma_{mix}$	$\ T_1(K)\ _2$ 값 $\alpha = \alpha_{mix}$
$\infty$	2.6100	1.6330
2.6	2.3260	1.6986
2.4	2.2571	1.7592
2.2	2.1564	1.9451
2.1	2.0873	2.2571
2.0	1.9999	4.9010

## 6. 결론

출력제한 시스템에서 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제의 해가 존재하기 위한 필요충분조건이 대수 Riccati 방정식의 해로서 주어지고, 그 해를 간단한 상태공간 표현으로 구하였으며 예제를 통하여

타당성도 알아 보았다. 그러나 제어기의 차수가 일반적 플랜트의 두배가 되어 너무 높다는 것이 문제이지만 최근 모델 차수 줄임(model reduction)에 대한 연구가 상당히 활발하므로 차수에 대한 문제도 그리 큰 문제는 아니다. 또 하나의 문제점으로는  $\gamma = \gamma_0$ 일 때 혼합된  $H_2/H_\infty$  문제에 대한 해석문제가 아직 남아있다.

## 부록

부록에서는 Glover와 Doyle[5]에 의해 제안된 표준  $H_\infty$  문제를 약간 수정한 결과에 대해 알아보겠다. 출력제한 시스템은 그림 A.1과 같고,  $w$ 에서  $z$ 까지의 페루프 전달함수행렬을  $T(C)$ 라 하자. 플랜트  $P$ 의 구현화는 아래와 같고,

$$P := \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 \\ \hline C_2 & D_2 & 0 \end{array} \right] \quad (A.1)$$

다음 가정들을 만족한다고 가정한다.

(A.1)  $(C_2, A, B_2)$ 는 안정가능하고 관측가능하다.

(A.2)  $D_1^T D_1 = I$ 이고  $D_2 D_2^T = I$

(A.3) 모든  $\omega \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$\left[ \begin{array}{cc} A - j\omega I & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right]$$

가 full column rank를 가진다.

(A.4) 모든  $\omega \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$\left[ \begin{array}{cc} A - j\omega I & B_1 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]$$

가 full row rank를 가진다.

두 Hamiltonian 행렬을 정의한다.

$$H := \left[ \begin{array}{cc} A - B_2 D_1^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ \hline C_1^T (I - D_1 D_1^T) C_1 & -(A - B_2 D_1^T C_1)^T \end{array} \right]$$

$$J := \left[ \begin{array}{cc} -(A - B_1 D_2^T C_2) & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ \hline B_1 (I - D_2^T D_2) B_1^T & (A - B_1 D_2^T C_2)^T \end{array} \right]$$

정리 A.1.

그림 A.1의 출력제한 시스템에 대하여  $\|T(C)\|_\infty < \gamma$ 을 만족하는 admissible 제어가 존재할 필요충분조건은

- i)  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ 이고  $X := \text{Ric}(H) \geq 0$
- ii)  $J \in \text{dom}(\text{Ric})$ 이고  $Y := \text{Ric}(Y) \geq 0$
- iii)  $\rho(YX) < \gamma^2$

이고, 이 조건들을 만족할 때 제어기 C는 다음과 같다.

$$C := \left[ \begin{array}{c|c} A_F + \gamma^{-2}(B_1 + ZLD)B_1^T X + ZLC_2 & -ZL \\ \hline F & 0 \end{array} \right]$$

여기서

$$L := -(YC_2^T + B_1 D_2^T), \quad F := -(B_2^T X + D_1^T C_1)$$

$$A_F := A + B_2 F, \quad Z := (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1/2}$$

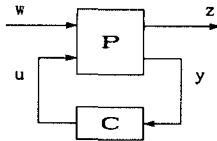


그림 A.1  $H_\infty$  문제의 표준블럭선도

### 참고문헌

[1] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, "LQG control with an  $H_\infty$  performance bounded: A Riccati equation approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 3, pp. 293-305, Mar. 1989.

[2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug. 1989.

[3] J. C. Doyle, K. Zhou, and B. Bodenheimer, "Optimal control with mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives," *ACC*, vol. 3, pp. 2065-2070, June 1989.

[4] B. A. Francis, *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*, in Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88, New York: Springer-Verlag, 1987.

[5] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.

[6] K. Glover and D. Mustafa, "Derivation of the maximum entropy  $H_\infty$ -controller and a state-space formula for its entropy," *Int. J. Contr.* vol. 50, pp. 899- , 1989.

[7] M. A. Rotea and P. P. Khargonekar, " $H_2$ -optimal control with an  $H_\infty$ -constraint: The state feedback case," *Automatica*, vol. 27, no. 2, pp. 307-316, 1991.

[8] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, Apr. 1981.

[9] K. Zhou and P. P. Khargonekar, "An algebraic Riccati equation approach to  $H_\infty$  optimization," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 11, pp. 85-92, 1988.