

델타 연산자를 이용한 통합형 FIR 필터

오서 민상, 권 오규
 인하대학교 전기공학과

Unified FIR Filter Using Delta Operator

M.S. Seo, O.K. Kwon
 Dept. of Electrical Engineering, Inha University

Abstract

In this paper we investigate the connection between the continuous-time FIR(finite impulse response) filter and the corresponding discrete-time FIR filter with fast sampling. The interconnection is established by formulating the discrete-time case using delta operators which has superior numerical properties in discretizing procedure. The aim of this paper is to present a unified FIR filter using the δ -operator and to show that, as sampling interval Δ approaches to zero, the results of this filter converge to the corresponding continuous-time results, which implies that the unified FIR filter unifies continuous-time FIR filter[2] and discrete-time FIR filter[1].

1. 서론

오늘날 공학 및 과학 분야에서는 제어기 및 필터의 알고리즘을 구현하기 위해 디지털 컴퓨터가 사용되고 있다. 그러나, 디지털 컴퓨터는 시스템과 알고리즘을 구현하기 위해 차분 방정식(difference equation)을 사용하기 때문에 주어진 시스템을 이산화하는 것이 필요하다. 지금까지는 이산형 시스템을 묘사하기 위해 이동 연산자(shift operator)가 널리 사용되어 왔다. 그러나, 이동 연산자를 이용한 이산형 결과들은 샘플링 주기를 0으로 함에 따라 연속형 결과에 접근하지 않는다[3, 5]. 그러므로, 같은 아이디어에서 나온 이론이라 할지라도 그것의 알고리즘과 프로그램이 연속형 시스템과 이산형 시스템에 대하여 각각 요구된다. 그리고, 이동 연산자를 사용할 경우 이산화시 큰 수치오차를 지니는 단점을 가지고 있다[4, 5].

위의 단점들은 이동 연산자를 본 논문에서 다루는 델타 연산자(delta operator)로 대체함에 의해 쉽게 해결할 수 있다. 델타 연산자[3, 8]의 개념은 전혀 새로운 것이 아니다. 이 연산자는 Tschauner(1963)에 의해 처음 정의 되었으며, 디지털 필터링에서 수치적 성질들을 향상시키기 위해 제시 되었다. 그리고, 수치해석 분야에서는 일차 분할된 차분 연산자(the first divided difference operator)로 알려져 왔다. 델타 연산자는

$$\delta = \frac{q - 1}{\Delta}$$

로 정의된다. 여기서, q 는 이동 연산자(forward shift operator), Δ 는 샘플링 주기를 나타낸다. 위의 정의에서 알 수 있듯이 델타 연산자와 이동 연산자와의 관계는 단순한 선형 변환이다. 그러므로, 이산형 시스템을 묘사하는데 있어서 이동 연산자와 같은 융통성을 보인다[3].

델타 연산자는 이동 연산자와는 달리 다음과 같은 잇점을 가진다. 첫째는 이 표시법이 연속형과 이산형에서의 결과들을 하나의 틀 속에서 다루는 통합형 표시법을 허용한다는 것이다. 그 까닭은 델타 연산자를 이용하여 수식을 표기할 경우, 샘플링 주기를 0으로 하면 얻어진 결과들이 연속형에서의 결과들과 일치하기 때문이다. 둘째는 샘플링 주기가 클 경우를 제외하고는 델타 연산자가 기존의 이동 연산자보다 우수한 수치적 성질을 가진다는 것이다[8].

델타 연산자를 이용한 예들은 이미 많이 제시되었다. 그 중에서 연속형과 이산형 칼만 필터를 통합하는 통합형 칼만 필터 [3, 5]가 Goodwin등에 의해 제시되었고, Gawthrop은 제어분야에서 연속형과 이산형의 전달함수를 관련 시키는데 이 연산자를 이용 하였다.

이 논문에서는 델타 연산자가 통합형 표시법을 허용한다는 성질을 이용하여 이미 제시된 연속형과 이산형 FIR(finite impulse response) 필터[1, 2]의 결과들을 통합하는 통합형 FIR 필터를 제안한다. 그리고, 샘플링 주기를 0으로 함에 따라 통합형 FIR 필터의 결과들이 연속형 FIR 필터의 결과들과 일치함을 보인다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 주어진 연속형 상태공간 모델로부터 델타 FIR(δ -FIR) 필터를 유도하고, 이 결과들이 샘플링 주기를 0으로 함에 따라 연속형 FIR 필터의 결과들과 일치함을 보인다. 3절에서는 델타 FIR 필터의 결과들로부터 통합형 표시법(unified notation)을 이용하여 통합형 FIR 필터를 제시한다. 4절에서는 컴퓨터 모의실험 결과를 보이고 5절에서 결론을 맺는다.

2. 델타 FIR 필터

델타 FIR 필터를 유도하기 위해 다음과 같은 연속형 시분변 시스템을 가정한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{2.1}$$

$$z(t) = Cx(t) + v(t) \tag{2.2}$$

식 (2.1)과 (2.2)에서 $x(\cdot)$ 는 상태변수이며, 초기상태 $x(0)$ 는 영평균 불규칙 변수이고, 시스템 잡음 $w(\cdot)$ 와 관측잡음 $v(\cdot)$ 는 영평균 백색잡음으로 공분산은 각각 $E[w(t)w(s)^T] = Q\delta(t-s)$, $E[v(t)v(s)^T] = r\delta(t-s)$ 이다. 그리고, 초기상태 $x(0)$ 의 공분산은 $E[x(0)x(0)^T] = P_0$ 이고, $x(0)$, $w(\cdot)$, $v(\cdot)$ 는 상

관관계가 없다고 본다.

식 (2.1)을 이동 연산자(shift operator)를 이용하여 이산화하면

$$x(i+1) = A_q x(i) + w_q(i) \quad (2.3)$$

$$z(i) = C_q x(i) + v_q(i) \quad (2.4)$$

의 이산형 상태공간 모델을 얻을 수 있다. 식 (2.3)에서

$$A_q = \exp(\Delta A), \quad w_q(i) = \int_0^\Delta \exp[A(\Delta-\tau)] B w(\tau) d\tau$$

이다. 여기서 Δ 는 샘플링 주기를 나타낸다. 그리고, $w_q(\cdot)$ 와 $v_q(\cdot)$ 는 영평균 백색잡음으로 각각 $E[w_q(i)w_q(j)^T] = Q_q \delta_{i,j}$ 와 $E[v_q(i)v_q(j)^T] = r_q \delta_{i,j}$ 의 상호분산을 갖는다. 나머지 가정들은 연속형에서와 같다.

식 (2.3)과 (2.4)에서의 결과들은 작은 샘플링 주기에 대해 다음과 같은 관계가 있다.

$$r_q \approx (1/\Delta)r \quad (2.5)$$

$$Q_q \approx Q\Delta \quad (2.6)$$

$$C_q \approx C \quad (2.7)$$

그러나, 위의 결과들은 샘플링 주기 Δ 를 0으로 함에 따라 연속형과 이산형 시스템간에 존재하는 밀접한 접속 관계를 유지하지 못하고 다음과 같은 불합리한 결과를 낳는다.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} Q_q = 0 \quad (2.8)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} r_q = \infty \quad (2.9)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} A_q = I \quad (2.10)$$

그러나, 위의 불합리한 결과들은 델타 연산자를 이용하여 다시 수식화하면 해결된다. 델타 연산자를 이용하면 식 (2.3)과 (2.4)의 이산형 시스템 묘사는 다음과 같이 된다.

$$\delta x(i) = A_\delta x(i) + w_\delta(i) \quad (2.11)$$

$$z(i) = C_\delta x(i) + v_\delta(i) \quad (2.12)$$

여기서,

$$A_\delta = \frac{A_q - I}{\Delta}, \quad C_\delta = C_q \quad (2.13)$$

$$w_\delta = \frac{1}{\Delta} w_q, \quad v_\delta = v_q \quad (2.14)$$

의 관계가 있다. 그러므로,

$$\text{Cov} \{w_\delta\} = \frac{1}{\Delta^2} Q_q \quad (2.15)$$

$$\text{Cov} \{v_\delta\} = r_q \quad (2.16)$$

의 관계가 성립한다.

식 (2.5)과 (2.6)를 식 (2.15)와 (2.16)에 대입하면, 작은 샘플링 주기에 대하여 다음의 결과를 얻는다.

$$\text{Cov} \{w_\delta\} \approx \frac{1}{\Delta} Q \quad \text{그리고} \quad \text{Cov} \{v_\delta\} \approx \frac{1}{\Delta} r \quad (2.17)$$

그러므로, 연속형과 이산형의 접속 즉, 샘플링 주기 독립성을 얻기위해 다음과 같이 Q_δ, R_δ 를 정의한다.

$$Q_\delta = \Delta \text{Cov} \{w_\delta\} = \frac{1}{\Delta} Q_q \quad (2.18)$$

$$R_\delta = \Delta \text{Cov} \{v_\delta\} = \Delta r_q \quad (2.19)$$

참고1: 식 (2.11)과 (2.12)의 델타 상태 공간모델에서 A_δ 를 구하는 방법은 두가지가 있다. 첫째는 연속형 모델을 이동 연산자를 사용하여 이산화한 후, 델타 연산자의 정의를 이용하여 델타 모델로 바꾸는 것이다. 그러나, 이 방법은 이동 연산자를 이용하여 이산화할 때의 수치적인 문제때문에 별로 좋은 방법이 아니다. 그러므로, 델타 모델을 얻는 좋은 방법은 연속형 상태 공간 모델로부터 다음의 수식을 이용하여 직접 구하는 것이다[5].

$$A_\delta = \Omega A, \quad \Omega = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \exp(A\tau) d\tau \quad (2.20)$$

참고2: 식 (2.18)과 (2.19)에서 Q_δ, R_δ 는 분산이 아니라 잡음 스펙트럼 밀도(noise spectral densities)이다. 그리고, 연속형에서의 Q, r 도 잡음 스펙트럼 밀도이다[3,5].

참고3: 위에서 얻어진 델타 상태 공간 모델 (2.11)은 이동 연산자로 다시 표시하지 않고 다음과 같이 실현시킬 수 있다 [4, 5, 7].

$$x(i) = \delta^{-1} \{ A_\delta x(i) + w_\delta(i) \} \quad (2.21)$$

여기서 식 (2.11)과 (2.21)에서의 δ 와 δ^{-1} 는 각각 미분과 적분의 오일러 근사(Euler approximation)이다. 또, 식 (2.11)은 다음과 같이 차분 방정식을 이용하여 실현할 수 있다.

$$x(i+1) = x(i) + \Delta \{ A_\delta x(i) + w_\delta(i) \} \quad (2.22)$$

여기서 Δ 는 샘플링 주기를 나타낸다.

정리 2.1: 식(2.11)-(2.12)의 이산형 시스템에 대한 델타 FIR 필터는 다음과 같다.

$$\hat{x}(i:N) = \Delta \sum_{k=i-N}^i H(i-k:N) z(k) \quad (2.23)$$

여기서, N 은 관측정보 구간폭이다. FIR필터 (2.23)은 유한구간 $[i-N, i]$ 의 관측치 $z(\cdot)$ 를 이용하며, 표기법 $x(\cdot:N)$ 과 $H(\cdot:N)$ 은 N 의 함수임을 나타낸다. 그리고, 식(2.23)에서의 임펄스 응답 $H(\cdot:\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\delta H(i:n) = \{ A_\delta - R(n)C_\delta^T R_\delta^{-1} C_\delta - \Delta R_1 \} H(i:n) \quad (2.24)$$

, $N-i \leq n \leq N-1$

$$H(i:N-i) = (1/\Delta) R_q(N-i) C_\delta^T (R_\delta/\Delta)^{-1} \quad (2.25)$$

= $R(N-i) C_\delta^T R_\delta^{-1}$

여기서,

$$R_1 = R(n)C_\delta^T R_\delta^{-1} C_\delta A_\delta + \delta R(n)C_\delta^T R_\delta^{-1} C_\delta + \Delta \delta R(n)C_\delta^T R_\delta^{-1} C_\delta A_\delta$$

이다.

식(2.24)에서 추정오차의 상호분산 $R(\cdot)$ 은 다음식으로부터 구한다.

$$\begin{aligned} \delta R(n) &= A_{\delta} R(n) + R(n) A_{\delta}^T + Q_{\delta} + \Delta A_{\delta} R(n) A_{\delta}^T \\ &\quad - R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} [I + \Delta C_{\delta} R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1}]^{-1} C_{\delta} R(n) \\ &\quad , -1 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

여기서,

$$R(n) = R(n) + \Delta (A_{\delta} R(n) + R(n) A_{\delta}^T + Q_{\delta}) + \Delta^2 A_{\delta} R(n) A_{\delta}^T \quad (2.27)$$

이다. 그리고, 상태 $x(\cdot)$ 의 상호분산은 다음과 같다.

$$\delta P(i, i) = A_{\delta} P(i, i) + P(i, i) A_{\delta}^T + Q_{\delta} + \Delta A_{\delta} P(i, i) A_{\delta}^T \quad (2.28)$$

증명: 위에서 제시된 식들은 식(2.13), (2.14), (2.18), (2.19)로부터 모두 유도될 수 있다. 먼저 식(2.26), (2.27)의 추정 오차의 상호분산을 다음과 같이 유도할 수 있다.

이동 연산자를 이용한 이산형 FIR필터의 추정오차의 상호분산은

$$R_q(n+1) = R_q(n) - R_q(n) C_q^T R_q^{-1} [I + C_q R_q(n) C_q^T R_q^{-1}]^{-1} C_q R_q(n) \quad -1 \leq n \leq N-1 \quad (2.29)$$

$$R_q(n) = A_q R_q(n) A_q^T + Q_q \quad (2.30)$$

이다. 식(2.29)과 (2.30)에 대한 델타 표현을 유도하기 위해 먼저 (2.30)를 델타 연산자의 정의를 이용하여 표시하면,

$$\begin{aligned} R(n) &= (I + \Delta A_{\delta}) R(n) (I + \Delta A_{\delta})^T + \Delta Q_{\delta} \\ &= R(n) + \Delta (A_{\delta} R(n) + R(n) A_{\delta}^T + Q_{\delta}) + \Delta^2 A_{\delta} R(n) A_{\delta}^T \end{aligned} \quad (2.31)$$

이 된다. 식 (2.31)의 결과를 이용하여 (2.29)를 델타 연산자를 이용하여 구성하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (I + \Delta \delta) R(n) &= (I + \Delta A_{\delta}) R(n) (I + \Delta A_{\delta})^T + \Delta Q_{\delta} \\ &\quad - R(n) C_{\delta}^T (R_{\delta} / \Delta)^{-1} [I + C_{\delta} R(n) C_{\delta}^T (R_{\delta} / \Delta)^{-1}]^{-1} C_{\delta} R(n) \\ &= R(n) + \Delta (A_{\delta} R(n) + R(n) A_{\delta}^T + Q_{\delta}) + \Delta^2 A_{\delta} R(n) A_{\delta}^T \\ &\quad - \Delta R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} [I + \Delta C_{\delta} R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1}]^{-1} C_{\delta} R(n) \end{aligned} \quad (2.32)$$

그러므로,

$$\begin{aligned} \delta R(n) &= A_{\delta} R(n) + R(n) A_{\delta}^T + Q_{\delta} + \Delta A_{\delta} R(n) A_{\delta}^T \\ &\quad - R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} [I + \Delta C_{\delta} R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1}]^{-1} C_{\delta} R(n) \end{aligned} \quad (2.33)$$

여기서,

$$R(n) = (I + \Delta A_{\delta}) R(n) (I + \Delta A_{\delta})^T + \Delta Q_{\delta}$$

을 만족한다.

다음은 필터의 임펄스 응답에 대한 델타 표현을 살펴본다. 이미 제시된 이동 연산자를 이용한 FIR 필터의 임펄스 응답 $H(\cdot)$ 은 다음과 같다.

$$H_q(i:n+1) = [I - R_q(n+1) C_q^T R_q^{-1} C_q] A_q H_q(i:n) \quad -n \leq n \leq N-1 \quad (2.34)$$

$$H_q(i:N-i) = R_q(N-i) C_q^T R_q^{-1} \quad (2.35)$$

식 (2.29)에서 $r_q = r/\delta$ 의 관계가 있다. 그러므로

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} H_q(i:N-i) = 0 \text{ 이다.}$$

그러므로 연속형 결과와의 결합을 위해

$$H(i:N-i) = (1/\Delta) H_q(i:N-i) \quad (2.36)$$

로 정의한다. 그러면,

$$\begin{aligned} H(i:N-i) &= (1/\Delta) R_q(N-i) C_q^T (R_q / \Delta)^{-1} \\ &= R(N-i) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

식 (2.31)에서 $R(N-i)$ 는 앞에서의 델타 형태를 만족한다.

식 (2.25)의 델타 형태는 앞에서의 추정오차 상호분산의 증명과 같다.

$$(I + \Delta \delta) H(i:n) = [I - (I + \Delta \delta) R(n) C_{\delta}^T (R_{\delta} / \Delta)^{-1} C_{\delta}]^{-1} (I + \Delta A_{\delta}) H(i:n) \quad (2.38)$$

그러므로, 식 (2.32)로부터

$$\delta H(i:n) = (A_{\delta} - R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} C_{\delta} - \Delta R_1) H(i:n) \quad (2.39)$$

이 된다.

여기서,

$$R_1 = R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} C_{\delta} A_{\delta} + \delta R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} C_{\delta} + \Delta \delta R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} C_{\delta} A_{\delta}$$

이다.

상태 상호분산행렬(state covariance matrix) $P(\cdot)$ 의 증명은 추정오차의 상호분산 $R(\cdot)$ 와 같으므로 생략한다. 그리고, 상태 추정자(state estimator)(2.23)은 식(2.36)의 관계식을

이동 연산자를 이용한 FIR필터 $x_q(i:N) = \sum_{k=i-N}^i H_q(i-k:N) z(k)$ 에 대입함으로써 유도된다. 결과적으로 델타 연산자를 이용한 FIR 필터의 수식은 (2.11), (2.12), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) 이다. □□□

이제 제시된 델타 FIR 필터의 결과들이 샘플링 주기를 0으로 합에 따라 연속형 FIR 필터의 결과들과 일치 하는 지를 알아보자.

파라메트리 2.1: 정리 2.1의 델타 FIR필터 알고리즘은 $\Delta \rightarrow 0$ 이 되면 연속형 FIR필터로 수렴한다.

증명: 먼저 델타 FIR필터의 추정오차의 상호분산이 샘플링 주기를 0으로 하면 연속형으로 결과로 수렴하는지 살펴보자. 식 (2.27)에서

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} R(n) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} [(I + \Delta A_{\delta}) R(n) (I + \Delta A_{\delta})^T + \Delta Q_{\delta}] \\ &= R(n) \end{aligned} \quad (2.40)$$

이다. 식 (2.40)의 결과를 이용하여 식 (2.26)에서 양변에

$\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ 를 취하면,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta R(n) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} [A_{\delta} R(n) + R(n) A_{\delta}^T + Q_{\delta} + \Delta A_{\delta} R(n) A_{\delta}^T \\ &\quad - R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1} [I + \Delta C_{\delta} R(n) C_{\delta}^T R_{\delta}^{-1}]^{-1} C_{\delta} R(n)] \end{aligned}$$

이 된다. 그러므로,

$$\frac{d}{dt} R(t) = AR(t) + R(t)A^T + B \delta B^T R(t) C^T R^{-1} C R(t) \quad , 0 \leq t \leq T \quad (2.41)$$

의 연속형의 결과와 같게된다. 식 (2.28)의 델타 FIR필터의 상태 상호분산행렬의 경우도 식 (2.40)과 같은 방법으로 연속형으로의 수렴성을 증명할 수 있다. 즉,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta P(i, i) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[A P(i, i) + P(i, i) A^T + Q + \Delta A P(i, i) A^T \right] \\ \text{는 } \frac{d}{dt} P(t, t) = AP(t, t) + P(t, t)A^T + B \delta B^T \quad (2.42)$$

의 연속형의 결과로 수렴하게 된다.

다음은 임펄스 응답 $H(\cdot)$ 의 연속형 결과로의 수렴여부를 알아보자.

식 (2.24)의 연속형 결과로의 수렴여부는 직관적으로 보여지므로 여기서는 식 (2.25)만 살펴본다.

식 (2.25) 즉,

$$\delta H(i; n) = \left\{ A - R(n) C \delta^T R^{-1} C - \Delta R_1 \right\} H(i; n)$$

$$R_1 = R(n) C \delta^T R^{-1} C A + \delta R(n) C \delta^T R^{-1} C + \Delta \delta R(n) C \delta^T R^{-1} C A$$

의 양변에 $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ 를 취하면,

$$\frac{d}{ds} H(t; s) = [A - R(s) C^T R^{-1} C] H(t; s) \quad , T-t \leq s \leq T \quad (2.43)$$

의 연속형 FIR 필터의 결과가 얻어진다. □□□

3. 통합형 FIR 필터

이 절에서는 통합형 표시법을 설명하고, 통합형 FIR 필터를 제한한다.

3.1. 통합형 표시법[5.8]

3.1.1. 통합형 미분 연산자(Generalized derivative)

통합형 미분 연산자는 ρ 로 표기하고, 이것은 연속형과 이산형에서 각각 다음과 같다.

$$\rho x = \begin{cases} \frac{dx}{dt} & \text{연속형} \\ \delta x = \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta} & \text{이산형} \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1.2. 통합형 Exponential(Generalized exponential)

식 (3.1)의 정의가 주어지면, 일반형 선형 시불변 시스템 (Generalized linear time invariant system) $\delta x(t) = Ax(t)$ 에 대한 상태 천이 행렬(state transition matrix)은 다음과 같이 보여진다.

$$E(A, t) = \begin{cases} (1 + \Delta A)^{t/\Delta} & \text{연속형} \\ e^{At} & \text{이산형} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.3. 통합형 적분(Generalized integral)

위에서 정의된 일반형 미분의 역 연산(Inverse operation)은 다음과 같이 일반형 적분으로 정의된다.

(Lower Riemann Sum)

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau & \text{연속형} \\ \Delta \sum_{k=1}^{k_2} f(k\Delta) & \text{이산형} \end{cases} \quad (3.3)$$

식 (3.3)에서 $k_1=t_1/\Delta$, $k_2=(t_2/\Delta)-1$ 이다.

3.2. 통합형 FIR 필터

위에서 정의한 통합형 표기법을 이용하여 2절에서 제시된 델타 FIR 필터의 결과들로부터 통합형 FIR 필터를 제시한다.

(상태 공간 모델)

$$\rho x(t) = Ax(t) + w(t) \quad (3.4)$$

$$z(t) = Cx(t) + v(t) \quad (3.5)$$

(상태 상호 분산 행렬)

$$\rho P(t, t) = AP(t, t) + P(t, t)A^T + Q + \Delta AP(t, t)A^T \quad (3.6)$$

(추정 오차 상호 분산)

$$\rho R(t) = AR(t) + R(t)A^T + Q + \Delta AR(t)A^T \\ - R(t)C^T R^{-1} [I + \Delta CR(t)C^T R^{-1}]^{-1} CR(t) \quad (3.7)$$

여기서,

$$R(t) = (I + \Delta A) R(t) (I + \Delta A)^T + \Delta Q$$

(필터의 임펄스 응답)

$$\rho H(t; s) = [A - R(s)C^T R^{-1} C - \Delta R_1] H(t; s) \quad (3.8)$$

$$H(t; T-t) = (1/\Delta) R(T-t) C^T (R/\Delta)^{-1} \quad (3.9)$$

여기서,

$$R_1 = R(t)C^T R^{-1} C A + \rho R(t)C^T R^{-1} C + \Delta \rho R(t)C^T R^{-1} C A$$

이다.

(FIR 필터의 상태 추정자)

$$\hat{x}(t|t; T) = \int_{t-T}^t H(t, \tau; T) z(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

위 식에서 T는 관측 구간폭을 나타낸다.

22 : 위에서 제시된 통합형 FIR 필터의 수식에서 행렬 A, B, C, Q, R, R(t) 등은 이산형에서는 델타 변환된 형태를 취하고,

연속형에서는 연속형의 결과를 취한다. 그리고, t, T 는 연속형에서는 실수(real number)로써 시간의 함수이고, 이산형에서는 시간을 샘플링 주기로 나눈 정수(integer number)의 시퀀스(sequence)를 나타낸다. 즉, 각각의 수식에서 구간폭은 Kwon등에 의해 이미 제시된 연속형과 이산형 FIR필터와 같다.

4. 모의 실험

이 절에서는 2절에서 제시된 델타 FIR(δ -FIR) 필터의 알고리즘을 이용하여, 기존에 제시된 이동 연산자를 이용한 이산형 FIR필터와의 추정 성능을 모의 실험을 통해 비교한다.

사용되는 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (4.1)$$

$$z = [0 \ 1] x + v \quad (4.2)$$

여기서 $w(\cdot)$ 와 $v(\cdot)$ 는 영평균 백색잡음으로서 상호분산은 다음과 같다.

$$E[w(t)w(s)^T] = \delta(t-s) \quad (4.3)$$

$$E[v(t)v(s)^T] = \delta(t-s) \quad (4.4)$$

식 (4.1)과 (4.2)에서 주어진 연속형 시스템을 0.05sec의 샘플링 주기를 가지고 이산화한 이산형 시스템을 모의 실험에 이용한다. 이때, 이산형 시스템의 시스템 행렬의 1행 1열에 모델링 오차 Δ 를 더한다. 그리고, 모델링 오차의 크기는 4%, FIR필터의 구간폭은 5로 한다.

그림 (1)과 그림 (2)은 각각 기존의 FIR필터와 본 논문에서 제시된 델타 FIR필터의 잔류치(Residue)를 나타낸다. 두 경우 모두 영평균을 가지나 분산의 크기에 있어서 델타 FIR필터가 이동 연산자를 이용한 FIR필터보다 (1/5)이하의 훨씬 작은 값을 가져 이산화 오차의 영향이 크게 개선됨을 알 수 있다.

그림 (3)은 이동 연산자를 이용한 칼만필터의 추정오차 잔류치를 나타낸다. 칼만필터에서는 모델링 오차와 이산화 오차의 영향으로 잔류치가 발산하는 현상을 보이고 있다.

5. 결과

이 논문에서는 델타 연산자를 이용하여 델타 FIR필터를 유도하고, 이 결과로부터 통합형 표시법을 이용하여 이미 제시된 이산형과 연속형 FIR필터를 모두 포함하는 통합형 FIR필터를 제안하였다. 델타 FIR필터는 연속형 대상 시스템을 이산화시켜 적용하는 경우에 있어서 우수한 수치적 성질을 가진다. 이산화 시스템의 경우 이 논문에서 제시하는 델타 FIR필터가 기존의 이산형 FIR필터보다 우수한 추정성능을 보임을 모의실험을 통해 예시하였다.

참고 문헌

[1] O.K. Kwon, W.H. Kwon and K.S. Lee, " FIR filters and recursive forms for discrete-time state-space models," Automatica, Vol. 25, pp. 715-728, Sep. 1989.

[2] W.H. Kwon and O.K. Kwon, " FIR filters and recursive forms for continuous time-invariant state-space models," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 32, pp. 352-356, Apl. 1987.

[3] M. Salgado, R. Middleton and G.C. Goodwin, " Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering," IEE PROCEEDINGS, Pt. D, Vol. 135, pp. 28-34, JAN. 1988.

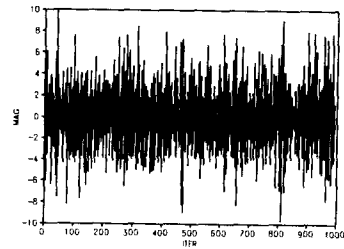
[4] R.H. Middleton and G.C. Goodwin, " Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 31, pp. 1015-1021, NOV. 1986.

[5] R.H. Middleton and G.C. Goodwin, Digital Control and Estimation: A Unified Approach, Prentice-Hall, 1990.

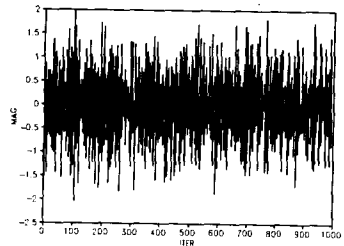
[6] V. Peterka, " Control of uncertain processes: applied theory and algorithms," Kybernetika, Vol. 22, pp. 30-35, 1986.

[7] N. Hori, P.N. Nikiforuk and K. Kanai, " On a discrete-time system expressed in the Euler operator," American Control Conference, pp. 873-878, 1986.

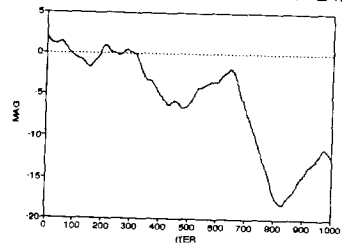
[8] R.H. Middleton, " Trade-offs in linear control system design," Automatica, Vol. 27, pp. 281-292, 1991.



(그림 1) FIR(shift)필터의 추정오차 잔류치



(그림 2) 델타 FIR필터의 추정오차 잔류치



(그림 3) Kalman 필터의 추정오차 잔류치