ARMA고속 transversal 필터의 수리적 안정성 개선

이 철 희*0　　　　남 현 도**
*강원대학교 전기공학과　　**단국대학교 전기공학과

Improvement of the numerical stability of ARMA fast Transversal Filter

Chul-Heui Lee*　　Hyun-Do Nam**
* Dept. of Elec. Eng., Kangweon National University
** Dept. of Elec. Eng., Dankook University

ABSTRACT

ARMA fast Transversal filter(FTF) algorithm solves the extended least squares estimation problems in a very efficient way. But, unfortunately, it exhibits a very unstable behavior, due to the accumulation of round-off errors. So, in this paper, two effective method to stabilize ARMA FTF algorithm is proposed. They are based on the analysis of the propagation of the numerical errors according to a first order linear model. The proposed methods modify the numerical properties of the variables responsible for the numerical instability, while preserving the theoretical form of the algorithm. The proposed algorithms still have the nice complexity properties of the original algorithm, but have a much more stable brhavior.

1. 서 론

적응 신호 처리 및 제어 등 여러 분야에서 Least Squares (LS) 계열 알고리즘의 사용 필요성이 점차 늘어나고 있으나 계산량의 제약으로 인하여 Least Mean Square(LMS) 계열 알고리즘이 주로 사용되어 왔다. 그런데 최근에 이동불변 특성을 이용하여 연산량을 LMS와 마찬가지인 모델 차수 차원으로 줄인 고속 LS 알고리즘이 transversal 필터 또는 격자 필터의 형태로 제안됨으로써 실제 문제에 대한 LS 알고리즘의 사용이 용이해졌다.(1,2)

그중 고속 transversal필터(FTF)는 AR모델 또는 FIR필터링의 경우 여러 가지 접근방식으로 fast Kalman algorithm, FAEST, FTF 등 다양한 형태로 구현되었으며, 최근에는 ARMA 모델의 경우에 대해서도 Extended Least Squares(ELS)를 FTF로 구현한 ARMA FTF 알고리즘이 발표되었다.(1-4) 그러나 불행히도 이들 FTF 알고리즘들은 알고리즘의 형태나, 데이타의 특성 등과는 전혀 무관하게 장기 동작(long run)시 유한 어장 (finite word length) 효과로 인한 round-off 오차의 누적으로 인한 수리적 불안정성의 경향을 보이는 것이 큰 문제점으로 지적되고 있으며 FTF의 사용에 제약 요소가 되고 있어 이러한 수리적 불안정성의 분석과 개선에 관한 연구들이 이루어지고 있다.(5-12)

따라서 본 논문에서는 최근에 제안된 ARMA FTF의 수리적 불안정성을 규명하고 그 개선책을 제시하였다.

2. ARMA FTF 알고리즘

신호가 ARMA 모델로 모형화 될 경우, ARMA 계수 추정 과정의 비선형성을 피하기 위해 시간 t-1까지의 백색잡음 시퀀스를 안다고 가정하면

$$y(t) = -\phi'(t)\theta + w(t) \tag{1}$$

여기서 $\phi(t) = [y(t-1)\cdots y(t-p) \;\; w(t-1)\cdots w(t-q)]'$

$\theta(t) = [a_1\cdots a_p \; -b_1\cdots -b_q]'$

이 경우 ARMA 계수를 추정하는 문제는 다음과 같은 오차 파워를 최소화하는 LS 문제로 변환된다.

$$J(t) = \sum_{k=0}^{t} [y(t) - \phi'(t)\theta(t)]^2 \tag{2}$$

이와 같이 w(t)의 값을 $\hat{w}(t)=y(t)-\phi(t)\theta(t)$로 대체한 뒤 RLS 알고리즘으로 ARMA 계수를 추정하는 것이 ELS이며, 따라서 RLS에서와 마찬가지로 다음과 같이 정의되는 Kalman gain의 시갱신이 계수추정의 핵을 이루고 있다.

$$g^*(t) = -\phi'(t+1)R^{-1}(t+1) \tag{3}$$

여기서 $R(t) = \sum_{i=0}^{t} \phi(i)\phi'(i)$

그런데 ARMA 모델의 경우, 이동불변 특성이 상관함수 행렬의 소블록별로 만족하므로 새로이 $x_f(t)=[y(t) \;\; w(t)]'$와 $x_b(t)=[y(t-p) \;\; w(t-q)]'$에 대해 다음과 같이 FLP(Forward Linear Predictor)와 BLP(Backward Linear Predictor)를 구성하고 이로부터 Kalman gain을 갱신한 것이 ARMA FTF이다.

$$\text{FLP} : e(t) = x_f(t)-\hat{x}_f(t) = A(t)J_f\phi_e(t) \tag{4}$$

$$\text{BLP} : r(t) = x_b(t)-\hat{x}_b(t) = B(t)J_b\phi_e(t) \tag{5}$$

여기서 $\phi_e(t)=[y(t)\cdots y(t-p) \;\; w(t)\cdots w(t-q)]'$이고 J_f와 J_b

는 각각 다음과 같은 순열 행렬이다.

$J_f\phi_e(t)=[y(t)\ w(t)\ y(t-1)\cdots y(t-p)\ w(t-1)\cdots w(t-q)]'$

$J_b\phi_e(t)=[y(t)\cdots y(t-p+1)\ w(t)\cdots w(t-q+1)\ y(t-p)\ w(t-q)]'$

그런데 다음과 같이 정의되는 dual Kalman gain을 사용하면 계산량을 더 줄일 수 있으며, 사영 연산자를 이용한 기하적인 접근 방식으로 유도된 ARMA 전치 윈도우형 FTF 알고리즘[3]이 표 1에 정리되어 있다.

$$g(t) = -\phi'(t+1)R^{-1}(t) \tag{6}$$

ARMA PW-FTF 알고리즘은 10N(N=p+q)에 비례하는 연산량을 필요로 한다.

표 1. ARMA PreWindowed FTF (ARMA PW-FTF) Algorithm

$e^o(t) = A(t-1)J_f\phi_e(t)$

$e(t) = e^o(t)\gamma(t-1)$

$\alpha(t) = \alpha(t-1) + e^o(t)e'(t)$

$\gamma_e(t) = \gamma(t-1) - e'(t)\alpha^{-1}(t)e(t)$

$g_e(t) = [0\ 0\ g(t-1)] - e^{o\prime}(t)\alpha^{-1}(t-1)A(t-1)$

$\mathbf{g}_e(t) = g_e(t)J_fJ_b'$

$\mu(t) = [\mathbf{g}_e(t)]^{N+1,N+2}$

$A(t) = A(t-1) + e(t)[0\ 0\ g(t-1)]$

$\theta(t) = [A(t)]_{1st\ row}$

$r^o(t) = -\beta(t-1)\mu(t)$

$\gamma(t) = \gamma_e(t)\ /\ [1 + \mu(t)r^o(t)\gamma_e(t)]$

$r(t) = r^o(t)\gamma(t)$

$\beta(t) = \beta(t-1) + r^o(t)r'(t)$

$[g(t)\ 0\ 0] = \mathbf{g}_e(t) - \mu(t)B(t-1)$

$B(t) = B(t-1) + r(t)[g(t)\ 0\ 0]$

3. 수리적 오차의 전파와 불안정성

표 1의 ARMA PW-FTF 알고리즘은 AR모델 또는 FIR 필터링 경우의 FTF들과 마찬가지로 장기동작시 유한 어장 효과로 인한 round-off 오차에 의해 수리적 불안정성을 나타내므로 실제 경우에 사용할 때 문제가 된다. 그러므로 수리적 오차의 누적에 관한 원인과 관련된 필터변수를 알아내기 위해 수리적 오차의 전파 메카니즘을 분석해야 한다.

순환 시갱신되는 필터 변수들을 다음과 같이 상태공간 모델로 표현할 수 있다.

$$Z(t) = f(Z(t-1),\ \phi_e(t)) \tag{7}$$

여기서 $Z=[A_1\ A_2\ \alpha_1\ \alpha_2\ g\ \gamma\ B_1\ B_2\ \beta_1\ \beta_2]'$이며, 이때 아래첨자는 행렬의 행을 표시한다.

finite precision에 의한 필터변수의 값 $\underline{Z}$와 infinite precision에 의한 Z의 차이를 ΔZ라고 하면, 즉 $\Delta Z=\underline{Z}-Z$ 라고 하면 다음과 같은 선형화된 오차 시스템 모델을 얻을 수 있다.[6,11]

$$\Delta Z(t) = F(t)\Delta Z(t-1) + V(t) \tag{8}$$

여기서 $F(t) = \nabla_Z f(Z(t-1),\ \phi_e(t))|_{Z=Z(t-1)}$이며, V(t)는 round-off 오차이다.

오차 전파의 해석은 알고리즘이 수렴하여 정상상태에 있으며, R(t)가 지속 여기 조건을 만족한다는 가정하에 이루어지는데 일반적으로 각 성분들이 복잡하게 얽혀 있고, 신호에 종속적이므로 해석이 까다롭다.[10,11]

1차 근사화에 의한 해석 결과는 FTF의 수리적 불안정성이 주로 BLP변수들의 수리적 불안정성에 의한 것임을 보여주며, 이는 시뮬레이션에 의한 관찰과도 일치한다. BLP 변수들의 수리적 불안정성은 기본적으로 다음의 사전 후향 예측 오차 (a priori backward prediction error) 계산식에 기인한다.

$$r^o(t)=-\beta(t-1)[\mathbf{g}_e(t)]^{N+1,N+2}=-\beta(t-1)\mu(t) \tag{9}$$

따라서 이에 의한 수리적 오차의 누적에 대한 대책으로 사전 후향 예측 오차를 매 순환 스텝마다 두 가지 방식으로 계산하여 그 차이를 이용하여 수리적 오차의 보정을 꾀할 수 있다. 이때 사전 후향 예측 오차를 계산하는 다른 하나의 식은 사전 후향 예측 오차의 정의를 사용하는 것으로서 다음과 같이 주어진다.

$$r^o(t) = B(t-1)J_b\phi_e(t) \tag{10}$$

그러면 (9)와 (10)의 차이는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta r(t) = B(t-1)J_b\phi_e(t) + \beta(t-1)\mu(t) \tag{11}$$

식(11)을 사용하여 $r^o(t)$의 값을 필요로 하는 필터 변수 $r_N(t), B(t), \beta(t)$의 계산에 다음과 같이 보정된 $r^o(t)_i$를 사용한다.

$$r^o(t)_i = B(t-1)J_b\phi_e(t) + \rho_i\ \delta r(t)_i\ \ [i=\gamma, B, \beta] \tag{12}$$

여기서 ρ는 제어상수로서 신호의 특성에 따라 적절히 선정한다.[10]

이상과 같이 간단한 방법을 사용하여 수리적 안정성을 개선한 ARMA PW-SFTF 알고리즘이 표2에 주어져 있다. ARMA PW-SFTF 알고리즘은 12N에 비례하는 연산량을 필요로 하므로 계산량의 작은 추가 부담(2N)으로 수리적 안정성을 개선할 수 있다.

표 2. Numerically Sable ARMA PreWindowed FTF (ARMA PW-SFTF) Algorithm

$e^o(t) = A(t-1)J_f\phi_e(t)$

$r^o(t) = B(t-1)J_b\phi_e(t)$

$e(t) = e^o(t)\gamma(t-1)$

$\alpha(t) = \alpha(t-1) + e^o(t)e'(t)$

$\gamma_e(t) = \gamma(t-1) - e'(t)\alpha^{-1}(t)e(t)$

$g_e(t) = [0\ 0\ g(t-1)] - e^{o\prime}(t)\alpha^{-1}(t-1)A(t-1)$

$\mathbf{g}_e(t) = g_e(t)J_fJ_b'$

$\mu(t) = [\mathbf{g}_e(t)]^{N+1,N+2}$

$A(t) = A(t-1) + e(t)[0\ 0\ g(t-1)]$

$\theta(t) = [A(t)]_{1st\ row}$

$\delta r(t) = r^o(t) + \beta(t-1)\mu(t)$

$r^o(t)_B = r^o(t) + \rho_B\delta r(t)$

$r^o(t)_\gamma = r^o(t) + \rho_\gamma\delta r(t)$

$r^o(t)_\beta = r^o(t) + \rho_\beta\delta r(t)$

$\gamma(t) = \gamma_e(t)\ /\ [1 + \mu(t)r^o(t)_\gamma\gamma_e(t)]$

$\beta(t) = \beta(t-1) + r^o(t)_\beta r^{o\prime}(t)_\beta\gamma(t)$

$$[\mathbf{g}(t)\ 0\ 0] = \mathbf{g}_e(t) - \mu(t)B(t-1)$$

$$B(t) = B(t-1) + r^o(t)_B\gamma(t)[\mathbf{g}(t)\ 0\ 0]$$

4. Leaky ARMA PW-FTF 알고리즘

FTF의 수리적 안정성을 개선하는 또 다른 방법으로 leaky LMS 알고리즘과 유사한 방법을 사용할 수 있다.[9,12]

FTF의 수리적 불안정성이 앞 절에서 살펴 본 바와 같이 주로 BLP의 필터 변수들에 의한 것이므로 (11)로 주어진 $\delta r(t)$를 이용하여 사전 후향 예측 오차를 보정하는 외에도 BLP계수 벡터 $B(t-1)$도 적절히 보정된 $\underline{B}(t-1)$로 대체하는 것이 수리적 불안정성에 대한 더욱 적절한 대책이 될 수 있다.

이 경우 $\underline{B}(t-1)$가 어떤 조건을 만족하도록 구하느냐가 문제인데, LS알고리즘의 특성이 파괴되지 않도록 가능한한 이론적인 $B(t-1)$에 근사하면서 수리적 안정성이 보장될 수 있도록 $\delta r(t)$도 최소화하는 $\underline{B}(t-1)$를 구하는 것이 타당할 것이다.

즉 다음과 같이 주어지는 함수를 최소화하도록 $\underline{B}(t-1)$를 구하면 된다.

$$J=\rho\delta\underline{r}'(t)\delta\underline{r}(t) + \sum_{k=0}^{t-1}\{\underline{B}_1(t-1)J_b\phi_e(k)-B_1(t-1)J_b\phi_e(k)\}^2 + \sum_{k=0}^{t-1}\{\underline{B}_2(t-1)J_b\phi_e(k)-B_2(t-1)J_b\phi_e(k)\}^2 \tag{13}$$

여기서 ρ는 제어상수이며, $\delta\underline{r}(t)$는 $\delta r(t)$에서 $B(t-1)$ 대신 $\underline{B}(t-1)$로 대체한 값이다.

$\delta\underline{r}(t)$는 (11)로부터

$$\delta\underline{r}(t) = \delta r(t) + [\underline{B}(t-1)-B(t-1)]J_b\phi_e(t) \tag{14}$$

(14)를 (13)에 대입하여 (13)을 최소하하는 $\underline{B}(t-1)$를 구하면

$$\underline{B}(t-1) = B(t-1) + \rho\delta\underline{r}(t)[\mathbf{g}(t)\ 0\ 0] \tag{15}$$

(15)의 양변의 우측에 $J_b\phi_e(t)$를 곱해 정리하면 다음과 같은 사전 후향 예측 오차의 보정식을 얻는다.

$$\underline{r}^o(t) = r^o(t) + \rho\delta\underline{r}(t)(1-\gamma^{-1}(t)) \tag{16}$$

(14)와 (15)로부터

$$\delta\underline{r}(t) = \delta r(t) + \rho\delta\underline{r}(t)(1-\gamma^{-1}(t)) \tag{17}$$

따라서 $\delta\underline{r}(t)$에 관해 (17)을 정리하면

$$\delta\underline{r}(t) = [1-\rho(1-\gamma^{-1}(t)]^{-1}\delta r(t) \tag{18}$$

그리고 (15)의 $\mathbf{g}(t)$를 표 1의 갱신식을 이용하여 대체하여 정리하면

$$\underline{B}(t-1) = [I + \rho\delta r(t)\mu(t)]^{-1}B(t-1) \tag{19}$$

이러한 BLP 변수들의 보정 과정을 위해서는 표1의 갱신식의 순서가 달라지게 되며, 이에 따라 $\gamma_e(t)$는 $\alpha(t-1)$을 이용한 갱신식을 사용해야 하며, $\gamma(t)$도 $\mu(t)=[\mathbf{g}_e(t)]^{N+1,N+2}$라는 사실을 이용하여 다음과 같이 먼저 계산되어야 한다.

$$\gamma(t) = \gamma_e(t)/(1+\{[\mathbf{g}(t-1)]^{P\cdot N} - e^{o\prime}(t)\alpha^{-1}(t-1)[A(t-1)]^{P\cdot N}\}r^o(t)\gamma_e(t)) \tag{20}$$

이상의 결과를 정리한 leak ARMA PW-FTF 알고리즘이 표 3에 나타나 있다. leaky ARMA PW-FTF 알고리즘은 16N에 비례하는 연산량을 필요로 하며, 매우 민감하여 갱신식의 순서나 계산 과정의 변형에 대해 발산하는 경향을 보이는 단점이 있다.

표 3. Leaky ARMA PW-FTF Algorithm

$$e^o(t) = A(t-1)J_f\phi_e(t)$$
$$r^o(t) = B(t-1)J_b\phi_e(t)$$
$$\gamma_e(t) = \gamma(t-1)/(1 + e^{o\prime}(t)\alpha^{-1}(t-1)e^o(t)\gamma(t-1))$$
$$\mathbf{g}_e(t) = [0\ 0\ \mathbf{g}(t-1)] - e^{o\prime}(t)\alpha^{-1}(t-1)A(t-1)$$
$$\mathbf{g}_e(t) = \mathbf{g}_e(t)J_fJ_b'$$
$$\mu(t) = [\mathbf{g}_e(t)]^{N+1,N+2}$$
$$e(t) = e^o(t)\gamma(t-1)$$
$$\alpha(t) = \alpha(t-1) + e^o(t)e'(t)$$
$$A(t) = A(t-1) + e(t)[0\ 0\ \mathbf{g}(t-1)]$$
$$\theta(t) = [A(t)]_{1st\ row}$$
$$\gamma(t) = \gamma_e(t)\ /\ [1 + \mu(t)r^o(t)\ \gamma_e(t)]$$
$$\delta r(t) = r^o(t) + \beta(t-1)\mu(t)$$
$$\delta\underline{r}(t) = [1-\rho(1-\gamma^{-1}(t)]^{-1}\delta r(t)$$
$$\underline{B}(t-1) = [I + \rho\delta r(t)\mu(t)]^{-1}B(t-1)$$
$$\underline{r}^o(t) = r^o(t) + \rho\delta\underline{r}(t)(1-\gamma^{-1}(t))$$
$$r(t) = \underline{r}^o(t)\gamma(t)$$
$$\beta(t) = \beta(t-1) + \underline{r}^o(t)\ r'(t)$$
$$[\mathbf{g}(t)\ 0\ 0] = \mathbf{g}_e(t) - \mu(t)\underline{B}(t-1)$$
$$B(t) = \underline{B}(t-1) + r(t)[\mathbf{g}(t)\ 0\ 0]$$

5. 결 론

FTF 알고리즘들은 적응 신호처리 등의 분야에서 실제 문제에 대한 LS 알고리즘의 응용 가능성을 높였으나 장기동작시 유한 어장 효과로 인한 수리적 불안정성 때문에 그 사용이 제한적이다.

최근에 발표된 ARMA FTF도 마찬가지 문제점을 안고 있으므로 본 논문에서는 ARMA FTF의 수리적 불안정성을 야기하는 수리적 오차의 전파 메카니즘을 1차 상태공간 모델을 이용하여 분석하고, 수리적 안정성을 개선할 수 있는 변형된 알고리즘을 두가지 형태로 제시하였다.

제안된 알고리즘은 수리적 안정성이 상당히 보장되므로 실제 문제에 보다 유용할 것으로 기대된다.

정규화 알고리즘에 의한 수리적 안정성의 개선과의 비교 및 정규화 알고리즘에 대한 제안된 방식의 적용 등은 추후 연구되어야 할 과제이다.

참 고 문 헌

[1] M.L.Honig and D.G.Messerschmitt, Adaptive Filters : Structures, Algorithms, and Applications, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1984.

[2] J.M.Cioffi and T.Kailath, "Fast Recursive Least

Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering" IEEE Tr.Acoust. Speech, Signal Processing, Vol.ASSP -32, pp.304-337, 1984.

[3] 이철희, "ARMA 스펙트럼 추정을 위한 확장 최소 자승법 고속 Transversal 필터", 강원대학교 과학 · 기술연구 제 29집, pp.317-328, 1990.

[4] 이철희, "공분산형 ARMA 고속 Transversal 필터에 관한 연구", 한국 음향학회지 제 11권, pp.67-79, 1992.

[5] F. Ling and J. G. Proakis, "Numerical Accuracy and Stability: Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Roundoff Error", Proc.ICASSP, pp. 30.3.1-30.3.4, San Diego, CA, Mar. 1984.

[6] S.Ljung and L.Ljung, "Error Propagation Properties of Recursive Least-Squares Adaptation Algorithms," Automatica, Vol.21, pp.157-167, 1985.

[7] D. W. Lin, "On Digital Implementation of the Fast Kalman Algorithm", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-32, pp.998-1005, 1986.

[8] M. Bellanger, "Engineering Aspects of Fast Least Squares Algorithms in Transversal Adaptive Filter," Proc. ICASSP, pp.2149-2152, Dallas, TX, Apr. 1987.

[9] J.M. Cioffi, "Limited-precision Effects in Adaptive Filtering", IEEE Tr.Circuits Syst., Vol.CAS-34, pp. 821-833, 1987.

[10] A.Benallal and A.Gilloire,"A New Method to Stabilize Fast RLS Algorithms Based on a First-order Model of the Propagation of Numerical Errors" Proc.ICASSP pp.1373-1376, New York, NY, Apr. 1988.

[11] D.T.M.Slock and T.Kailath, "Numerically Stable Fast Recursive Least Squares Transversal Filters", Proc. ICASSP, pp.1365-1368, New York, NY, Apr. 1988.

[12] J. L. Botto and G.V. Moustakides, "Stabilization of Fast Kalman Algorithms", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-37, pp.1342-1348, 1989.

※ 사 의

본 연구는 한국과학재단(92-01-00-04) 지원에 의해 이루어 졌다.