

δ 변환을 채택한 디지털 PID 제어기 설계

김 인 중* 홍 석 민* 이 상 정**

* 국방과학 연구소

** 충남대학교 공과대학 전자공학과

Digital PID Controller Design Adopting the Delta Transforms

In Jung Kim* Seok-Min Hong* Sang Jeong Lee**

* Agency for Defense Development

** Dept. of Electronics Engineering
Chungnam National University

ABSTRACT

In order to implement the digital PID control algorithm, it is necessary to consider the effect of the finite word length(FWL). In this paper, we show the FWL effect in the digital PID controllers. The conception analyse the effects of the signal quantization error in the digital PID algorithm and the coefficient wordlength determined from performance criteria with the statistical wordlength concept. Throughout this paper, it is dealt with the type of controller structure based delta operator. the delta operator has such advantages are superior rounfoff noise performance, more accurate coefficient representation, and less sensitive control law.

제 1장 서론

최근 마이크로프로세서의 발달로 인하여 공정에 많은 제어 알고리즘을 적용할 수 있는 새롭고 다양한 기술이 개발되고 있다. 그 중에서 PID 제어기는 구조가 간단하고 계산량이 적어 마이크로프로세서에 내장하여 사용하는 경우 여러가지 장점을 갖게 된다[1]. 이러한 장점으로 산업현장에 설치된 제어기는 대부분 아날로그 PID 제어기이거나, 마이크로프로세서에 PID 기능이 내장되어 있는 형태이다.

그러나, 디지털 PID 제어기는 고정 소수점 연산을 사용하므로 유한 단어 길이의 특성을 고려해야 한다. 즉, A/D 변환기 및 마이크로프로세서의 유한 단어길이에 의해 발생되는 신호 양자화 오차와 계수 양자화 오차등의 영향으로 디지털 제어기의 성능은 아날로그 제어기에 비하여 악화된다. 이러한 영향을 최소화 하기 위하여 양자화 오차의 영향 분석[2]과 적절한 단어 길이를 선정하는 방법[3][4][5]을 정해야 한다.

본 논문에서는 디지털 PID 제어기를 구성하고, 이를 실현할 때 발생하는 양자화 오차의 영향 분석과 적절한 단어 길이 선정에 목적을 두었다. 이 과정에서 디지털 PID 제어기의 양자화 오차에 대한 영향을 줄이기 위하여 기존의 이산 시스템에서의 설계법인 z 변환법 대신에 δ 변환법을 사용하여 제어기를 설계한다[6]. δ 변환법은 z 변환법보다 유한단어 길이의 계수 표현, 라운드오프 오차특성, 그리고 계산 과정에서의 수치적 특성이 우수하다.

제 2 장 δ변환을 채택한 디지털 PID 제어기

디지털 PID 제어기 설계시 유한 단어 길이로 인하여 수치 오차가 발생하며, 이러한 오차 요인으로 인하여 주파수 응답 특성이 바뀌게 되는 경우가 발생한다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 대상 시스템의 모델과 PID 제어기를 δ 변환에 의한 설계법을 이용하여 설계한다.

디지털 PID 제어기의 구성도는 그림 2.1과 같다. 그림 2.1에서 플랜트 전달함수 P(s)는 ZOH를 통하여 이산화 형태인 전달함수 G(γ)로 표시하며, 제어기의 전달함수는 F(γ)로 표시한다.

그림 2.2에서 점 P₁은 주파수 ω₀에 대한 Nyquist 선도상의 3상한 점 α+jβ이다.

$$\begin{aligned} G(j\omega_0) &= G(\gamma) \Big|_{\gamma=(e^{j\omega_0 T}-1)/T} = \alpha + j\beta & (2.1) \\ F(j\omega_0) &= F(\gamma) \Big|_{\gamma=(e^{j\omega_0 T}-1)/T} \end{aligned}$$

여기서, γ은 δ에 대한 새로운 변환 변수(Transform variable)로서 정의한다. 이산 시간에서 시스템의 주파수 응답 특성은 γ을 (e^{jω₀T}-1)/T로 전환한다.

그림 2.1에서 다음과 같은 형태의 디지털 PID 제어기를 구성한다.

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= \frac{K_P(1+T/T_i+T_d/T)+K_P(1+2T/T_i)(T\gamma)^{-1}+K_P(T/T_i)(T\gamma)^{-2}}{1+(T\gamma)^{-1}} \\ &= \frac{b_0 + b_1\gamma^{-1} + b_2\gamma^{-2}}{1+a_0\gamma^{-1}} & (2.2) \end{aligned}$$

P₁에서 P₂로 이동시키는 PID 계수와 동조 방법은 식 (2.1)와 (2.2) 및 그림 2.2의 개념으로 부터 쉽게 구할수 있다 [7][8][9].

제 3 장 신호 양자화 오차 영향 분석

주어진 제어 목적에 맞는 디지털 PID 제어 알고리즘이 결정되면, 제어 신호 흐름의 순서를 결정짓는 제어기 구조를 정한다. 그리고, 신호가 동적 범위내에 존재하도록 스케일링 요소를 결정한다. 이는 일반적으로 마이크로 프로세서가 유한단어 길이를 갖고, 고정 소수점 연산을 사용하기 때문이다.

디지털 PID 제어기 구현시 이상적인 제어기는 제어기의 상이한 구조(직접구조, 병렬구조)에서 동일한 성능을 보이지만, 실제 제어기는 유한단어 길이의 영향으로 각 구조의 계산 순서에 따라 성능이 변한다. 따라서, 디지털 PID

제어기가 상태 실현되었을 때 유한 단어길이를 인한 영향이 가장 적은 구조를 선정하는 방법을 제시하고자 한다.

제 1 절 제어기 구조 및 스케일링

그림 3.1은 제어기의 상태 방정식을 직접구조와 병렬구조로 한 신호 흐름선도이다. 이미 병렬구조가 직접 구조에 비하여 양자화 오차 영향이 적다는 것은 알려져 있다 [7]. 병렬구조 경우에 양자화될 제어기 계수 및 상태 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta w(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(k) \\ u(k) &= [A \quad a_0 C] w(k) + (B + C) e(k) \quad (3.1) \\ \text{where, } A &= b_2/a_0 \\ B &= -(b_2 + a_0 b_1)/a_0^2 \\ C &= (a_0^2 b_0 + a_0 b_1 + b_2)/a_0^2 \end{aligned}$$

양자화 오차 영향을 분석하기 위하여 계수들의 최대 신호 크기를 정규화 한다. 즉, 오버플로우가 발생하지 않으면서 신호 대 잡음비(S/N ratio)를 최대로 해주는 스케일링을 필요하다. 기준 신호를 단위 계단 신호로 사용하므로 스케일링 방법은 upper bound 방법을 사용한다. 제어 알고리즘 계산은 고정 소수점 연산을 사용하며, 신호의 동적 범위를 -1과 1사이로 둔다.

본 연구의 대상인 디지털 PID 제어기의 상태 실현식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta w(k) &= Aw(k) + Be(k) \\ u(k) &= Cw(k) + De(k) \quad (3.2) \end{aligned}$$

스케일링 조건은 스케일링된 A/D변환기 출력과 D/A변환기 입력의 크기는 동적범위 [-1, 1]내에 존재하며, 제어기 구조내의 더하기 노우드에서의 스케일링된 신호의 크기도 1을 넘지 않아야 하고, 시스템의 동특성이 스케일링의 영향을 받지 않아야 한다.

위의 세 조건을 만족시키도록 스케일링 요소를 다음과 같이 택한다.

$$w(k) = \lambda_w \underline{w}(k), e(k) = (1/\lambda_e) \underline{e}(k), u(k) = \lambda_u \underline{u}(k) \quad (3.3)$$

여기서, λ_w 는 nonsingular 대각 행렬이며, λ_1 과 λ_2 의 스케일링 요소를 갖는다.

스케일링된 제어기 $\underline{F}(\gamma)$ 의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \underline{w}(k) &= \lambda_w^{-1} A \lambda_w \underline{w}(k) + (1/\lambda_e) \lambda_w^{-1} B \underline{e}(k) \\ \underline{u}(k) &= (1/\lambda_u) C \lambda_w \underline{w}(k) + (1/\lambda_u \lambda_e) D \underline{e}(k) \quad (3.4) \end{aligned}$$

그림 3.2는 스케일링 전후의 시스템 블록선도이다. 그림 3.2(a)에서 기준 입력 $r(k)$ 로부터 $e(k)$, $u(k)$ 및 $w(k)$ 의 전달함수 $H_e(\gamma)$, $H_u(\gamma)$ 및 $H_w(\gamma)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_e(\gamma) &= 1/(1+F(\gamma)G(\gamma)) \\ H_u(\gamma) &= F(\gamma)/(1+F(\gamma)G(\gamma)) \\ H_w(\gamma) &= (\gamma I - A)^{-1} B / (1+F(\gamma)G(\gamma)) \quad (3.5) \end{aligned}$$

식 (3.5)가 페루우프 시스템에서 안정하다는 가정하여 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$E(\gamma) = \lambda_e H_e(\gamma) R(\gamma)$$

$$U(\gamma) = \lambda_u H_u(\gamma) R(\gamma) \quad (3.6)$$

$$W(\gamma) = \lambda_w H_w(\gamma) R(\gamma)$$

여기서, $E(\gamma)$, $U(\gamma)$, $W(\gamma)$ 는 각각 $e(k)$, $u(k)$ 및 $w(k)$ 의 주파수 영역에서의 출력이다. 식 (3.6)을 시간 영역으로 δ 역변환하면

$$v(t) = \int_0^{t+\Delta} S \lambda h(\tau) r(t-\tau) d\tau \quad (3.7)$$

으로 표현한다. 여기서, S 는 sum으로 δ 변환에 대한 새로운 적분 변수로 사용하며, $v(t)$, λ , 및 $h(\tau)$ 는 식 (3.7)의 일반화 된 형태이다. 입력이 단위 계단 입력이므로 $|r(t-\tau)| = 1$ 로 표현한다.

$$|v(t)| \leq \int_0^{t+\Delta} |\lambda h(\tau)| |r(t-\tau)| d\tau \quad (3.8)$$

$$< \int_0^{t+\Delta} |\lambda h(\tau)| d\tau$$

따라서, $|v(t)| < 1$ 로 역시 정규화 해야 하므로 스케일링 요소 λ 는

$$\lambda = 1 / \left(\int_0^{t+\Delta} |h(\tau)| d\tau \right) \quad (3.9)$$

로 구할 수 있으므로 각 스케일링 요소는 다음과 같이 표현 된다.

$$\lambda_e = 1 / \left(\int_0^{t+\Delta} |h_e(\tau)| d\tau \right), \lambda_u = \int_0^{t+\Delta} |h_u(\tau)| d\tau, \lambda_w = \int_0^{t+\Delta} |h_w(\tau)| d\tau \quad (3.10)$$

제 2 절 신호 양자화 오차 영향 분석

양자화 오차는 확률적인 A/D변환 및 곱셈 양자화 오차와 확정적인 제어기 계수 양자화 오차로 구분된다. 신호 양자화 오차는 A/D변환 양자화 오차와 곱셈 양자화 오차이다. 이는 시스템 동특성에는 영향을 주지 않지만 출력값에 영향을 준다.

신호양자화 오차는 제어기 내부에서 양자기의 위치가 곱셈 다음에 위치하고, 2의 보수 표현에 대한 반올림 양자기를 사용하며, 균일 분포를 갖는 백색 잡음이 더해지는 형태로 주어진다고 가정한다.

양자화 오차 e_r 의 크기 범위는 다음과 같다.

$$e_r(t) \in [-2^{-n}, 2^{-n}] = [-q/2, q/2] \quad (3.11)$$

여기서, 평균 $E[e_r] = 0$ 이며, 분산 $\sigma^2 = q^2/12$ 이다. 양자화 스텝 q 는 소수점 이하를 나타내며, n비트를 사용하면 $q = 2^{-n}$ 이다.

그림 3.3은 스케일링에 의하여 스케일링된 제어기의 신호 흐름선도와 신호 양자화 오차 발생 장소를 나타낸다. 여기서, e_{ad} 는 A/D 변환 오차이고, e_m 은 곱셈 양자화 오차이다. e_m 에서 나타나는 수는 곱셈 양자화 오차의 발생 회수를 의미한다.

스케일링에 의해 A/D 변환으로 생기는 양자화 잡음에서 제어시스템 출력까지의 전달 함수 $F_{ad}(\gamma)$ 는 A/D변환으로 생기는 양자화 잡음 오차 발생 장소로부터 $\underline{u}(k)$ 까지이며, 제어기 구조에 관계없이 $1/(\lambda_u \lambda_e) F(\gamma)$ 로 주어진다. 또한, 곱셈 양자화 오차는 신호 흐름도에서 $\delta \underline{w}_i(k)$ 과 $\underline{u}(k)$ 에서만 발생함을 알 수 있다. $F_i(\gamma)$ 는 곱셈 양자화 오차 발생 장소로부터 $\underline{u}(k)$ 까지의 전달 함수이다.

위 두 양자화 오차에 대한 전달함수는 하나의 식으로 표현할 수 있다. 양자화 오차로부터 플랜트 출력까지의 전달함수는 다음과 같이 표시한다.

$$H_c(\gamma) = \lambda_u \frac{F_c(\gamma)G(\gamma)}{1+F(\gamma)G(\gamma)} \quad (3.12)$$

Where, $c : ad, \text{ or } i$

디지틀 PID 제어기의 각 구조에서 A/D 변환으로 생기는 양자화 오차는 한 곳에서 발생하고, 곱셈 양자화 오차는 세 곳에서 발생한다. 이들 양자화 잡음으로 인한 플랜트 출력의 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \left\{ \frac{q_{ad}^2 T}{12} \right\} \int_{-T/2}^{T/2} H_{ad}(\gamma) H_{ad}(-\gamma) d\gamma + \\ &\left\{ \frac{q_m^2 T}{12} \right\} \sum_{i=1}^3 N_i \int_{-T/2}^{T/2} H_i(\gamma) H_i(-\gamma) d\gamma \quad (3.13) \\ &= \left\{ \frac{q_{ad}^2 T}{12} \right\} \int_0^{\infty} S_{had}^2(\tau) d\tau + \left\{ \frac{q_m^2 T}{12} \right\} \sum_{i=1}^3 N_i \int_0^{\infty} h_i^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

여기서, A/D변환 오차의 분산은 $q_{ad}^2/12$, 곱셈양자화 오차의 분산은 $q_m^2/12$ 이다. N_i 는 곱셈 양자화 오차가 발생하는 곳에서의 오차 발생 횟수이다. $F(\gamma)$ 의 λ_o, λ_u 는 제어기 구조에 관계없이 결정된다. 그러나, $F_i(\gamma)$ 는 제어기 구조에 따라 달리 주어지므로 곱셈 양자화 오차의 영향은 제어기 구조에 따라 다르다.

따라서, 신호 양자화 오차가 출력에 미치는 영향을 구하고, 구조별로 유한 단어길이를 위한 영향에 최소가 되는 구조를 선정한다.

제 4 장 통계적 제어기 계수 단어길이 선정 방법

제 1 절 통계적 단어길이 개념

유한 단어 길이에 의한 계수 양자화 오차는 신호 양자화 오차와는 달리 제어 시스템의 전달함수의 계수들을 변화시키므로 폐회로 안정도등에 직접 영향을 주는 중요한 요소이다.

본 논문에서는 디지틀 PID 제어기에 대하여 페루우프 시스템의 안정도 여유를 성능 척도로 하여 통계적 단어길이를 구하는 방법을 사용하여 적절한 단어 길이를 선정하는 방법을 제안한다. 계수 양자화 오차가 안정도에 영향을 미치지 않고, 신호 양자화 오차 영향 분석과 같이 반올림 양자화를 사용하며, 고정 소수점 연산을 사용하고, 길이는 균일하다고 가정한다.

그림 4.1은 성능척도의 개념으로 디지틀 PID 제어기를 이용하여 P1점의 플랜트 정보를 원하는 P2점 (M, ϕ) 으로 이동시킬 경우, 유한한 계수 단어길이를 인하여 위치가 변화 ($M+dM, \phi+d\phi$)하게 된다. 여기서, M 은 원점으로 부터 P2점까지의 크기이고, ϕ 는 원점에서 P2점에 이르는 위상각이다.

따라서, 디지틀 PID 제어기의 성능척도를 이러한 크기여유(dM)와 위상여유($d\phi$)로 각각 두었을 경우 제어기 설계조건으로 성능척도의 악화정도를 규정할 수 있으며, 이러한 특정한 악화 정도에 대한 허용범위를 규정할때 이를 만족시킬 수 있는 최소한의 통계적 단어길이 (SWL : Statistical Word Length)을 선정할 수 있다.

제 2 절 주파수 영역에서의 성능척도 계산

1. 계수양자화 오차 변화율에 의한 위상여유 변화율

그림 4.1에서 특정 주파수 ω_0 에 대한 P2점의 정보는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \arg[F(\omega_0, c_0)G(\omega_0)] - \pi \\ |F(\omega_0, c_0)G(\omega_0)| &= M \end{aligned} \quad (4.1)$$

여기서, c_0 는 무한 자리수로 표현되는 제어기 계수 벡터 값이다. 스케일링 요소를 포함되는 경우 $F(\omega_0, c_0)$ 는 $\lambda_o \lambda_u F(\omega_0, c_0)$ 로 나타내며 식 (4.1)은 스케일링 요소를 고려하여 다음과 같은 형태로 바꾸어 해석된다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \arg[\lambda_o \lambda_u F(\omega_0, c_0)G(\omega_0)] - \pi \\ |F(\omega_0, c_0)G(\omega_0)| &= M/\lambda_o \lambda_u \end{aligned} \quad (4.2)$$

위 두 식의 차이점은 스케일링의 유무이므로, 두 표현식에서 양자화되는 계수 벡터의 갯수와 그 값들은 일반적으로 다르다. 위의 수식을 이용하여 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$f_1(\omega, c) = M^2/(\lambda_o \lambda_u)^2 - |F(\omega, c_0)G(\omega_0)|^2 \quad (4.3)$$

식 (4.3)을 공칭점 (ω_0, c_0)에서 Taylor급수 전개하여 1차 항만을 취하면

$$f_1(\omega_0+d\omega, c_0+dc) \approx f_1(\omega_0, c_0) + \partial f_1/\partial \omega|_0 d\omega + \partial f_1/\partial c|_0 dc \quad (4.4)$$

이며, 여기서 첨자 $|_0$ 는 공칭점이다. 식 (4.4)에서 $f_1(\omega_0+d\omega, c_0+dc) = f_1(\omega_0, c_0) = 0$ 이므로 $d\omega$ 와 dc 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$d\omega = -(\partial f_1/\partial c)/(\partial f_1/\partial \omega)|_0 dc \quad (4.5)$$

또한 함수 f_1 의 정의식과 공칭점에서의 $G(\omega)$ 와 $F(\omega, c)$ 을 이용하여

$$\begin{aligned} \partial f_1/\partial c|_0 &= -|G(\omega_c)|^2 \frac{\partial |F(\omega, c)|^2}{\partial c} \Big|_0 \\ \partial f_1/\partial \omega|_0 &= -|F(\omega_0)|^2 \frac{\partial |G(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_0 - |G(\omega_0)|^2 \frac{\partial |F(\omega, c)|^2}{\partial \omega} \Big|_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

와 같은 관계를 얻는다.

다음으로 계수 양자화 오차의 변화를 dc 로 인한 위상 변화율 $d\Phi$ 을 분석하면 위상 관계식 (4.2)으로부터 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$f_2(\omega, c) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[F(\omega, c)G(\omega)]}{\text{Re}[F(\omega, c)G(\omega)]} \quad (4.7)$$

식 (4.7)을 공칭점에서 Taylor 급수 전개하여 $d\theta$ 와 $d\omega$ 및 dc 사이의 관계를 구한 후, 식 (4.5)를 이용하여 다음과 같은 관계식을 구한다.

$$\begin{aligned} d\theta &= f_2(\omega_0+d\omega, c_0+dc) - f_2(\omega_0, c_0) \\ &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial c} \Big|_0 - \frac{(\partial f_2/\partial \omega) \partial f_1}{(\partial f_1/\partial \omega) \partial c} \Big|_0 \right\} dc \end{aligned} \quad (4.8)$$

여기서, 식 (4.9)의 함수들은 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \omega} &= \frac{\lambda_o \lambda_u}{M} [(a \sin \phi - \beta \cos \phi) \frac{\partial \text{Re} F}{\partial \omega} \Big|_0 - (\beta \sin \phi + a \cos \phi) \frac{\partial \text{Im} F}{\partial \omega} \Big|_0] \\ &+ (\text{Re} F \sin \phi - \text{Im} F \cos \phi) \frac{\partial \text{Re} G}{\partial \omega} \Big|_0 - (\text{Im} F \sin \phi + \text{Re} F \cos \phi) \frac{\partial \text{Im} G}{\partial \omega} \Big|_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial c} = \frac{\lambda_0 \lambda_u}{M} \left[(\sin\phi - \beta \cos\phi) \frac{\partial \text{Re}F}{\partial c} \Big|_0 - (\beta \sin\phi + \alpha \cos\phi) \frac{\partial \text{Im}F}{\partial c} \Big|_0 \right]$$

따라서 식 (4.8)에 식(4.6)과 식(4.9)를 대입하면 계수 양자화 오차 변화율 dc에 의한 위상여유 변화율 dθ를 구할 수 있다.

2. 계수양자화 오차 변화율에 의한 크기여유 변화율

P2점은 계수 양자화 오차에 의해 위상이 변화하거나 (dΦ), 그 크기가 변화 할 수 있으므로 계수 양자화 오차의 변화율 dc로 인한 크기 변화율(dM)을 분석한다.

크기에 대한 변화율은 위상여유 변화율과 같은 형태로 함수 f3와 f4를 정의하여 계산 할 수 있다.

제 3 절 디지털 PID 제어기의 통계적 계수단어길이

전 절의 표현식에서 양자화될 계수의 갯수와 그 값은 일반적으로 다르다. 표 4.1는 병렬 구조의 경우에서 F(γ) 계수와 양자화될 상태 실현 계수이다. 여기서, 실제 양자화될 F(γ)의 분자계수 b0/(λ0λu), b1/(λ0λu), b2/(λ0λu) 및 스케일링 요소와 계수 벡터 c사이의 관계를 나타낸다. 계수 c를 이용하여 스케일링후 양자화될 계수를 이용하여 상태 방정식과 전달함수를 표현하면 병렬 구조의 경우에 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \underline{w}(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_6 \end{bmatrix} \underline{w}(k) + \begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \underline{e}(k) \\ \underline{u}(k) &= [c_1 \ c_2] \underline{w}(k) + c_3 \underline{e}(k) \\ \underline{F}(\gamma) &= \frac{c_3 \gamma^2 + (c_1 c_4 + c_2 c_5 c_6 - c_3 c_6) \gamma - c_1 c_4 c_6}{\gamma^2 - c_6 \gamma} \end{aligned} \quad (4.10)$$

식 (4.10)에서 주어지는 전달함수는 일반적으로 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$\underline{F}(\gamma) = \frac{r_1 \gamma^2 + r_2 \gamma + r_3}{\gamma^2 + r_4 \gamma} \quad (4.11)$$

표 4.1 F(γ) 계수와 양자화될 상태 실현 계수(병렬구조)

C1	C2	C3	C4	C5	C6
$\frac{\lambda_1}{\lambda_u} A$	$\frac{\lambda_2}{\lambda_u} C$	$\frac{1}{\lambda_u \lambda_0} (B+C)$	$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_0}$	$\frac{1}{\lambda_2 \lambda_0}$	a0

실제로 r1, r2, r3, 및 r4값은 유한자리수로 표현하면 구조별로 양자화될 계수 벡터가 달라지므로 다른 값을 갖는다. 식 (4.11)에서 안정도 여유 오차를 계산하기 위해 필요한 파라미터들 중에서 제어기 구조의 영향을 받는 것은 ar/ac뿐이며, 나머지는 제어기 구조에 관계없이 계산된다.

표 4.2는 병렬구조에서 구조별 전달함수 계수와 양자화 계수 관계이다. 제어기 구조에 관련된 파라미터인 ar/ac를 구하기 위해 제어기 구조별로 r을 계수 c의 함수로 나타내었다. 표 4.1와 표 4.2를 이용하여 제어기의 ar/ac를 구하면 병렬구조에서 다음과 같다.

$$\frac{\partial r}{\partial c} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_5 c_6 & -c_6 & c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 c_6 & 0 & 0 & -c_1 c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

표 4.2 구조별 전달함수 계수와 양자화 계수 관계(병렬구조)

r1	r2	r3	r4
c3	c1c4 + c2c5c6 - c3c6	-c1c4c6	c6

제어기 계수 양자화 오차에 의한 안정도 여유 오차는 위 식에서 주어진 파라미터들을 이용하여 구한다.

다음으로, 안정도 여유 오차 표현 식과 통계적 단어 길이 개념을 이용하여 계수단어 길이를 선정하는 방법에 대해 살펴보자. 크기 여유 오차 및 위상 여유 오차는 주어지는 성능치도에 대하여

$$\begin{aligned} d\theta &= f_2(w_c, c_0)dc \\ dM &= f_4(w_c, c_0)dc \end{aligned} \quad (4.13)$$

의 형태로 표현된다. 양자화될 제어기 계수의 갯수는 6개이므로 다음과 같은 안정도 여유오차를 갖는다.

$$E = \sum_{i=1}^6 f(w_c, c_0)dc_i \quad (4.14)$$

계수양자화 오차의 변화율 dc는 실제로는 확정적으로 주어지는 값이지만, 평균이 영이고, 분산이 q2/12인 서로 관련이 없는 균일 분포를 갖는 불규칙 변수로 가정한다. 이와같은 가정하에서 안정도 여유 오차는 평균이 0이며, 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_E^2 = \frac{q^2}{12} \sum_{i=1}^6 [f(w_c, c_0)]^2 dc_i \quad (4.15)$$

여기서, q는 양자화 스텝이다.

실제로 제어기 계수가 Central limit theorem에 의해 안정도 여유 오차는 가우스 분포를 가짐은 잘 알려져 있다. 따라서, 신뢰도 레벨(confidence level)이 주어지면 안정도 여유 오차가 미리 주어진 한계내에 머무는데 필요한 분산을 계산 할 수 있다.

예를 들면, 신뢰도 레벨을 95%(2σ point)로 두고 안정도 여유 오차가 |E| ≤ E0 내에 있도록 하기 위해서 E가 가우스 분포를 가지므로 P[|E| ≤ 2σE] = 0.954이므로, σE = E0/2가 되면 된다. 식 (4.15)로부터

$$q = \sqrt{3} E_0 / \sqrt{\sum_{i=1}^N [f(w_c, c_0)]^2 dc_i} \quad (4.16)$$

와 같은 양자화 스텝 q의 추정치를 얻을 수 있으므로 통계적 단어길이는

$$SWL = L + \log_2(1/q) \quad (4.17)$$

과 같이 구할 수 있다.

각각의 성능치도에 대해 동일한 방법으로 제어기 구조별 통계적 단어 길이를 정할 수 있다. 여기서, 크기와 위상에 대한 허용오차가 동시에 주어질 경우에는 각각을 만족시키는 SWL을 구한후 이중 큰것을 취한다.

제 5 장 예제 시뮬레이션

다음과 같은 전달함수를 갖는 연속시간 시스템을 대상으로 하여 디지털 PID 제어기를 구성한다.

$$G(s) = 10/(s+1)(s+2)$$

이 시스템의 지배적인 극점(Dominant pole)이 -1 이므로 이것의 크기를 시스템 시정수의 근사값으로 보아 표본주기를 그의 $1/10$ 인 0.1 초로 한다. ZOH 등가모델을 구하면 δ 변환을 사용한 시스템 전달함수는 다음과 같다.

$$G(\gamma) = 0.453(\gamma+19.04)/(\gamma+0.95)(\gamma+1.81)$$

이산시간 시스템 $G(\gamma)$ 은 $G(z)$ 에 비하여 연속시간 시스템의 $G(s)$ 와 근사한 형태의 전달함수를 보임을 알 수 있다. 즉, $G(\gamma)$ 의 샘플링 주기를 작을수록 전달함수는 비슷한 형태의 파라미터를 갖는다. 따라서, δ 변환법을 사용하면 연속시간 시스템과 이산시간 시스템을 비교하기가 용이하다.

그림 5.1은 δ 변환을 사용한 시스템 전달함수의 주파수 응답 특성이다. 위상통과 주파수 $\omega_0 = 7.7[\text{rad}]$ 에서 $\alpha = -0.157$, $\beta = 0$ 의 플랜트 정보를 얻는다.

플랜트의 식별된 점을 위상여유 $\phi = 60^\circ$, $M = 1$ 인 점으로 옮기는 PID 제어를 구성한다. PID 파라미터는 $K_p = 6.023$, $T_i = 3.455$, $T_d = 0.864$ 으로 구해지며 δ 변환에 의한 제어기 전달함수는 다음과 같다.

$$F(\gamma) = (8.89 + 9.75\gamma^{-1} + 2.85\gamma^{-2}) / (1 + 10\gamma^{-1})$$

표 5.1은 구조별 스케일링 요소와 오차의 분산이다. 스케일링 요소 λ_0 와 λ_u 는 제어기 구조에 관계없이 결정되고, λ_1 과 λ_2 는 제어기 구조에 따라 다른 값을 가진다.

A/D 단어 길이는 $L+n_s$, 신호 저장용 단어 길이는 $L+n_s$ 로 나타낼 수 있으며, 이때, n_a 와 n_s 는 소수점 이하를 표현하는 비트수이고 L 은 부호를 포함하여 정수를 나타내는 데 사용하는 비트 수이다. 표 5.2는 n_a 와 n_s 의 여러가지 조합에 대하여 정상상태에 도달하는 시간까지의 플랜트 출력에 대한 분산이며, 괄호 안의 값은 정상상태 도달 후의 분산 값이다. 여기서, 괄호 안의 값은 계산된 통계적 단어길이에서 소수점이하를 무조건 올림한 값으로서 실제 제어를 구현할 때 사용된 계수 비트수이다. 표 5.2로부터 동일한 신호양자화 오차에 대해서 z 변환에서는 병렬 구조가 직접 구조보다 나은 성능을 보임을 알 수 있으나 δ 변환에서는 구조에 따라 성능이 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

그림 5.2는 δ 변환의 출력 파형과 z 변환의 출력 파형에 대한 결과이다.

이러한 결과로부터, δ 변환이 z 변환보다 양자화 오차에 대하여 좋은 성능을 나타내며 구조별 특성이 적다는 것을 알 수 있다.

표 5.1 구조별 스케일링 요소와 오차의 분산

내용	구조	z 변환법		δ 변환법	
		직접	병렬	직접	병렬
스케일링 요소	λ_0	0.3969		1.0	
	λ_u	29.6246		8.889	
	λ_1	7.460	2.519	0.0738	0.6862
	λ_2	7.460	7.460	0.1	0.1
오차 분산	직접	$6.14 \sigma_{ad}^2 + 132.7 \sigma_m^2$		$4.61 \sigma_{ad}^2 + 22.07 \sigma_m^2$	
	병렬	$6.14 \sigma_{ad}^2 + 52.2 \sigma_m^2$		$4.61 \sigma_{ad}^2 + 11.76 \sigma_m^2$	

표 5.3은 안정도 여유 오차중 위상 여유 허용 한계를 2° , 5° , 10° 로 두고 각 경우에 대한 통계적 단어길이를 구한 결과이다.

표 5.2 신호 양자화오차 영향(분산, scale: $\times 10^{-3}$)

변환방법	z 변환법		δ 변환법	
	직접구조 (L=1)	병렬구조 (L=1)	직접구조 (L=1)	병렬구조 (L=1)
$n_a=11, n_s=11$	7.6(2.6)	5.3(2.4)	3.3(0.6)	3.4(0.8)
$n_a=11, n_s=6$	146(171)	120(90)	3.9(0.2)	3.9(0.2)
$n_a=6, n_s=11$	609(182)	396(92)	67(30)	73(2.5)

그림 5.3은 통계적 단어 길이에 대한 출력 특성 결과이다. 병렬구조 제어기가 직접구조 제어기보다 유한 단어 길이에 대한 성능이 우수하며, 역시 δ 변환을 사용하여 구성한 제어기 성능이 z 변환보다 적은 단어길이로도 좋은 결과를 구할 수 있다.

5.3 통계적 계수단어 길이

구조	E_0	2°	5°	10°
직접구조 (L=1)		7.781(8)	6.643(7)	5.781(6)
병렬구조 (L=1)		6.214(7)	5.716(6)	4.972(5)

제 6 장 결론

본 논문에서는 δ 변환법을 채택한 디지털 PID 동조기 설계 방법을 유한 단어 길이를 고려하여 제안하였다. 이를 위해 본 논문에서 제시한 결과는 다음과 같다.

- ▶ δ -변환법을 사용한 제어 알고리즘 구성
- ▶ 신호 양자화 오차 영향분석
- ▶ 통계적 단어길이 개념을 사용한 제어기 계수 단어길이 방법 개발

이상의 연구 결과를 검증하기 위하여 본 논문에서는 예제 시뮬레이션을 수행하였고 이를 통해 본 연구의 결과가 효과적으로 사용될 수 있음을 보였다.

이상의 결과로부터 본 논문에서 제안한 디지털 PID 제어기는 실제 공정에서 사용될 때 유한 단어길이와 같은 피할 수 없는 제한 요소 영향을 효과적으로 대처할 수 있는 제어기 설계 방법이라고 결론 지을 수 있다.

참고문헌

- [1] Charles L. Phillips and Royce D. Nagle, Digital Control System Analysis and Design, Prentice-Hall, 1990.
- [2] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer, Discrete-time Signal Processing, Prentice-Hall, 1990.
- [3] J. B. Knowles and E. M. Olcayto, "Coefficient accuracy and digital filter response," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-15, pp. 31-41, Mar. 1968.
- [4] R. E. Crochiere, "A new statistical approaches to the coefficient wordlength problem for digital filters," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, no. 3, pp. 190-196, Mar. 1975.
- [5] P. Moroney et al., "The digital implementation of control compensators: the coefficient wordlength issue," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 621-630, Aug. 1980.

- [6] Richard H. Middleton & Graham C. Goodwin, Digital Control System, Prentice-Hall, 1990.
- [7] 이 상정, 김 인중, 윤 서영, "스트랩다운 관성 항법 장치의 감지기 온도 제어," 국방과학 연구소, 워터 연구보고서, 1991.
- [8] 이 상정, 홍 석민, 김 인중, "공정정보 시스템을 위한 기초연구," 한국과학재단, 목적기초연구보고서, 1991.
- [9] 이 상정, 김 인중, 홍 석민, "PID 자동 동조기의 디지털 구현," 한국자동제어학술회의, 한국자동제어 학술회의 논문집, pp.311-316, vol.1, 1991.

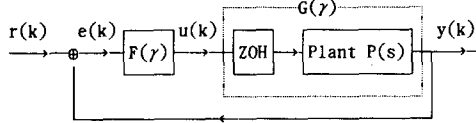


그림 2.1 디지털 PID 제어기의 구성도

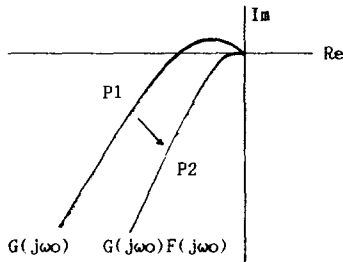
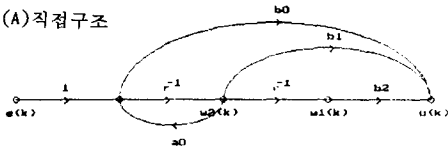


그림 2.2 나이퀴스트 선도상의 PID 동조 개념

(A)직접구조



(B)병렬구조

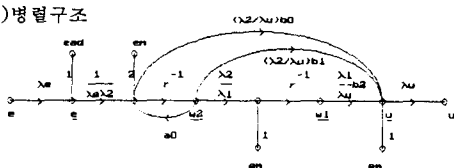
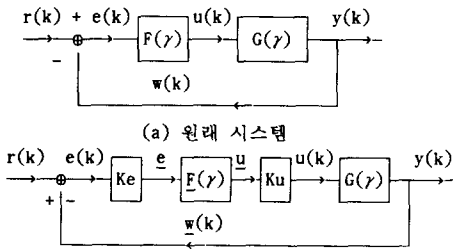


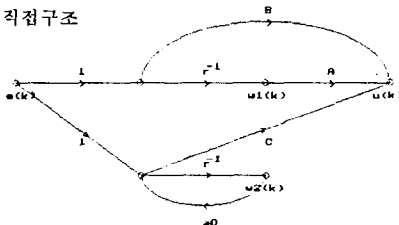
그림 3.1 구조별 신호 흐름도



(a) 원래 시스템 (b) 스케일링된 시스템

그림 3.2 스케일링의 개념도

(A)직접구조



(B)병렬구조

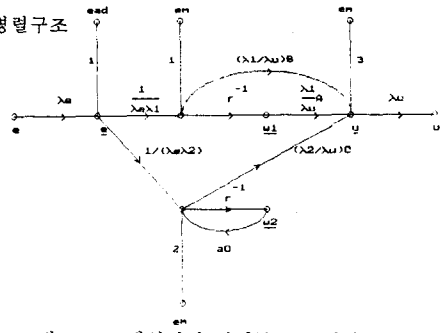


그림 3.3 스케일링된 디지털 PID 제어기 구조의 신호양자화 오차(e_{ad}, e_m)

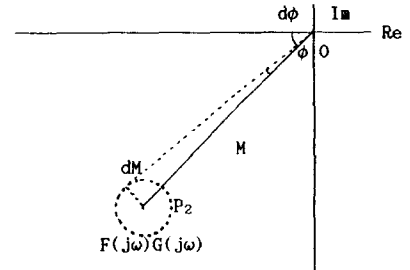


그림 4.1 성능척도의 개념

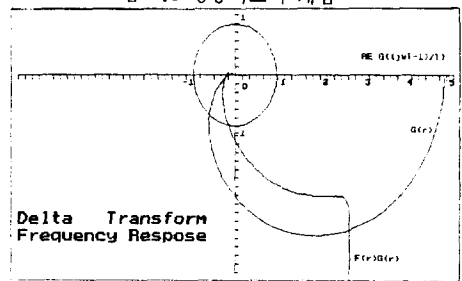


그림 5.1 시스템의 나이퀴스트선도 특성

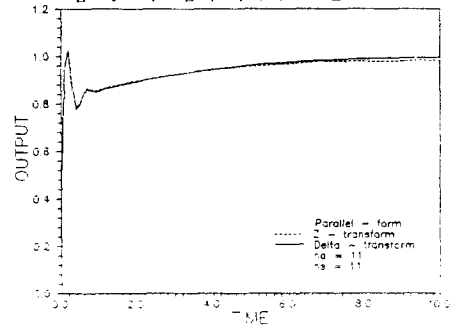


그림 5.2 신호 양자화오차 영향(병렬구조: n_a=11, n_s=11)

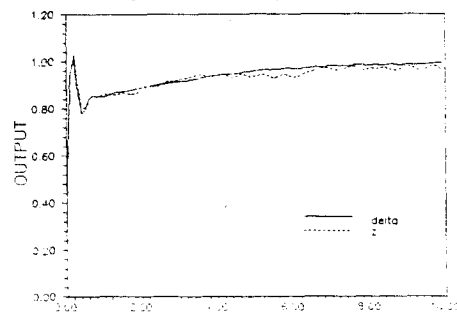


그림 5.3 계수 양자화 오차의 플랜트 출력 특성 (E₀ : 2°, 병렬구조)