

J-lossless 소인수분해와 균형화된 변환을 이용한 제어기 차수줄임

오도창* 정은태* 엄태호** 박홍배*

*경북대학교 공과대학 전자공학과

**산업과학기술연구소 제어연구부

Reduced order controller using J-lossless coprime factorization and balanced transformation

Do Chang Oh*, Eun Tae Jeung*, Tae Ho Um**, and Hong Bae Park*

*Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l. Univ.

**Control Dept., Research Institute of Industrial Science & Technology

abstract

In this paper we proposed the systematic method of reducing the order of controller with robustness. State space formulae for all controllers is found by solving two coupled J-lossless coprime factorizations and model reduction problem. To reduce the order of controller, balanced truncation and Hankel approximation are used.

1. 서론

1981년 Zames가 H^∞ 최적제어이론을 제안한 후 건설한 안정화 문제에 관한 연구가 이루어 지고 있으며 근래에는 제어이론에서 필수적으로 고려해야 할 성능개선(혼합된 H^2/H^∞ 문제), 제어기 차수줄임 및 루프셰이핑에 관한 연구가 활발히 진행 중이다. 초기에는 H^∞ 최적화문제의 해를 구하기 위해 주로 Nevanlinna-Pick행렬 보간법을 이용하였다. Glover[3-4]는 모델 차수줄임에 적용할 수 있는 Hankel 근사화를 제안하여 H^∞ 건설제어의 해를 구하였다. Doyle과 Francis는 전달함수의 선형분수변환(Linear Fractional Transformation: LFT)형태를 모델정합문제로 변환하였고 Doyle등[2]은 일반적인 H^∞ 해를 구하였다. 또한 Kimura[6]는 모델정합문제에서 J-lossless를 이용하여 H^∞ 문제를 해결하였다.

본 논문에서는 가산섭동을 가지는 선형 시불변 다변수시스템에서 전달함수의 CSD(Chain Scattering Description)를 이용하여 기존의 방법보다 상대적으로 간단하게 H^∞ 제어의 해를 구하였다. 즉 플랜트의 antistable한 부분의 LFT형태를 CSD로 변형한 후 J-lossless 소인수분해를 통하여 모든 준최적제어기를 매개변수화하였다. 여기서 J-lossless 소인수분해를 위하여 변형된 두 Riccati 방정식의 해가 이용된다. 또한 전달함수의 stable한 부분에 대해 Balanced truncation과 Hankel 근사화를 도입하여 모델 차수줄임을 함으로써 플랜트보다 더 낮은 차수를 가지는 건설제어기를 구하였다.

2. 수학적 배경과 용어

본 연구에 필요한 수학적 배경과 용어에 대해 살펴보기로 한다.

2.1 Lebesgue space

$G(s) : C \rightarrow C^{p \times m}$ 이 Lebesgue space $L^\infty(-\infty, \infty)$ 에 속하려 면

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) \leq M, \quad \forall \omega \in R \quad (2.1)$$

을 만족하는 $M < \infty$ 가 존재해야 하고

$$\|G(j\omega)\|_\infty \equiv \sup_{\omega \in R} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.2)$$

로 정의한다. 여기서 R 은 실수공간, C 는 복소수공간이고 $\bar{\sigma}$ 는 largest singular value이다.

H_∞ (H^∞)는 ORHP에서 해석적이고 CRHP에서 bound된 함수의 공간이고 $H_-\infty$ 는 OLHP에서 해석적이고 CLHP에서 bound된 함수의 공간이며 H_∞ 와 $H_-\infty$ 는 L^∞ 의 부분공간이다.

2.2 균형화된 구현화(balanced realization)

$G(s) \in H^\infty$ 의 최소화된 구현을 (A, B, C, D) 라고 하면, $P = P^*$ 와 $Q = Q^*$ 는 Lyapunov 방정식

$$AP + PA^* + BB^* = 0 \quad (2.3)$$

$$A^*Q + QA + C^*C = 0 \quad (2.4)$$

의 positive definite인 해이며

$$\|G(s)\|_H = \sigma_{\max}[(PQ)]^{1/2} \quad (2.5)$$

이다. 여기서 P 와 Q 는 각각 controllability Gramian, observability Gramian이고 A^* 는 A 의 전치 켈레복소수이며 $\|G(s)\|_H$ 는 $G(s)$ 의 Hankel-norm이다.

균형화를 위한 변환행렬 T 는

$$T = \Sigma^{-1/2}U^*R \quad (2.6)$$

이고

$$Q = R^*R \quad (2.7)$$

$$RPR^* = U\Sigma^2U^*, \quad U^*U = I \quad (2.8)$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 > \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (2.9)$$

이다. σ_i 는 *Hankel singular value*이고 균형화된 구현화 (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)는 항상 존재하며

$$TPT^* = (T^*)^{-1}QT^{-1} = \Sigma \quad (2.10)$$

를 만족한다.

2.3 J-lossless 행렬

행렬 $F(s) \in RL^\infty (m+n) \times (p+q)$ 가

$$F^*(s)JF(s) = J', \quad \forall s \quad (2.11)$$

을 만족하면 (J, J') -unitary라 한다. 여기서

$$J = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}, \quad J' = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

이다. 덧붙여서

$$F^*(s)JF(s) \leq J', \quad \forall \text{Re}[s] > 0 \quad (2.13)$$

을 만족하면 (J, J') -lossless라 하고 inner행렬과 달리 J-lossless행렬은 항상 안정할 필요는 없다. 정리 1은 행렬 $F(s)$ 가 (J, J') -lossless일 필요충분조건을 제시한다.

정리 1

행렬 $F(s) \in RL^\infty (m+n) \times (p+q)$ 이 (J, J') -lossless일 필요충분조건은

$$ATP + PA + CTJC = 0 \quad (2.14)$$

$$D^TJC + B^TP = 0 \quad (2.15)$$

$$D^TJD = J' \quad (2.16)$$

을 만족하는 대칭인 행렬 $P \geq 0$ 가 존재한다. 여기서 $F(s) = (A, B, C, D)$ 이다[6].

3. 견실제어 이론

이 장에서는 불확실성(uncertainty)를 가지는 시스템의 모델링 및 표준 H^∞ 제어구조와 견실한 안정여유도에 대해 알아본다.

3.1 불확실성을 가지는 시스템의 표준 H^∞ 제어구조

실제시스템과 모델링한 시스템(공칭플랜트)사이에는 모델의 단순성과 정확성에 있어서의 상호보완(tradeoff)관계가 있기 때문에 일반적으로 모델링오차 또는 시스템 불확실성이 생긴다. 여기서는 주파수의 함수로서 그 크기의 상한치만 알 수 있는 가산적 형태를 가지는 비구조적 불확실성(그림 1)의 경우에 대해서 다루기로 한다.

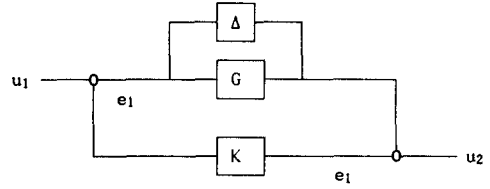


그림 1. 불확실성을 가지는 귀환시스템

그림 1과 같은 시스템은 그림 2와 같이 표준 H^∞ 제어구조로 변환될 수 있다.

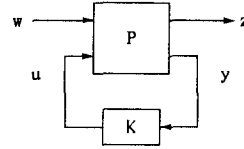


그림 2. H^∞ 표준블럭선도(Lower LFT구조)

정의 1

전달함수의 LLFT는 $\det(P_{21}) \neq 0$ 일때

$$\text{CSD}(U, K) = (U_{11}K + U_{12})(U_{21}K + U_{22})^{-1} \quad (3.1)$$

로 변형될 수 있고 CSD는 chain scattering description이며 $\det(U_{21}K + U_{22}) \neq 0$ 이다.

3.2 견실한 안정화조건

공칭플랜트가 stabilizable하고 detectable하다고 가정하면 견실한 안정화조건은 다음과 같이 정의된다.

정의 2

허용가능한 섭동은

$$D_\varepsilon \equiv \{ \Delta: \Delta \in RH^\infty: \|\Delta\|_\infty < \varepsilon \} \quad (3.2)$$

이고 ε 는 견실한 안정여유도이다.

정의 3

허용가능한 섭동에 대해 그림 1의 귀환시스템 (G, K, ε) 이 견실하게 안정할 필요충분조건은

i) 제어기 K가 공칭플랜트를 안정화시키고

$$\text{ii) } \|K(I - GK)^{-1}\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} \equiv \gamma \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \|LFT(P, K)\|_\infty = \|\text{CSD}(U, K)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \|LFT(P_\gamma, K)\|_\infty = \|\text{CSD}(U_\gamma, K)\|_\infty \leq 1 \quad (3.5)$$

이다. 여기서 P_γ 와 U_γ 의 최소상태공간표현은 각각

$$P_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{-1}I \\ I & G \end{bmatrix} \quad U_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

이고 조건 i)은 $\Delta = 0$ 일때(공칭시스템)의 내부적인 안정성 (internal stability)을 보장한다. 따라서 K 는 $\Delta \in D_s$ 인 모든 섭동에 대해 $G + \Delta$ 를 안정화시킨다.

공칭플랜트 G 는

$$G = G_1 + G_2 \quad (3.7)$$

$$G_1^*, G_2 \in RH^\infty, \quad G_1(\infty) = 0 \quad (3.8)$$

와 같이 antistable한 부분(G_1)과 stable(G_2)한 부분으로 분리할 수 있다.

$$K = K_1(I + G_2K_1)^{-1} \quad (3.9)$$

로 두었을 때 정의 3의 ii)는

$$\begin{aligned} & \| K_1(I + G_2K_1)^{-1}(I - (G_1 + G_2)K_1(I + G_2K_1)^{-1})^{-1} \|_\infty \\ & = \| K_1(I - G_1K_1)^{-1} \|_\infty \leq \epsilon^{-1} = \gamma \end{aligned} \quad (3.10)$$

로 변형된다. 따라서 그림 1의 폐환시스템 (G, K, ϵ) 이 견실하게 안정할 필요충분조건은 (G_1, K_1, ϵ) 이 견실한 안정성을 가지는 것이다[4]. 이러한 (G_1, K_1, ϵ) 의 견실한 안정성은 J -lossless 소인수분해를 이용하여 얻을 수 있다.

정리 2

Θ 가 J -lossless이고

$$\Phi = (\Theta_{11}S + \Theta_{12})(\Theta_{21}S + \Theta_{22})^{-1} \quad (3.11)$$

라 할때

$$\|\Phi\|_\infty < 1 \Leftrightarrow S \in BH^\infty \quad (3.12)$$

BH^∞ 는 norm이 1보다 작은 H^∞ 이다[10].

정리 3

G_1 이 식(3.10)을 만족할 때 견실한 안정여유도의 최대값(γ)의 최소값)은

$$\begin{aligned} & \inf_{K_1} \| K_1(I - G_1K_1)^{-1} \|_\infty \\ & = \gamma_{\min} = [\sigma_{\min}(G_1^*)]^{-1}, \quad \gamma < \gamma_{\min} \end{aligned} \quad (3.13)$$

이다[4].

4. 제어기 설계

CSD형태의 전달함수를 J -lossless 좌 우소인수분해하여 모든 견실제어기 K_1 의 매개변수화를 피하고 최종제어기 K 를 구한다.

4.1 J -lossless 소인수분해

식(3.6)의 U_γ 행렬을

$$U_\gamma = \bar{M}^{-1} \bar{N}, \quad \bar{M}^{-1} : J\text{-lossless} \quad (4.1)$$

와 같이 소인수분해하고 \bar{N} 를

$$\bar{N} = A \Pi^{-1}, \quad A : J\text{-lossless} \quad (4.2)$$

와 같이 소인수분해를 한다. 이 때 \bar{N} 가 안정하므로 $\Pi \in UH^\infty$ 이고, UH^∞ 는 그 역도 H^∞ 에 속하는 함수의 공간이다. 식(4.2)를 식(4.1)에 대입하면

$$U_\gamma = \bar{M}^{-1} \bar{N} = \bar{M}^{-1} A \Pi^{-1} \quad (4.3)$$

와 같이 소인수분해할 수 있고, 제어기 K 를

$$K = \text{CSD}(\Pi, S) \quad (4.4)$$

$$= (\Pi_{11}S + \Pi_{12})(\Pi_{21}S + \Pi_{22})^{-1}, \quad S \in BH^\infty \quad (4.5)$$

와 같이 둘 때

$$\text{CSD}(U_\gamma, K) = \text{CSD}(U_\gamma, \text{CSD}(\Pi, S)) \quad (4.6)$$

$$= \text{CSD}(U_\gamma \Pi, S) \quad (4.7)$$

$$= \text{CSD}(\bar{M}^{-1} A, S) \quad (4.8)$$

와 같이 바꿀 수 있다. 식(4.8)에서 $\bar{M}^{-1} A$ 는 J -lossless이므로 정리 2에 의해서 식(3.10)을 만족하는 제어기 K 는 식(4.4)로 나타낼 수 있다. 다음 절에서는 상태공간에서의 제어기설계를 보았다.

4.2 상태공간에서의 제어기설계

식(3.11)에 대한 U_γ 행렬의 상태공간표현을

$$U_\gamma = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}I & 0 \\ \hline -G & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & -B & 0 & & & \\ \hline 0 & \gamma^{-1}I & 0 & & & \\ C & 0 & I & & & \end{array} \right] \quad (4.9)$$

로 둘 때, $U_\gamma = (A_0, B_0, C_0, D_0)$ 에 대한 좌소인수분해의 상태공간표현은

$$[\bar{M} \quad \bar{N}] = \left[\begin{array}{cc|cc} A + HC_0 & H & B_0 + HD_0 & \\ \hline C_0 & I & D_0 & \end{array} \right] \quad (4.10)$$

이다. 여기서 H 는 출력궤환행렬이다.

\bar{M}^{-1} 가 J -unitary가 되려면

$$(\bar{M}^{-1})^* J (\bar{M}^{-1}) = J \quad (4.11)$$

$$\Leftrightarrow \bar{M} J \bar{M}^* = J \quad (4.12)$$

이어야 하고 식(4.12)을 만족하려면

$$H = [H_1 \ H_2] = XCo^T J = [0 \ -XC^T] \quad (4.13)$$

와 변형된 Riccati 방정식

$$AX + XA^T - XCTCX = 0, \quad X = XT \quad (4.14)$$

을 만족해야 하고 A의 모든 고유치가 ORHP에 있으므로 X가 대칭인 positive semidefinite이 된다. 따라서 $\bar{\pi}^{-1}$ 는 J-lossless행렬이 된다. 여기서 $\bar{\pi}$ 의 상태공간표현은

$$\bar{\pi} = \left[\begin{array}{cc|cc} A + H_2C & -B & H_2 & \\ 0 & \gamma^{-1}I & 0 & \\ \hline C & 0 & I & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \quad (4.15)$$

이다. 식(4.3)으로부터

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= A\Pi^{-1} \\ &= AW(\Pi W)^{-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

이고 $\bar{\pi}$ 에 대한 우소인수분해의 상태공간표현은

$$\left[\begin{array}{c} \Pi W \\ \hline AW \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1F & B_1W \\ \hline F & W \\ \hline C_1 + D_1F & D_1W \end{array} \right] \quad (4.17)$$

와 같고 F는 상태궤환행렬이다. 정리 1에 의해서 AW가 J-lossless가 되려면 다음 식들을 만족해야 한다.

$$i) W^T D_1^T J D_1 W = W^T R W = J \quad (4.18)$$

$$ii) F = -R^{-1} B_1^T Y - D_1^{-1} C_1 \quad (4.19)$$

$$iii) YA + AY - Y(\gamma^2 BB^T - XC^T CX)Y = 0 \quad (4.20)$$

여기서 Y는 대칭인 positive semidefinite행렬이고 임의의 nonsingular행렬 W를

$$W = \left[\begin{array}{c|c} \gamma I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array} \right] \quad (4.21)$$

로 정의 할 때 조건 i)이 만족된다. 정리 4로부터 $\gamma > \gamma_{min}$ 인 γ 에 대해 Y가 대칭인 positive semidefinite행렬이 됨을 알 수 있다.

정리 4

CSD의 U 행렬이 J-unitary일 필요충분조건은 LLFT의 P 행렬이 all pass이다.

CSD의 U 행렬이 J-lossless일 필요충분조건은 LLFT의 P 행렬이 inner이다[10].

정리 5

$\| \text{CSD}(U_\gamma, K) \|_\infty < 1$ 을 만족하고 내부안정화하는 제어기 K가 존재할 필요충분조건은 $\bar{\pi}^{-1}$ 와 A가 각각 J-lossless이고 $\Pi \in UH^\infty$ 인 소인수분해 $U_\gamma = \bar{\pi}^{-1} A \Pi^{-1}$ 를 가진다[10].

결과적으로

$$\Pi W = \left[\begin{array}{c|c} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \hline \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{array} \right] \quad (4.22)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A - \gamma^2 BB^T Y + XC^T CX Y & -\gamma B \quad XC^T \\ \hline \gamma^2 B^T Y & \gamma I \quad 0 \\ \hline -XC^T Y - C & 0 \quad -I \end{array} \right] \quad (4.23)$$

이 되고 전실제어기 K_1 은 식(4.5)로부터 구할 수 있다. $S = 0$ 일 때 K_1 의 상태공간표현은 similarity transform을 이용하면

$$\begin{aligned} K_1 &= \Pi_{12} \Pi_{22}^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A - \gamma^2 BB^T Y - XC^T C & -XC^T \\ \hline \gamma^2 B^T Y & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

와 같고 이것은 antistable한 G_1 과 동일한 차수를 가진다.

CSD형태의 최종제어기 K는

$$K = \text{CSD} \left(\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline G_2 & I \end{array} \right], \text{CSD}(\Pi, S) \right) \quad (4.25)$$

$$= \text{CSD} \left(\left[\begin{array}{c|c} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \hline G_2 \Pi_{11} + \Pi_{21} & G_2 \Pi_{12} + \Pi_{22} \end{array} \right], S \right) \quad (4.26)$$

이고 $S = 0$ 일때 제어기 K의 차수는 일반적으로 G와 동일하게 된다.

안정한 플랜트에 대해서는 J-lossless 우소인수분해만을 함으로써 전실제어기를 얻을 수 있다. $X = 0, Y = 0$ 이기 때문에 식(4.24)로부터 최종제어기는

$$K = \gamma S(\gamma GS - I)^{-1} \quad (4.27)$$

이고

$$\| \text{LFT}(P, K) \|_\infty = \| \gamma S \|_\infty < \gamma \quad (4.28)$$

이다. 따라서 $\gamma > 0$ 인 어떤 γ 에 대해서도 전실제어기를 구할 수 있다.

또한 시스템에 따라 요구되는 성능을 만족시키기 위해 루프셰이핑을 이용할 수 있다[7].

5. 제어기의 차수줄임

안정한 플랜트 G_2 에 대해 모델 차수줄임을 이용하여 건설 제어기의 차수를 줄이는 방법과 건설한 안정화여유도를 제어기 차수와 관련해서 어떻게 미리 선택할 수 있는 가를 보인다.

정리 6

(G, K, ε)이 건설하게 안정할 때 (G, K_r, ε')가 건설하게 안정할 필요충분조건은

$$G = G_1 + G_2 \quad (5.1)$$

$$K_r = K_1(1 + \hat{G}_2 K_1)^{-1} \quad (5.2)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - \|G_2 - \hat{G}_2\|_\infty > 0 \quad (5.3)$$

이다[4].

식(5.2)에서 최종제어기 K_r 의 Mcmillan degree는

$$\text{Md}(K_r) \leq \text{Md}(K_1) + \text{Md}(\hat{G}_2) \quad (5.4)$$

$$\leq \text{Md}(G_1) + \text{Md}(\hat{G}_2) \quad (5.5)$$

이고 식(5.3)의 ε' 는 줄여진 차수의 제어기를 가지는 폐환시스템에서 건설한 안정화여유도이다. 따라서 오차가 주파수의 함수로써 infinite-norm bound를 가지는 모델근사화가 필요하다. 여기서는 균형화된 변환을 이용한 모델근사화의 방법으로 Balanced truncation과 Hankel norm 근사화를 제시하였다.

i) Balanced truncation

점근적으로 안정한 n 차의 G_2 에 대해 균형화된 변환시스템이

$$A_b = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \} k \quad B_b = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \} k$$

$$C_b = [C_1 \ C_2] \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{bmatrix} \} k \quad (5.6)$$

일 때 $\sigma_k \geq \sigma_{k+1}$ 인 부시스템 $\hat{G}_2 = G_r = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ 는 G_2 의 근사치가 되며 minimal이고 점근적으로 안정한 특성을 가진다. 이 방법은 점근적으로 안정한 시스템을 균형화된 시스템으로 변환하고 가제어성과 가관측성의 measure를 σ 로 정의하여 시스템의 입출력관계에서 가장 영향이 큰 부시스템을 선택하여 근사화한다[8-9]. 주파수의 함수로서 오차는

$$\|G_2 - \hat{G}_2\|_\infty \leq \text{tr}(\Sigma_2), \quad 1 \leq k < n \quad (5.7)$$

이고 식(5.3)으로부터

$$\text{tr}(\Sigma_2) < (1/2)\gamma^{-1} \quad (5.8)$$

를 만족하도록 차수줄임정도(k)를 결정한다. 이 방법은 Hankel 근사화보다 계산상 간단한 장점이 있다.

ii) Hankel 근사화

점근적으로 안정한 $G(s)$ 의 균형화된 변환시스템을

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \ C_2] \quad (5.9)$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n, \sigma_{k+1}) \\ = \text{diag}(\Sigma_1, \sigma_{k+1}) \quad (5.10)$$

일 때 (A, B, C, D)는 새롭게 정의된 Σ 와 같은 형태로 재구성한 시스템이고 최적인 Hankel 근사화는

$$\inf_{F, \hat{G}} \|G - \hat{G} - F\|_\infty = \|G - \hat{G}\|_H = \sigma_{k+1} \quad (5.11)$$

이 되도록

$$\hat{G}(s) + F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (5.12)$$

를 찾는 문제이다. 여기서 $F(s)$ 와 $\hat{G}(s)$ 는 각각 H^∞ , H^* 에 속하는 함수이고 (A, B, C, D)의 상태공간표현은

$$A = \Gamma^{-1}(\sigma^2 A_{11}^* + \Sigma_1 A_{11} \Sigma_1 - \sigma C_1^* U B_1^*) \quad (5.13)$$

$$B = \Gamma^{-1}(\Sigma_1 B_1 + \sigma C_1^* U) \quad (5.14)$$

$$C = C_1 \Sigma_1 + \sigma U B_1^* \quad (5.15)$$

$$D = D - \sigma U \quad (5.16)$$

$$B_2 = -C_2^* U, \quad \Gamma = \Sigma^2 - \sigma^2 \quad (5.17)$$

이다[3]. 여기서 U 는 unitary행렬이고 $\sigma = \sigma_{k+1}$ 이다.

식(5.11)를 all pass형태의 함수로 나타내면

$$G - \hat{G} - F = \sigma_{k+1} E(s) \\ G - (\hat{G} + D_2) = \sigma_{k+1} E(s) + (F - D_2) \quad (5.18)$$

이고

$$\|F - D_2\|_\infty \leq \sigma_{k+2} + \sigma_{k+3} + \dots + \sigma_n \quad (5.19)$$

$$\|G - (\hat{G} + D_2)\|_\infty \leq \text{tr}(\Sigma_2) \quad (5.20)$$

을 만족하도록 상수행렬 D_2 를 선택하면 식(5.3)으로부터

$$\text{tr}(\Sigma_2) < \gamma^{-1} \quad (5.21)$$

을 만족하도록 차수줄임정도(k)를 결정할 수 있다.

6. 예제

이 장에서는 4장에서의 제어기설계 알고리즘의 타당성을 보이기 위해 SISO시스템에 대해 알아본다.

공칭플랜트 G 가

$$G = \frac{4.59(s^2 + 0.067s + 0.0112)(s + 0.617)(s + 3.98)}{(s + 0.064)(s - 0.2)(s + 0.473)(s + 0.63)(s + 6.69)}$$

일 때 식(4.26)을 이용하여 $G(s)$ 의 antistable한 부분에 대한 견실제어기를 구하면

$$K_I = -\frac{3.41}{(s+8.71)}$$

이고 식(4.5)로부터 최종제어기 K 는

$$K = \frac{-3.41(s+0.064)(s+0.473)(s+0.63)(s+6.69)}{(s^2-0.162s+0.0313)(s+0.618)(s+5.26)(s+10.8)}$$

이다. Stable한 부분에 대해 Balanced truncation방법으로 차수를 줄였을 때 플랜트와 제어기는

$$G_r = \frac{2.27(s-0.00292)}{(s+0.0467)(s+0.686)}$$

$$K_r = \frac{-3.41(s+0.0467)(s+0.686)}{(s^2-0.14s+0.0135)(s+9.58)}$$

이고 $\gamma_{\min} = 0.4$ ($\epsilon_{\max} = 2.5$), $\gamma = 0.41$ 이다. 또한 페루프시 시스템의 Bode 선도를 그림 3에 나타내었다.

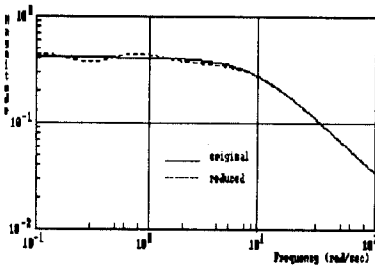


그림 3. 페루프시시스템의 특성

7. 결론

가산섭동을 가지는 선형 다변수시스템의 견실한 제어를 위하여 전달함수를 CSD형태로 변환하였고 J -lossless성질을 이용한 소인수분해를 통하여 모든 견실제어기를 매개변수화 하였

다. 또한 안정한 전달함수의 Hankel singular value를 이용하여 미리 제어기차수와 견실한 안정여유도를 비교 선택할 수 있도록 하였다. 앞으로는 성능개선을 위하여 보다 체계적인 루프 셰이핑의 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] B.D.O. Anderson and Y. Liu, "Controller reduction: Concepts and approaches," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 802-812, Aug. 1989.
- [2] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State-space solutions to standard H^2 and H^∞ control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug. 1989.
- [3] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [4] K. Glover, "Robust stabilization of linear multivariable systems: Relations to approximation," *Int. J. Contr.*, vol. 43, no. 3, pp. 741-766, 1986.
- [5] Y.S. Hung and M.A. Muzlifah, "Hankel-norm model reduction with fixed mode," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 3, pp. 373-377, Mar. 1990.
- [6] H. Kimura, "Conjugation, interpolation and model-matching in H^∞ ," *Int. J. Contr.*, vol. 49, no. 1, pp. 269-307, 1989.
- [7] D.C. McFarlane and K. Glover, *Robust Controller Design*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 138, Springer-Verlag, 1990.
- [8] B.C. Moore, "Principal component analysis in linear system: Controllability, observability, and model reduction," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 1, pp. 17-32, Feb. 1981.
- [9] L. Pernebo and L.M. Silverman, "Modern reduction via balanced state space representations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 382-387, Apr. 1982.
- [10] M.C. Tsai and I. Postlethwaite, "On J -lossless coprime factorizations and H^∞ control," *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 1, pp. 47-68, 1991.
- [11] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, The MIT Press, 1985.