

강인한 적분형 최적 모델 추종형 서보계의 구성에 관한 연구

黃 利 善* · 金正澤* · 李良雨* · 崔一燮**
*부산대학교 **산업과학기술연구소

A Design on Robust Integral-type Optimal Model Following Servo System

Chang-Sun Hwang* · Chung-Tek Kim* · Yang-Woo Lee* · Il-Seop Choi**
*Pusan University **IRST

Abstract

This paper deals with design method of the model following servo system in which optimal regulator problem is used to design the controllers that make the step/ramp response of the plant be kept close to a specified ideal step/ramp response of the model. The characteristics of this system is robust in the presence of the specified disturbances or the parameter perturbations of the plant. Especially, by direct feedforward compensator from the reference input the steady state offset of plant output response is excluded and the transient response is improved. Examples are given and the results of the design of the model following servo systems are verified by the computer simulation.

1. 서론

최근 정상상태에 있어서 제어량을 목표치에 일치시키는 출력제어의 조건을 만족하는 안정한 제어계를 설계하는 방법이 많이 제안되었고, 실제의 제어계 설계에 사용될 수 있는 유용한 결과가 많이 나타나게 되었다[1-9]. 제어량을 계단입력의 목표치에 추종하게 하는 서보계의 설계를 적분형 보상기를 사용하지 않고도 이차형식 적분형의 평가함수를 최소화하는 설계법(LQ 최적 설계법)을 사용하여 실현한 예[5]가 있으나, 이러한 서보계는 외란이나 제어대상의 모델화 오차가 있는 경우에는 정상편차가 생기게 된다. 따라서 계단입력의 외란이나 모델화 오차가 있는 경우에도 정상편차가 생기지 않는 서보계 즉, 강인한 서보계를 설계하기 위해서는 적분 보상기가 필요하게 된다. 적분 보상기를 포함한 강인한 서보계에 대해서 LQ 최적 설계법을 사용한 방법이 제안되었고, 미지의 임펄스 외란이나 파라미터변동이 있는 경우나[10], 미지의 일정한 외란이나 파라미터변동이 있는 경우[11-12]에 계단입력량의 목표치에 추종하게 하는 설계법이 제시되었다. 즉, 일정 기준 입력을 출력에 추종하는 제어시스템을 구성하기 위해서는 주어진 플랜트에 적분형 보상기를 부가하여 확장된 시스템에 제어법칙을 적용하는 것이 일반적이라 하겠다.

본 연구에서는 강인한 적분형 최적 모델 추종형 서보계를 설계함에 있어서 미지의 임펄스 외란, 미지의 일정한 외란 및 파라미터 변동이 있는 경우 기준입력의 범위를 계단입력뿐 아니라 램프입력까지 확대하여 적용할 수 있는 설계법을 제시한다. 여기서는 목표치 추종유계를 레귤레이터유계로 적용함으로써 모델의 응답에 정상편차없이 추종하는 선형제어계의 구성을 단

순화시켰으며 플랜트에 인가되는 일정형태의 외란과 플랜트의 파라미터변동에 대해 강인함 뿐 아니라 입력에서 피이드포워드 보상기를 부가하여 과도특성이 개선할 수 있음을 보인다.

2. 모델추종형 서보시스템의 구성

2-1. 계단입력과 임펄스외란이 있는 경우

주어진 제어대상은 식(2-1)과 같은 상태방정식으로 표현되는 선형 시불변계로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p + E_p \delta \\ y_p &= C_p x_p \end{aligned} \quad (2-1-1)$$

여기서, $x_p \in R^n$, $u_p \in R$, $y_p \in R$, $\delta \in R$ 는 각각 제어대상의 상태벡터, 제어입력, 출력, 미지의 임펄스외란이며 시스템 (A_p, B_p, C_p) 는 가제어 가관측하고,

$$\det \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2-1-2)$$

로 가정한다. 제어대상이 추종해야 할 모델은 식(2-3)과 같은 선형 시불변계로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m r(t) \\ y_m &= C_m x_m \end{aligned} \quad (2-1-3)$$

여기서, $x_m \in R^m$, $r \in R$, $y_m \in R$ 은 각각 모델의 상태벡터, 목표치로서 계단형식의 기준입력, 모델의 출력이다. 모델은 가제어, 가관측으로 접근가능하고

$$\det A_m \neq 0 \quad (2-1-4)$$

로 가정한다. 다음에 플랜트의 출력과 모델의 출력의 차를 오차 e , 오차 e 의 적분을 w 로 정의하면 식(2-5)와 같다. 이때 w 를 도입함으로써 적분형 제어기를 가진 제어계의 설계가 가능해진다.

$$e = y_m - y_p = C_m x_m - C_p x_p \quad (2-1-5a)$$

$$w = \begin{cases} 1 \\ -\infty \end{cases} e \, dt \quad (2-1-5b)$$

플랜트와 모델에 대한 상태방정식의 확대계를 구하면 식(2-1-6)과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_p \\ x_m \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_m \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_p$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \\ 0 \end{bmatrix} r_0 u(t) \quad (2-1-6)$$

여기서 r_0 는 상수이며, $u(t)$ 는 단위계단입력을 나타내고 A_m 의 고유치(σ_i)는 $\text{Re}(\sigma_i) < 0$ 을 만족한다. 다음으로 식(2-1-5)를 기초로한 평가함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J = \int_0^{\infty} (w^T Q w + u_p^T R u_p) dt \quad (2-1-7)$$

$t \rightarrow \infty$ 에서 $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ 이기 위해서는 w 가 유한한 값이 되어야 하며, 이 w 의 값이 최소가 되도록 평가함수를 사용한다. 플랜트의 출력이 모델의 출력에 일치하도록 하기 위해서는 플랜트에 정상조작량을 가해 줌으로써 정상상태에 있어서 플랜트의 출력 $y_p(t)$ 를 모델의 출력 $y_m(t)$ 에 일치시켜야 할 필요가 있다. 이 정상조작량을 \bar{u}_p 로 나타내면 식(2-1-7)의 평가함수는 다음의 식(2-1-8)의 평가함수로 바꿀 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} (w^T Q w + (u_p - \bar{u}_p)^T R (u_p - \bar{u}_p)) dt \quad (2-1-8)$$

평형상태 $y_m = y_p$ 를 실현하는 x_p, x_m, u_p 의 정상치 $\bar{x}_p, \bar{x}_m, \bar{u}_p$ 는 식(2-1-2)와 식(2-1-4)에 의해 식(2-1-9)에서 유일하게 정해진다.

$$\begin{bmatrix} A_p & 0 & B_p \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_p \\ \bar{x}_m \\ \bar{u}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_m \\ 0 \end{bmatrix} r_0 \quad (2-1-9)$$

식(2-1-9)에 정상상태의 값을 고려하면 식(2-1-10)으로 된다.

$$\dot{\bar{X}}_w = \bar{A} \bar{X}_w + \bar{B} V_w \quad (2-1-10)$$

여기서

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_w = \begin{bmatrix} x_p - \bar{x}_p \\ x_m - \bar{x}_m \\ w \end{bmatrix}$$

$$V_w = u_p - \bar{u}_p$$

식(2-1-10)에 대한 평가함수를 식(2-1-11)과 같이 정의함으로써 IQ레귤레이터문제로 취급할 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{X}_w^T \bar{Q} \bar{X}_w + V_w^T R V_w) dt \quad (2-1-11)$$

여기서, $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$, $R = 1$

이다. 식(2-1-11)의 \bar{Q} 는 양수로 선택되어야 하며, 이것은 강인한 추종성을 확보하기 위하여 도입된 적분기의 상태변수 w 에 대해서 반드시 하중을 가하지 않으면 안된다는 것을 의미한다. 레귤레이터문제에 의해서 평가함수 식(2-1-8)을 최소화하는 최적 제어는

$$V_w^* = -R^{-1} \bar{B}^T P \bar{X}_w \quad (2-1-12)$$

로 주어지며, 최적 제어 입력은

$$u_p^* = K_1 r + K_2 x_p + K_3 x_m + K_4 \int e dt \quad (2-1-13)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서,

$$K_1 = (\bar{u}_p + R^{-1} \bar{B}_p^T P_{11} \bar{x}_p + R^{-1} \bar{B}_p^T P_{12} \bar{x}_m) / r_0$$

$$K_2 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{11}$$

$$K_3 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{12}$$

$$K_4 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{13}$$

이다. P 는 대수 Riccati 방정식의 양의 반함정 유일해이다.

2-2. 램프(ramp)입력과 계단외란이 있는 경우

주어진 제어대상과 추종해야 할 모델의 상태방정식은 식(2-1-1), 식(2-1-3)과 같고, 기준입력과 외란의 특성만 2-2절에서 새로이 고려하는 것으로 한다. 플랜트와 모델에 대한 상태방정식을 미분하여 확대계를 구하면 식(2-2-1)과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_p \\ x_m \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_m \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_p + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \\ 0 \end{bmatrix} r_0 u(t) \quad (2-2-1)$$

여기서 r_0 는 상수이며, $u(t)$ 는 단위계단입력을 나타내고 A_m 의 고유치(σ_i)는 $\text{Re}(\sigma_i) < 0$ 을 만족한다.

다음으로 식(2-2-1)을 기초로한 평가함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u_p^T R u_p) dt \quad (2-2-2)$$

평형상태 $y_m = y_p$ 를 실현하는 $\bar{x}_p, \bar{x}_m, \bar{u}_p$ 의 정상치 $\bar{x}_p, \bar{x}_m, \bar{u}_p$ 는 식(2-2-3)에서 유일하게 정해진다.

$$\begin{bmatrix} A_p & 0 & B_p \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_p \\ \bar{x}_m \\ \bar{u}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_m \\ 0 \end{bmatrix} r_0 \quad (2-2-3)$$

식(2-2-1)에 정상상태의 값을 고려하면 식(2-2-4)로 된다.

$$\dot{\bar{X}}_w = \bar{A} \bar{X}_w + \bar{B} V_w \quad (2-2-4)$$

여기서,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_e = \begin{bmatrix} x_p - x_r \\ \dot{x}_m - \dot{x}_m \\ e \end{bmatrix}$$

$$V_e = \dot{u}_p - \dot{u}_r$$

식(2-2-4)에 대한 평가함수를 식(2-2-5)와 같이 정의함으로써 LQ레귤레이터문제로 취급할 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{X}^T \bar{Q} \bar{X} + V_e^T R V_e) dt \quad (2-2-5)$$

여기서, $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$, $R = 1$

이다. 앞에서 기술한 것처럼 Q는 양수로 선택하여야 한다. 레귤레이터문제를 의해서 평가함수 식(2-2-5)를 최소화하는 최적제어는

$$V_e^* = -R^{-1} \bar{B}^T P \bar{X} \quad (2-2-6)$$

로 주어지며, 최적제어입력은

$$u_p^* = K_1 r + K_2 x_p + K_3 x_m + K_4 f \quad (2-2-7)$$

이 된다. 여기서

$$K_1 = (\bar{u}_p + R^{-1} \bar{B}_p^T P_{11} \bar{x}_e + R^{-1} \bar{B}_p^T P_{12} \bar{x}_m) / r_0$$

$$K_2 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{11}$$

$$K_3 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{12}$$

$$K_4 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{13}$$

이다. P는 대수 Riccati 방정식의 양의 반항정 음인해이다. 이때, 식(2-1-13)과 식(2-2-7)을 비교하면 완전히 일치한다는 것을 알 수 있다. 즉, 동일한 제어기로써 계단 및 램프 입력과 임펄스 및 계단형태의 외란이 존재하는 경우에도 플랜트의 출력이 모델에 추종하는 서보계의 설계법이 구성되는 것이다. 이 상태에서 얻어진 결과를 이용해서 제어계를 그림 1과 같이 구성할 수 있다.

3. 컴퓨터 시뮬레이션

참고논문[11]의 예제를 통하여 본 방법의 타당성을 보인다. 플랜트는

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ C \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \dot{r}$$

$$y_p = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x_p \quad (3-1)$$

로 주어진다. 모델은 램프제에 대해 정상편차가 없는 ITAE표준함수를 채택하였으며 다음의 상태방정식으로 주어진다.

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -1.75 & -3.25 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (3-2)$$

$$y_m = [0 \quad 3.25 \quad 1] x_m$$

평가함수는

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q e + v^T R v) dt \quad (3-3)$$

이며 여기서 $v = \dot{u}_p - \dot{u}_r$, $R = 1$ 이다.

최적제어법칙은

$$u_p^* = K_1 r(t) + K_2 x_p(t) + K_3 x_m(t) + K_4 f \quad (3-4)$$

로 주어지고, Q=10, 100, 1000에 대한 계산 및 시뮬레이션은 행하였다. 표1에 각 Q에 대한 K₁, K₂, K₃, K₄의 값을 나타내었다.

표 1. 각 하중에 대한 제어입력의 이득값
Table 1. Control input gain for each weight.

Q	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
10	3.2791	-4.8998 -0.3154 -0.2839	-1.8181 -0.3243 1.6207	3.7224 7.6830 10
100	4.9502	-11.1504 -0.5190 -0.4210	-3.0113 -0.5096 6.2002	9.8270 25.2114 31.6228
1000	6.8173	-25.8615 -0.3679 -0.6202	-5.1630 -0.8126 19.0442	21.6920 71.4536 100

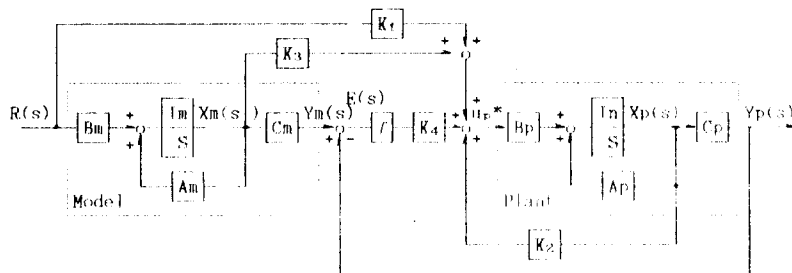


그림 1. 강인한 모델추종형 서보제어기의 구성

Fig. 1. Construction of robust model following servo controller

그림 2와 그림 3은 각각 $Q=10, 100, 1000$ 에 대해 일정한 단위계단형태의 외란이 존재할 경우 램프 및 계단 입력에 대한 시뮬레이션 결과를 나타내었다. 그림 4는 기존 다목적계법과의 비교를 나타내었다. 그림 4에서는 ITAE 2차 표준함수를 모델로 선정하였을 때의 비교이다.

4. 결론

본 논문에서는 모델 추종형 서보계를 설계함에 있어서 정상상태에서 모델의 출력과 플랜트의 출력이 일치해야 한다는 제약을 부가하여 레귤레이터문제만 변환함으로써 모델에 최적으로 추종하는 제어계를 간단히 구성할 수 있었다. 본 방법에서는 입력으로부터의 피이드포워드보상기와 오차로부터의 적분보상기에 의해 기준입력의 범위를 램프입력까지, 미지의 외란은 계단입력까지 그리고 플랜트의 파라미터변동에 대해서 정상편차가 생기지 않는 강인한 제어계를 구성하였다. 특히 피이드포워드 보상기에 의해 영점을 추가함으로써 과도특성이 개선됨을 알 수 있었다.

참고 문헌

- [1] J. S. Tyler, "The characteristics of Model-Following Systems as Synthesized by optimal control." IEEE Trans. AC, pp.485-498, 1964.
- [2] E. Kreindler, "On the Linear Optimal Servo Problem," Int. T. Control, Vol. 9, No. 4, pp.465-472, 1969.
- [3] E. J. Davison et. al, "Pole assignment in Linear Time-invariant Multivariable Systems with Constant disturbances." IEEE AC-7-5, pp.489-498, 1971.
- [4] E. J. Davison, "The Design Controllers for the multivariable robust servomechanism problem using Optimization method," IEEE, AC-26-1, pp.93-110, 1981.
- [5] Pyong Sik Pak, Yutaka Suzuki & Katsuhiko Fujii, "Synthesis of Multivariable Linear Optimal Servo System," SICE, Vol.8, No. 5, pp.568-575, 1972.
- [6] Pyong Sik Pak, Yutaka Suzuki & Katsuhiko Fujii, "Synthesis of Multivariable Linear Optimal Servo-System Incorporating Integral-Type Controllers," SICE, Vol.10, No.1, pp.1-5, 1972.
- [7] B.A. Francis, et al, "The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators," App. Math. & Opt.1.1, pp.64-86, 1974.
- [8] Tsunehiro Takeda & Toshiyuki Kitamori, "A Design Method of Linear Multi-Input-Output Tracking Systems," SICE, Vol.14, No.4, pp.359-364, 1978.
- [9] Masao Ikeda & Nobuhido Suda, "Synthesis of Optimal Servo systems," SICE, Vol.24, No.1, pp.40-46, 1988.
- [10] Ichiro Suga, "Linear Control System Optimally Following Model Step Response," SICE, Vol.6, No.2, pp.175-181, 1970.
- [11] Katsuhisa Furuta and Katsumi Komiya, "Design of Model-Following Servo Controller," IEEE, Vol. AC-27, No.3, pp.725-727, 1982.
- [12] Tomomichi Hagiwara, Yoshihiro Ohtani & Mituhiko Araki, "A Design Method of LQI Servo Systems with Two Degrees of Freedom," ISCIE, Vol.4, No.12, pp. 501-510, 1991.

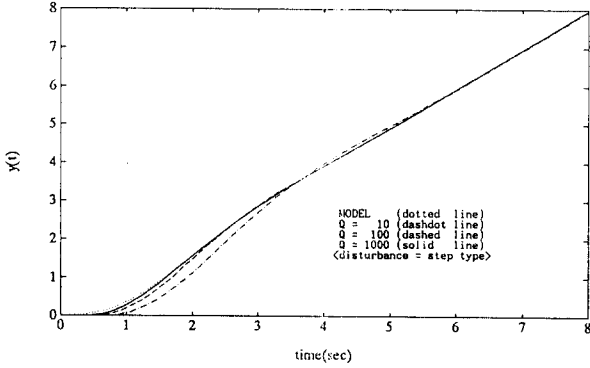


그림 2. 일정한 외란의 영향하에서의 램프입력에 대한 출력

Fig. 2 Output to ramp input under constant disturbance

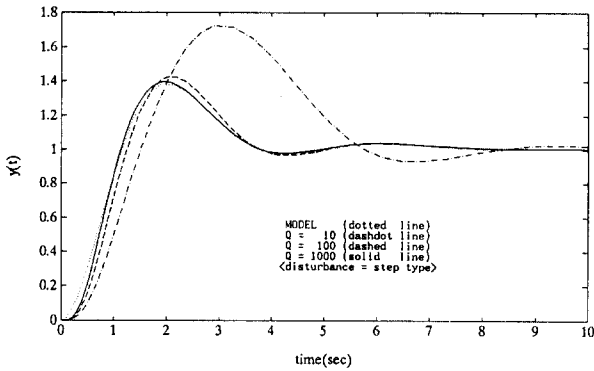


그림 3. 일정한 외란의 영향하에서의 스텝입력에 대한 출력

Fig. 3 Output to step input under constant disturbance

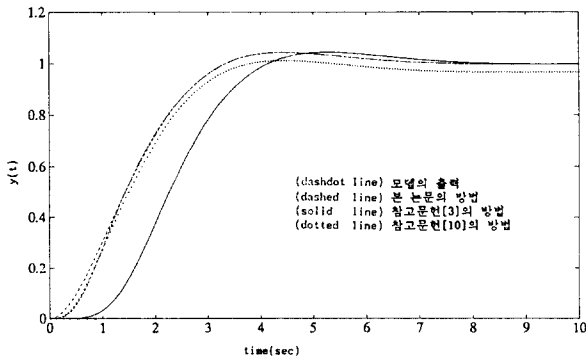


그림 4. 기타방법들과의 비교

Fig. 4 Comparison of various method