'92 韓國自動制御學術會議論文集 1992. 10. 19~21

시간지연 제어기를 안정하게 구현하기 위한 대향 필터링 보상기의 설계

문의준 이상열 이영철 이정훈
국방과학연구소

An Anti-Filtering Compensator Design for a Stable Implementation of Time Delay Controller

Moon, U.J. Lee, S.Y. Lee, Y.C. Lee, J.H.
Agency for Defense Development

ABSTRACT

Time Delay Controller (TDC) is a model following controller which uses input and output values and state variables to estimate additional quantity of dynamics due to external disturbances and/or model parameters variation at some past instant. TDC is very robust against parametric uncertainty while it is not robust against unmodeled dynamics even showing instability. To solve this problem a stability analysis is performed and a compensation technique using reduced order observer, Anti-Filtering Compensator (AFC), is proposed for a case in which the high order known dynamics is deliberately ignored. If the ignored dynamics causes instability of the TDC control system ,AFC is shown to be indispensible for a stable implementation of TDC.

1. 서 론

제어시스템의 거동시 측정되는 입출력값 및 상태변수들의 정보를 이용하면 일정하게 경과된 시간에서의 외란 및 모델 파라미터 변동에 의한 추가적인 동특성의 양을 추정할 수 있다. 시간지연 제어기(Time Delay Controller ;TDC)는 이렇게 추정된 경과된 시간에서의 외란 및 동특성 변동의 양을 현재시간에서의 것으로 가정하고 적절히 이용해서 전체 제어시스템의 특성이 기준모델(reference model)의 특성을 따르게 하는 제어기이다[10]. 충분히 작은 시간차이에 대해서 이러한 가정이 타당함이 입증 되었고 이 가정하에서 얻어진 제어법칙을 이용한 제어시스템이 파라미터들의 변동에 대해서 안정하기 위한 최대한의 시간지연을 구하는 방법이 제안된 바 있다[12]. 이렇게 얻어진 TDC는 외란 및 파라미터 불확실성에 의한 영향을 직접 추정해서 이용하기 때문에 이들에 대해 매우 강건한 제어시스템을 구성한다.

반면 TDC는 모델링 되지않은 고차의 동특성(unmodeled dynamics)에 대해 강건하지 못하며 이 결과 TDC를 이용한 제어시스템은 쉽게 불안정 해질수 있다. 본 논문에서는 확장된 Nyquist 안정성 해석법의 일종인 Satche[9]의 방법을 이용해서 예로써 제시된 모델에 대한 안정성 해석을 수행했다. 또한 모델링 되지않은 동특성에 대해 강건하지 않은 시간지연 제어시스템을 강건하고 안정되게 구현하기 위한 보상기를 제안했다. 제어기 설계시 전단(pre-filter)의 영향을 고려하지 않거나 임의로 고차의 동특성을 무시한 경우 이러한 모델링 되지않은 동특성은 그 차수와 공칭계수(nominal parameter)들이 알려지게 된다. 이 경우 시스템의 부분경로상에 보상기를 도입해서 이 동특성의 영향을 배제할 수 있다. 이 보상기를 대향필터링 보상기(Anti-Filtering Compensator; AFC)라 하기로 한다. 이 AFC는 일정한 조건을 만족시켜야 하는데 특히 감소차수관측기(reduced order observer)는 이 조건을 만족시킨다. 예로써 제시된 모델은 DC모터를 이용한 위치제어 서어보시스템으로써 이 경우 TDC의 안정된 실현에 AFC의 사용이 필수적임을 보였다.

2. 시간지연 제어법칙 (Time Delay Control Law)

2.1 Canonical form 시스템 표현에 대한 시간지연 제어기

다음과 같이 canonical form으로 표현된 모델을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = A(x,t)x(t) + B(t)u(t) + d(t) \tag{1}$$

여기서

$$x = \begin{bmatrix} x_q \\ \hline x_r \end{bmatrix} \quad , A = \begin{bmatrix} 0 & I_q \\ \hline A_r(x,t) & \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline B_r(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$x \in \Re^n$, $x_r \in \Re^r$, $A \in \Re^{n \times n}$, $B \in \Re^{n \times r}$, $I_q \in \Re^{(n-r)\times(n-r)}$,

$A_r \in \Re^{r \times n}$, $B_r \in \Re^{r \times r}$

식(1)에서 d(t)는 모르고 있는 외란을 의미하며, 식(2)에서 $A_r(x,t)$는 계수나 형태가 반드시 알려질 필요가 없는 선형 또는 비선형 동특성을 나타낸다. 또한 입력행렬 $B_r(t)$는 공칭값이 B_r로 알려져 있다고 가정한다.

제어시스템이 기준입력 r(t)에 대한 특성을 따르고자 하는 기준모델의 방정식과 오차의 동특성을 다음식 (3),(4),(5)로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \tag{3}$$

여기서

$$x_m = \begin{bmatrix} x_{mq} \\ \hline x_{mr} \end{bmatrix} \quad , A_m = \begin{bmatrix} 0 & I_q \\ \hline A_{mr} & \end{bmatrix} \quad , B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline B_{mr} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$x_m \in \Re^n$, $x_{mr} \in \Re^r$, $A_m \in \Re^{n \times n}$, $B_m \in \Re^{n \times r}$, $A_{mr} \in \Re^{r \times n}$, $B_{mr} \in \Re^{r \times r}$

실제 시스템과 모델 상태변수의 오차 e 는 다음을 만족한다.

$$\dot{e} = A_e e \equiv (A_m + K)e \tag{5}$$

여기서

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline K_r \end{bmatrix} \tag{6}$$

$e(t) = x(t) - x_m(t)$, $A_e, K \in \Re^{n \times n}$, $K_r \in \Re^{r \times n}$

위에서 K는 임으로 정해서 오차의 0 값에 대한 수렴속도를 규정한다. (1)의 시스템이 (3)의 모델을 (5)에서 규정한 오차의 동특성에 따라 추종하기 위한 시간 지연 제어법칙은 다음과 같이 주어진다[11].

$$u(t) = u(t-T) + \hat{B}_r^{-1}[\, -\dot{x}_r(t-T) + A_{mr}x(t) + B_{mr}r(t) + K_r e(t) \,] \tag{7}$$

식(7)에서 T는 지연된 시간의 양이다. 여기서 입력값은 플랜트와 모델의 현재 또는 지연된 시간에서의 상태변수들로 구성되어 있지만 플랜트의 동특성 $A_r(x,t)$이나 모르는 외란 d(t) 등은 나타나 있지 않다. 따라서 식(7)의 제어기는 모델의 동특성 파라미터나 외란 등의 값에 관계없이 얻어지며 식(7)에 의해서 구성된 제어시스템은 이들의 영향에 대해 매우 강인함을 알 수 있다.

2.2 선형 시불변 단일입출력(Linear Time Invariant Single I/O) 시스템 표현에 대한 시간지연 제어기

식(1),(3),(5)의 canonical form 모델에 대해 선형 시불변 시스템 모델을 적용할 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

플랜트 모델에 대하여

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \tag{8}$$

기준모델에 대하여

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{mo} & -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn-1} \end{bmatrix} \qquad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b_m \end{bmatrix} \tag{9}$$

오차의 동특성에 대하여

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ k_0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

이 경우 얻어지는 시간지연 제어기는 다음과 같다.

$$u(t) = u(t-T) + (1/\hat{b})[\, -\dot{x}_n(t-T) - a_{mn-1}x_n(t) - \cdots$$

$$-a_{mo}x_1(t) + b_m r(t) + k_{n-1}(x_{mn} - x_n) + \cdots + k_1(x_{m1} - x_1)] \tag{11}$$

식(11)에서는 n개의 상태변수를 모두 사용하고 있다. 따라서 이 제어기를 구현하기 위해서는 모든 상태변수들이 관측가능 해야 함을 알 수 있다. 특히 n번째 상태변수의 미분된 값이 사용되고 있는데 이 값을 측정하는 것이 불가능할 경우 아래와 같은 수치미분을 사용해서 구해야 한다.

$$\dot{x}_n(t-T) \cong \frac{x_n(t) - x_n(t-T)}{T} \tag{12}$$

식(12)와 같은 수치미분은 일반적으로 많은 잡음을 유발하게 되므로 x_n값의 측정이나 출력시 저역통과필터(low pass filter)를 사용하거나 기준모델을 사용한 관측기를 이용해서 구하는 방법이 제안되었다[14].

3. 안정성 해석

식(8),(9),(10),(11) 등에 의한 시간지연 제어시스템의 전달함수를 구해서 표현하면 다음과 같다.

출력방정식이 다음과 같을때

$$y(t) = [1\ 0\ \cdots\ 0]\,[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]' \tag{13}$$

입력 r(t)에서 출력 y(t)로의 전달함수는

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m}{P_m(s)} \frac{P_m(s) + P_k(s)}{\frac{\hat{b}}{b}(1-e^{-Ts})P(s) + P_{mk}(s)} \tag{14}$$

여기서

$P_m(s) = s^n + a_{mn-1}s^{n-1} + \cdots + a_{mo}$: 기준모델의 특성방정식

$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_o$: 플랜트모델의 특성방정식

$P_k(s) = k_{n-1}s^{n-1} + \cdots + k_o$

$P_{mk}(s) = e^{-Ts}s^n + (a_{mn-1}+k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_{mo}+k_o)$

식(14)에서 기준모델을 불안정하게 선정하는 경우는 없으므로 고려의 대상이 되는 특성방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\hat{b}}{b}(1-e^{-Ts})P(s) + P_{mk}(s) = 0 \tag{15}$$

식(15)에서 특성방정식은 기준모델, 플랜트 모델, 오차의 동특성 등에 관련되어 있으며 시간지연에 의한 지수함수 형태의 전달함수를 포함하고 있다. 식(15)와 같은 준다항식(quasi-polynomial)의 안정성 해석은 시간지연에 의한 항 e^{-Ts}를 취급하는 방법에 따라 의미를 다르게 나타낼수 있다. e^{-Ts}에 대한 Pade 근사를 사용할 경우 준다항식을 다항식으로 바꿔서 표현할 수 있으나 고주파 영역에서의 거동을 예측하는 데는 한계가 있고 표현이 매우 복잡하게 된다. M. Fu 등은 시간지연항을 포함하는 준다항식의 계수들이 독립적으로 변할 경우 이 준다항식의 특정영역에 대한 강건 안정성(D-stability)을 해석할 수 있는 기하학적 방법(graphical method)을 제안했다[4]. 이 방법은 일반적인 시간지연 시스템의 파라미터 변동에 대한 일반적인 영역에서의 안정성을 해석할 수 있는 강력한 방법이다. 시간지연을 포함하는 시스템에 대한 시간영역에서의 안정성 해석중에서는 결합된 형태의 차분-미분 방정식의 안정성 해석[5], 제한된 또는 제한되지 않은 시간지연 시스템을 포함하는 미분방정식에 대한 정성적인 해석[1] 등이 시간지연 제어시스템의 안정성 해석에 사용될 수 있다.

3.1 Satche의 방법에 의한 제어시스템의 안정성 해석

K. Youcef-Toumi 와 J. Bobbet은 플랜트 모델의 공칭계수들이 독립적으로 변할 때 식(15)의 특성방정식이 안정하기 위한 최대한의 시간지연 T를 구하는 방법을 제안했다[12]. 이 방법에서는 Nyquist 안정성 해석법의 확장인 M. Satche의 기하학적 해석[9]과 Kharitonov의 edge theorem[6]을 이용했다.

Satche의 방법은 1+G(s)=0 의 형태로 표현된 특성방정식에 Nyquist 기준을 사용하는 대신 G(s)-F(s)=0 으로 표현된 특성방정식의 안정성을 판별할 수 있는 기준을 제시한 방법이다. s가 Nyquist 경로(복소수 평면의 우측을 감싸는)를 따라 움직일 때 G(s)-F(s)=0의 경로안의 극점(pole)의 갯수를 p라 하고 영점(zero)의 갯수를 z라 하자. 이 경우 Cauchy-Rouche 정리에 의하면 s의 변화에 따라 F(s)에서 G(s)로 향한 벡터의 회전수가 z-p와 같음을 보일 수 있다. 여기서 F(s)=-1로 놓으면 Nyquist 안정성 기준은 Satche의 방법의 한 특별한 경우라고 할 수 있다.

시간지연 제어시스템의 경우 식(15)에서 시간지연항을 분리해서 다시 표현하면 다음 식을 얻을수 있다.

$$\frac{s^n + \tilde{P}_{mk}(s)}{-s^n + \frac{\hat{b}}{b}P(s)} + 1 \equiv G(s) \quad , e^{-Ts} \equiv E(s) \tag{16}$$

로 각각 정의할 때

$$G(s) - E(s) = 0 \tag{17}$$

식(16) 에서

$$\tilde{P}_{mk}(s) = (a_{mn-1}+k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_{mo}+k_o) \tag{18}$$

식(17)은 시간지연항과 이것을 포함하지 않는 항으로 나뉘어 있으며 각각의 Nyquist plot을 그려서 안정성을 해석할 수 있다. 특히 시간지연항은 복소수 평면에서 단위원으로 쉽게 그려진다.

<Example 1> 1차시스템의 시간지연 제어기

다음과 같은 1차의 플랜트와 기준모델에 대한 시간지연 제어기의 설계를 생각하자. 시간지연 T=2msec로 정한다.

$$P(s) = \frac{2}{s+1} \equiv \frac{\hat{b}}{s+a} \tag{19}$$

$$P_m(s) = \frac{3}{s+3} \equiv \frac{b_m}{s+a_m} \tag{20}$$

식(11) 을 이용해서 구한 시간지연 제어기는 다음과 같다.

$$u(t) = u(t-T) + (-\dot{x}(t-T) - 3x(t) + 3r(t) + k(x(t) - x_m(t)))/2 \tag{21}$$

위의 식(21)에서 x(t) 와 $x_m(t)$는 각각 플랜트(19)과 기준모델(20)의 상태변수 또는 출력값이며 k는 오차동특성을 정하는 값으로 식(5)에 의해서 다음과 같이 결정된다.

$$a_e = 3 + k \tag{22}$$

여기서 a_e는 오차의 동특성으로 이값이 플랜트의 동특성 3과 같게 놓을 경우 k = 0 이 된다.

식(16)과 식(17) 에 의한 이 제어시스템의 공칭 특성방정식은 다음과 같다.

$$\frac{s+3}{1} + 1 - e^{-Ts} = 0 \quad \Leftrightarrow G(s) - E(s) = 0 \tag{23}$$

Fig.1의 s 평면상의 Nyquist 경로에 대한 G(s)와 E(s) 평면의 그림은 Fig.2와 같다. Fig.2에서 E(s)에서 G(s)로 향하는 벡터는 s의 변화에 따라 z=0 회전함을 알 수 있다. 식(22)에서 이 특성방정식의 복소수 우측평면의 극점은 하나도 없으므로 p=0이며 결국 이 특성방정식의 복소수 우측평면의 근의 갯수는 z-p=0 이다. 따라서 이 제어시스템은 안정하다.

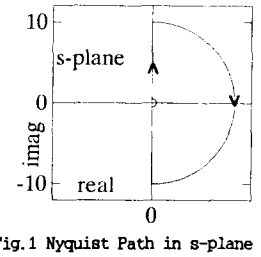


Fig.1 Nyquist Path in s-plane

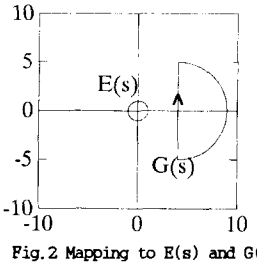
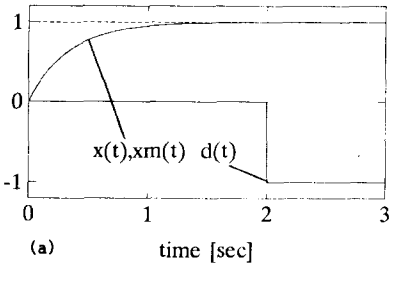


Fig.2 Mapping to E(s) and G(s)



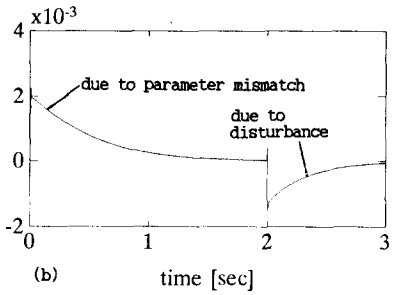


Fig.3 Robustness of TDC in <Example1>
(a)Step Response: a=0.001,b=3,d(t)=u_1(t-2) (b)Error Value

Fig.3는 설계된 제어시스템의 계단파 응답이다. 이 경우 입력이득 b=3, 플랜트모델의 동특성 a=0.001로 실제와 다르게 했으며 d(t) = -u_1(t-2)의 외란을 주었다. Fig.3(b)에서 모델 파라미터 불확실성과 외란에 의한 모델과의 오차값은 매우 적음을 알수있다.□

3.2 모델링 되지않은 동특성에 의한 제어시스템의 불안정화

일반적으로 제어시스템이 강인한가, 않은가를 판정하는 기준은 외란에 대한 강건성(disturbance rejection), 파라미터 불확실성에 대한 강건성(robustness to parametric uncertainty), 그리고 모델링 되지않은 동특성에 대한 강건성(robustness to unmodeled dynamics) 등으로 나뉘어진다. 2장에서는 시간지연제어기가 외란 및 파라미터변동에 대해 강인한 제어시스템을 구성한다는 점을 서술했다. 여기서는 모델링 되지않은 동특성에 대한 시간지연 제어시스템의 강건안정성을 알아보기로 한다. 식(11)에서 보듯이 시간지연제어기는 가정된 플랜트와 같은 차수의 기준모델특성을 추종하는 제어시스템을 구성하게 된다. 따라서 실제 존재하는 추가적인 동특성에 대한 고려는 되어있지 않으며 모델링 되지않은 동특성에 대한 강건안정성은 보장할 수 없게된다. 이 경우 3.1에서의 방법을 이용해서 안정성해석을 할 수 있다. 다음은 **<Example 1>**에 대해 추가적으로 모델링 되지않은 2차의 동특성이 있다고 가정한 시스템의 안정성을 해석한 것이다.

<Example 1'> 모델링 되지않은 동특성에 대한 안정성 해석

<Example 1>에서의 플랜트에 다음과 같이 모델링 과정에서 무시된 2차의 추가적인 동특성 Q(s)가 첨가될 경우를 생각하자[8].

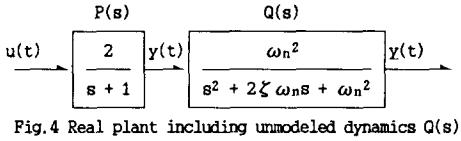
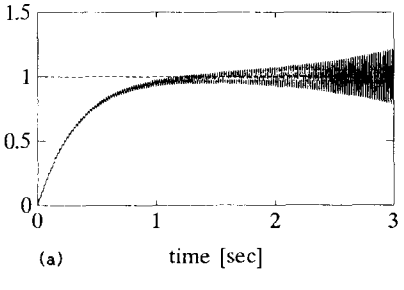


Fig.4 Real plant including unmodeled dynamics Q(s)

Fig.4에서 ζ=1, ω_n=450 rad/sec으로 할 경우 Q(s)의 동특성은 P(s)의 그것에 비해 상당히 빠른 시간응답을 가진 것으로 무시하는 것이 타당하므로 일반적인 제어기 설계에서는 무시된다. 그러나 Q(s)의 동특성을 무시해서 설계한 식(21)의 시간지연제어기를 그대로 사용할 경우 Fig.5(a)의 계단파 시간응답 시뮬레이션 결과 이 제어시스템은 불안정함을 알 수 있다.



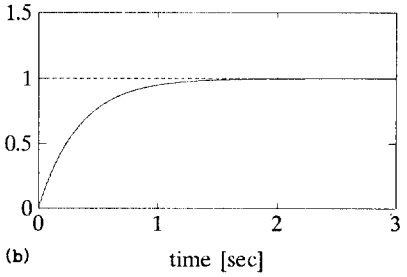


Fig.5 Unstable Response due to Unmodeled Dynamics
(a)ω_n=450 rad/sec (b)ω_n=500 rad/sec

Fig.5(b)의 경우는 ζ=1, ω_n=500 rad/sec으로 모델링 되지않은 동특성 Q(s)가 P(S)와 좀더 멀리 떨어져 있을때 비로소 제어시스템이 안정하게 됨을 알 수 있다. 이러한 사실은 다음의 안정성 해석을 통해 증명할 수 있다. Fig.4 에서 1/Q(s) ≡ q(s)로 정의하고 식(21)의 제어법칙을 그대로 이용할 경우 Satche의 안정성 해석이 가능한 형태의 특성방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{s+3}{(s+1)q(s)-s} + 1 - e^{-Ts} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(s) - E(s) = 0 \qquad (24)$$

Fig.6는 s가 Nyquist 경로를 따라 움직이고 ζ=1, ω_n=485 rad/sec 일때 식(24)에서 사용된 G(s)와 E(s)의 값을 나타낸 것이며 Fig.7은 G(s)와 E(s)값의 절대값과 각도를 각각 나타낸 것이다. Fig.7을 참조할 때 Fig.6 (a)에서 G(s)와 E(s)의 교차가 같은 주파수 (ω 값)에서 일어남을 알 수 있다. 만일 ω_n < 485 라면 s=jω에서 ω가 0에서 ∞까지 변할 때 G(s)가 먼저 단위원 E(s)안으로 들어오게 되고 이 경우 E(s)에서 G(s)로 향하는 벡터가 일회전 하게 된다. ω가 -∞에서 0까지 변할 때는 이 경우의 mirror image가 나타나므로 역시 E(s)에서 G(s)로 향하는 벡터는 일회전 하게된다.

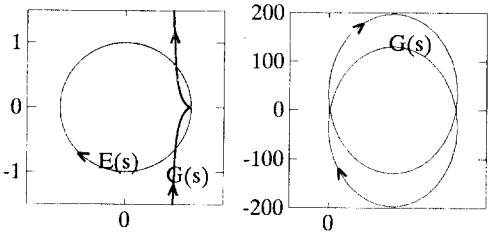


Fig.6 Stability Analysis Using Satche's Method ω_n=485rad/sec
(a)Behavior of G(s) near Unit circle (b)Overall Behavior

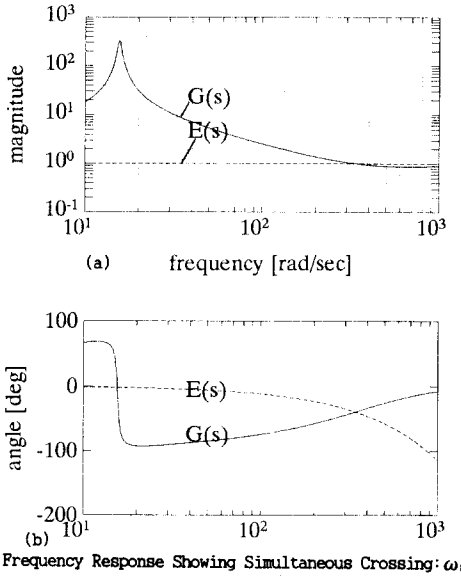


Fig.7 Frequency Response Showing Simultaneous Crossing: ω_n=485

이 두경우를 종합하면 ω가 -∞에서 ∞까지 변할때 z=2가 되고 식(24)에서 p=0이며 따라서 z-p=2, 즉 특성방정식 (24)는 ω_n < 485 rad/sec 일 경우 복소수 평면의 우측에 두 개의 근을 가지게 되어 불안정함을 알 수 있다. 이 결과는 계단파 응답의 시뮬레이션 결과와 일치한다. □

4. 대향 필터링 보상기의 설계

3장에서 시간지연 제어기는 모델링 되지않은 동특성을 그 설계 과정에 반영하지 않았고 따라서 시간지연 제어기에 의해서 구성된 제어시스템은 무시된 동특성에 대한 강건안정성을 보장할 수 없음을 알았다. 여기서는 특별히 알고있는 동특성을 임의로 무시했을 경우 불안정해지는 시간지연 제어기를 안정화 시킬 수 있는 방법을 제안했다. 알고있는 동특성을 임의로 무시하고 제어기를 설계하는 경우중 하나가 디지탈 제어시스템의 구현시 측정전단필터(measurement prefilter)의 동특성에 대한 경우이다. 이 논문에서는 전단필터의 알고있는 동특성을 이용해서 부분경로(minor loop)에 대한 감소차수 관측기를 설계하고 무시된 동특성을 제거했다. 마지막으로 이러한 접근방식을 위치제어 시스템의 설계에 적용시켜 그 효용성을 입증했다.

4.1 제어시스템에서의 필터링 문제

최근 대부분의 제어시스템은 디지탈 형식으로 구현되고 있다. 이때 되먹임 경로의 상태변수 측정시 A/D변환을 하는 경우가 많으며 이 경우 전단필터로써 anti-aliasing filter의 사용은 필수적이다. 이러한 전단필터는 나름대로의 동특성을 가지고 있으며 일반적으로 이 동특성을 취급하는 방법에 따라 다음과 같이 제어기의 설계방식을 분류할 수 있다. 첫째로 필터의 동특성을 감안해서 제어기를 설계하는 수가 있다. 이 방법은 필터 동특성의 식별 (identification)이 잘 되었을 경우 무시된 동특성 없이 제어기를 설계할 수 있으나 극점배치 제어기(pole placemenbt controller)나 최적제어기(optimal controller) 또는 다변수 제어기(multivariable controller) 등과 같이 상태변수 되먹임이 필요할 때는 추가적인 상태변수 관측기가 필요하다. 측정되어 A/D변환되는 상태변수의 수가 많으면 이 관측기에서 고려해야하는 필터동특성의 양이 많아지고 측정되어 A/D변환되는 상태변수의 수가 적으면 이 관측기에서 추정해야 하는 상태변수의 수가 많아지게 되어 어느 경우나 계산량이 상태변수의 수에 따라 증대되게 된다. 다음으로는 필터의 동특성을 모델링 하는 플랜트의 동특성과 충분히 분리시켜 무시해서 또는 모델의 차수줄임(model reduction)을 통해서 제어기를 설계하는 경우가 있다. 이 경우는 추가적인 관측기의 설계 없이 제어시스템을 구성할 수 있으나 제어기의 성격에 따라 무시된 필터 동특성의 영향에 의해 불안정한 제어시스템이 구성될 수 있다.

4.2 대향필터링 보상기로서의 감소차수 관측기

4.1에서 후자의 접근방법과 같이 전단필터의 동특성을 무시해서 시간지연 제어기를 설계할 경우 무시된 동특성을 알고 있으므로 이 동특성을 상쇄 시킬 수 있는 보상기를 생각할 수 있다. 이 보상기를 대향필터링 보상기(Anti-Filtering Compensator; AFC)라 하고 다음 그림을 참조하자.

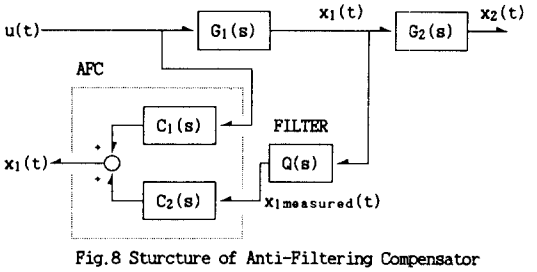


Fig.8 Sturcture of Anti-Filtering Compensator

위 그림에서 고려되지 않은 동특성 Q(s)를 상쇄 시키기 위해 AFC는 공칭조건하에서 다음을 만족시켜야 한다.

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{\hat{X}_1(s)}{U(s)} \tag{25}$$

식(25)에 의한 조건을 만족시키도록 Fig.8의 $C_1(s)$와 $C_2(s)$를 proper하게 설계하는 방법은 무수히 많다. 이 중에서 u(t)와 $x_{1measured}(t)$를 입력으로 사용하는 감소차수 관측기(reduced order observer)는 이 조건을 만족시킨다[2]. 다음의 <Example 2>는 감소차수 관측기를 AFC로 사용한 시간지연 제어시스템의 예다.

<Example 2> 위치제어 서보시스템에 대한 적용

다음 그림과 같은 DC모터 위치제어 서보시스템에 대해 시간지연 제어기를 설계하자.(T=2msec)

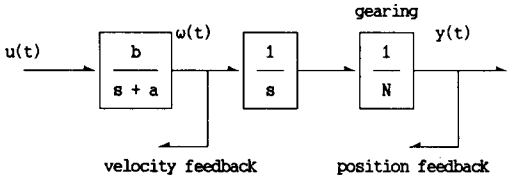


Fig.9 A DC Motor plant

Fig.9의 DC모터에서 플랜트의 공칭계수들은 다음과 같다.

$$b = 944.2 \text{ rad/sec}^2/\text{volts} : \text{input gain}$$
$$a = 1/\tau_m = 88.5 \text{ sec}^{-1} \tag{26}$$
$$(\ \tau_m = 11.3 \text{ msec} : \text{mechanical time const of motor}\ )$$
$$N = 100 : \text{gear ratio}$$

제어시스템이 따르기를 원하는 기준모델을 다음과 같이 정하자.

$$P_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{27}$$

여기서

$$\omega_n = 14 \text{ Hz} = 88 \text{ rad/sec}$$
$$\zeta = 0.7071$$

이 시스템의 극점은 ITAE(Integrated Time Averaged Error Minimizing) 기준에 따른 것이다[7]. 제어기의 성능을 비교하기 위해 적분기를 부가시킨 극점배치제어기(pole placement controller)를 함께 설계했으며 이 때의 극점도 ITAE기준을 따라 고유진동수가 14Hz가 되도록 정했다[3]. Fig.10 (a)에 시간지연 제어시스템과 극점배치 제어시스템의 계단파 응답결과를 시뮬레이션을 통해 비교했다. 관성부하를 두 배로 증가시켰을 경우 시간지연 제어시스템의 응답은 기준모델과의 오차가 적은것에 반해 극점배치 제어시스템의 응답은 원래의 응답에서 많이 벗어난다.

시간지연 제어기를 디지탈 방식으로 구현할 때 전단필터로 다음과 같은 형태의 Butterworth 필터를 사용했다.

$$Q(s) = \frac{\omega_f^2}{s^2+2\zeta_f\omega_f s+\omega_f^2} \tag{28}$$

여기서

$$\omega_f = 130 \text{ Hz}$$
$$\zeta_f = 0.7071$$

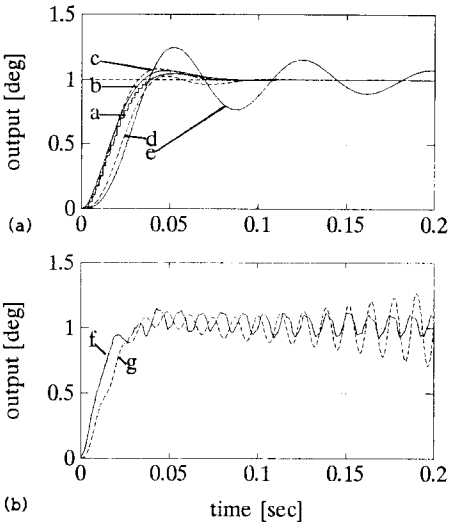


Fig.10 Performance of TDC
(a)No Unmodeled Dynamics (b)Unmodeled Dynamics Effect

a:reference model(⌐)
b:TDC Response(-)
c:100% load inertia variation for TDC(—)
d:Pole Placement Controller(—)
e:100% load inertia variation PPC(-)
f:instability due to prefiltering(-experiment)
g:instability due to prefiltering(—simulation)

Fig.10 (b)에 전단필터 Q(s)를 속도 되먹임 경로에 사용할 경우 시간지연 제어시스템의 계단파 응답결과를 나타냈다. 여기서는 실험과 시뮬레이션 모두가 불안정한 결과를 보여준다. Satche의 방법을 이용해서 모델링 되지않은 동특성 Q(s)의 영향에 의한 안정성 해석을 한 결과 Fig.11과 Fig.12에서와 같이 ω_f=134 Hz 이상에서 제어시스템이 안정하게 됨을 알았다.

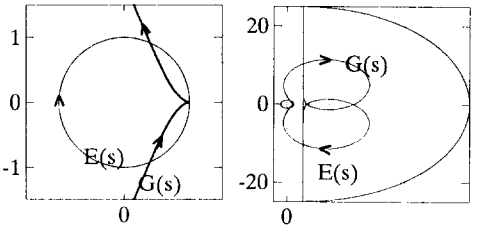
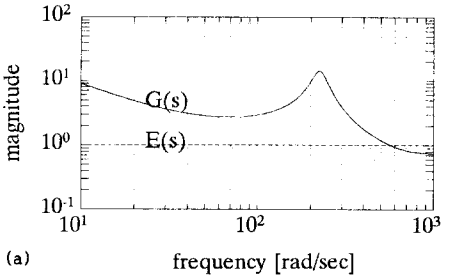


Fig.11 Behavior of G(s) and E(s) : ω_f=134 Hz



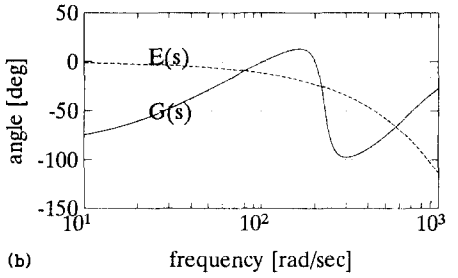


Fig.12 Freq. Response Showing Simultaneous Crossing: ω_f=134Hz

전단필터를 포함하는 속도 되먹임 경로에 30Hz의 고유진동수와 0.7071의 댐핑계수를 갖는 AFC를 연결시켜 모델링 되지않은 동특성을 보상한 경우 계단파 응답을 Fig.13에 나타냈다. Fig.13 (a)에서 실험과 시뮬레이션 결과를 비교했으며 Fig.10 (b)와 비교할 때 안정하게 기준모델을 추종함을 알 수있다. Fig.13 (b)는 관성부하가 두 배 증가했을 경우 극점배치 제어기의 응답과 비교된 결과이다.

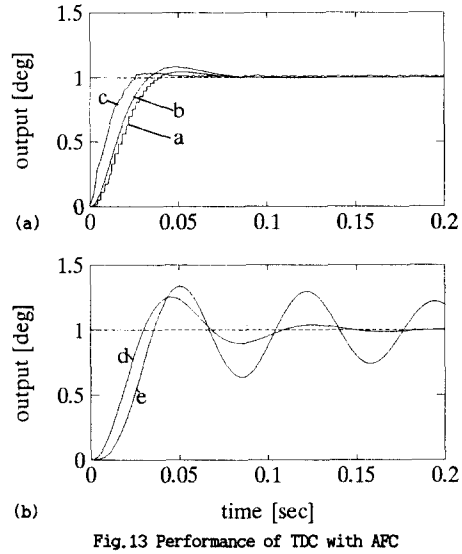


Fig.13 Performance of TDC with AFC
(a)TDC+Prefilter+AFC (b)100% load inertia variation

a:reference model(┌┌)
b:TDC response with prefilter and AFC(-)
c:experiment(-)
d:TDC response with prefilter and AFC(-)
e:pole placement controller(-)

Fig.10 (a)에서 시간지연 제어기가 관성부하의 변화에 대해 거의 차이나지 않는 모델추종 특성을 보인데 반해 여기서는 모델추종 특성이 많이 변화되었다. 이것은 AFC가 이미 관성부하를 포함하는 플랜트 파라미터의 정보를 이용했고 실제로는 이 값이 변화 되었기 때문이다. 그러나 이 경우에도 극점배치 제어시스템의 경우 보다는 모델추종 성능이 우수함을 알 수있다.□

5.결 론

Satche의 방법을 이용한 안정성 해석을 통해 시간지연 제어기가 모델링 되지않은 동특성에 의해 불안정 해지는 경우를 보였다. 무시된 동특성이 알려진 경우 AFC를 사용해서 이러한 불안정화를 막을 수 있었다. 파라미터 변동에 대한 강건성능은 극점배치 제어기의 그것과 비교를 했다. AFC의 사용은 무시된 동특성이 알려진 경우에 국한되며 시간지연 제어시스템의 강건성을 어느정도 약화 시켰다. 앞으로의 연구는 모델링 되지않은 알려지지않은 동특성에도 대처할 수 있는 시간지연 제어기를 위한 보상기 또는 시간지연 제어 알고리즘의 개선에 대해 진행되어야 할 것이다.

<참 고 문 헌>

[1] Burton, T.A. ,Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, Inc., pp 243-279, 1985.

[2] Chen,C.T. ,Linear System Theory and Design, Holt-Saunders International Editions, pp 365-371, 1984.

[3] Franklin,G.F. ,Feedback Control of Dynamic Systems,Addison -Wesley Publishing, pp 387-395, pp 352-355, 1986.

[4] Fu,M. ,Olbrot,A.W. and Polis,M.P. , "Robust Stability for Time-Delay Systems: The Edge Theorem and Graphical Tests," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, vol. AC-34, No.8, pp 813-820, Aug. 1989.

[5] Halanay, A. ,"Stability Theorems of Gradshtein-Klimushev -Krasovskii Type for Coupled Differential-Difference and Difference Equations with Small Delays," *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 47. Differential Equations: Qualitative Theory Szeged (Hungary)*, 1984.

[6] Kharitonov,V.L. , "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations," *Differential Equations*, vol.14, pp 1483-1485, 1979.

[7] Ogata,K. ,Modern Control Engineering, Prentice-Hall Inc. ,pp 299-301, 1970.

[8] Sastry,S. and Bodson,M. ,Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness, Prentice-Hall Inc. ,pp 215-236, 1989.

[9] Satche,M.J., "Graphical Method for Time-Delay Analysis," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol.16, p.419., 1949.

[10]Youcef-Toumi,K. and Ito,O., "Controller Design for Systems with Unknown Dynamics," *Proceeding of American Control Conference*, Mineapolis, MN, pp 836-844, June 1987.

[11]Youcef-Toumi,K. and Ito,O., "A Time Delay Controller for Systems With Unknown Dynamics," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol.112, pp 133-142, Mar. 1990.

[12]Youcef-Toumi,K. and Bobbett,J. "Stability of Uncertain Linear Systems With Time Delay," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol.113, pp 558-567, Dec. 1991.

[13]Youcef-Toumi,K. and Wu,S.T., "Input/Output Linearization Using Time Delay Control," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol.114, pp 10-19, Mar. 1992.

[14]이정완, "TDC를 이용한 강인 DC 서보 모터 제어기 설계 및 관측기 / 제어기 안정화에 관한 연구," 석사학위논문, 한국과학기술원 정밀공학과, pp 9-16, 1992.