

# 빠르고 강건한 추적제어를 위한 새로운 슬라이딩 서피스 설계

최승복, 박동원  
인하대학교 기계공학과

## Design of New Sliding Surfaces for Fast and Robust Tracking Control

Seung-Bok Choi and Dong-Won Park

Dept. of Mechanical Engineering, Inha University

### Abstract

A new sliding surface for a variable structure control(VSC) law is employed to achieve fast and robust path tracking in a class of second-order nonlinear uncertain dynamical systems. The surface initially passes arbitrarily given initial conditions and subsequently moves towards a predetermined surface via rotating or/and shifting. We call it as a moving sliding surface(MSS). The surface is then incorporated with the VSC law which is constructed by imposing the sliding conditions in a special way. We primarily enforce the conditions which assume that once the system state is on a sliding surface that it is driven towards the zero state. Using the VSC law associated with the MSS, it is shown that the tracking behaviors are remarkably improved in the sense of the fastness and the robustness.

### 1. 서론

대상제어시스템의 변수변화 및 외란에 대하여 강건한 추적 제어를 위해 지난 십여년간 가변구조제어(VSC)이론이 활발히 연구되어오고 있다. (1)-(5) 잘 알려진 바와 같이 VSC이론은 흡입 매니폴드(attractive manifold) 개념에 기초를 둔 것으로서 불연속제어 입력으로 시스템의 제어구조를 변화시킨다. 그리고 가장 두드러진 특징은 상태공간 혹은 오차상태공간 내에서 미리 정의된 슬라이딩 서피스 위에 슬라이딩 모드(sliding mode)가 형성되는 것이며, 이 동안에 대상제어시스템은 변수변화 및 외란에 대하여 매우 둔감함을 나타낸다. (6) 따라서 슬라이딩 서피스의 설계는 제어시스템의 성능을 결정하므로 매우 중요하다.

지금까지 VSC 시스템을 위해 제안된 대부분의 슬라이딩 서피스는 주어진 초기조건과 무관하게 설계되었으며, 서피스계수 또한 임의로 결정되었다. 이러한 서피스를 갖는 제어시스템은 슬라이딩 운동(sliding motion)이 일어나기전까지 시스템 불확실성에 대하여 매우 민감하며 또한 매우 느린 추적시간을 초래한다. 이러한 단점을 보완하기 위해 Young(7) 등은 불연속제어의 높은 입력 게인(gain)을 사용하여 서피스까지 도달하는 리칭시간(reaching time)을 줄였다. 그러나 높은 불연속게인의 사용은 제어기의 높은 떨림(chattering) 현상을 유발하기 때문에 실제 하드웨어에 많은 문제점을 던져주며, 또한 포화함수(saturation function)를 사용한 연속제어기의 적용시 추적오차를 증가시킨다. Slotine 과 Sastry(2)는 초기오차를 영(zero)으로 선택하여 리칭상태(reaching phase)를 제거하였으나 이는 특수한 경우이며 일반적으로 실제 제어시스템의 초기 조건은 임의로 주어진다.

본 논문에서는 기존의 고정된 슬라이딩 서피스를 갖는 VSC 시스템의 단점을 개선하기 위하여 제안된 이동슬라이딩 서피스(moving sliding(or switching) surface: MSS)(8)를 시간에 따라 변하는 궤적의 추적제어에 확장한다. MSS는 임의로 주어진 초기조건을 지나며 미리 선정된 서피스를 향해 이동한다. MSS의 기울기 및 절편은 계단함수(step function) 형태로 변하기 때문에 슬라이딩 모드의 존재성을 유지하며 불연속 제어게인의 증가없이 빠른 추적제어 효과를 얻을 수 있다. MSS와 연계된 가변구조 제어시스템을 2차 비선형 불확실성 시스템에 적용하여 제안된 방법의 효율성과 우수성을 입증하였다.

### 2. 이동 슬라이딩 서피스

다음 식으로 주어지는 제 2차 불확실성 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \sum_{i=1}^p f_i(x_1(t), x_2(t), t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \delta a_i(t) g_i(x_1(t), x_2(t), t) \\ &\quad + b(x_1(t), x_2(t), t) u(t) + d(t)\end{aligned}\quad (1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

여기서  $x_{10}$ 는 초기시간  $t_0$ 에서 주어진 초기조건이며,  $\delta a_i(t) \times g_i(x, t)$  와  $d(t)$ 는 각각 변수변화 및 외란을 나타낸다. 이들의 크기는 미지이나 상하 한계치는 안다고 가정한다. 제어문제는 실제상태변수  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$  가  $[t_0, \infty)$  영역에서 1계 미분가능한 요구상태 변수  $x_d(t) = (x_{d1}(t), x_{d2}(t))^T$  를 추적하는 것이다. 다시말해서, VSC 시스템은 임의의 초기조건에 대하여 추적오차를 시간이 지남에 따라 영(zero)으로 보내야 한다. 따라서 식(2)와 같이 추적오차를 정의한다.

$$\begin{aligned}(e_1(t), e_2(t))^T \\ = (x_1(t) - x_{d1}(t), x_2(t) - x_{d2}(t))^T\end{aligned}\quad (2)$$

일반적으로 슬라이딩 서피스(이 경우는 직선)는 오차상태공간 내에서 다음과 같이 정의된다.

$$s(e(t)) = ce_1(t) + e_2(t), \quad c > 0\quad (3)$$

만일 식(1)에서 제어기  $u(t)$ 가 추적오차  $e(t)$ 를 슬라이딩 서피스(3)으로 보내도록 설계된다면 주어진 초기조건에 대하여 추적오차는 영으로 접근함을 쉽게 알 수 있다. 이는 제어기  $u(t)$ 가 다음의 슬라이딩 조건을 만족하도록 설계되면 임의의 초기 조건에 대하여 점근적인 추적제어가 가능함을 의미한다.

$$s(e(t))\dot{s}(e(t)) < 0\quad (4)$$

이러한 조건을 만족하는 가변구조시스템의 설계를 위해 시스템 불확실성은 다음과 같이 한계영역이 존재한다고 가정한다.

$$(a_i)_{\min} \leq \delta a_i(t) \leq (a_i)_{\max} \quad (5)$$

$$\gamma_1 \leq d(t) \leq \gamma_2$$

따라서, 만일 제어기 (6)을 사용한다면 슬라이딩 조건 (4)가 만족되어 대상제어계 (1)의 슬라이딩 모드가 존재함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$u(t) = [ -(k + \sum_{i=1}^q |\tilde{g}_i(x, t)|) \text{sgn}(\sigma) - \sum_{i=1}^p f_i(x, t) + \sum_{i=1}^q \tilde{g}_i(x, t) - cx_2 + cx_{d2} + \dot{x}_{d2} ] / [b(x, t)] \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i(x, t) &= \tilde{a}_i g_i(x, t), \quad \tilde{a}_i = ((a_i)_{\min} + (a_i)_{\max})/2 \\ \bar{g}_i(x, t) &= \bar{a}_i g_i(x, t), \quad \bar{a}_i = (a_i)_{\max} - \tilde{a}_i \quad (7) \\ k &> \max(|\gamma_1|, |\gamma_2|) \end{aligned}$$

서론에서 언급했던 바와 같이, 서피스계수가 임의로 선택된 혹은 최적으로 결정된 기존의 고정된 슬라이딩 서피스 (3)과 연계된 제어기 (6)은 특히 리칭상태에서 불확실성에 대해 매우 민감할 수 있다. 그러므로, 슬라이딩 서피스나 제어기를 적당히 선택함으로써 리칭상태의 운동시간을 줄일 수 있다면 덜 민감한 시스템을 얻을 수 있다. 이렇게 하기 위해 우리는 이동 슬라이딩 서피스(MSS)를 제안한다. 이 서피스는 처음에 임의로 주어진 초기조건을 지나도록 설계되고, 뒤이어 미리 결정된 서피스를 향해 움직인다. 그 움직임은 회전(rotating)과 평행이동(shifting)을 통해 이루어진다. 따라서 우리는 MSS를 회전 슬라이딩 서피스(rotating sliding surface: RSS)와 평행이동 슬라이딩 서피스(shifting sliding surface: SSS)의 두가지 종류로 나눈다. RSS의 움직임은 아래에 정의된 계단함수(step function)인 서피스의 기울기의 변화에 의해 이루어지며, SSS의 움직임은 역시 계단함수인 서피스의 절편의 변화에 의해 수행된다.

정의 1 : 구간  $[a, b]$ 에서 정의된 함수  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 은  $a = v_1 < v_2 < \dots < v_n = b$ 로 주어진 분할(partition)이 존재하여 각각의 개 부분구간(open subinterval)  $(v_{k-1}, v_k)$ ,  $1 < k \leq n$ 에서 상수이면 계단함수라고 정의한다.

## 2.1 회전 슬라이딩 서피스 (RSS)

식(1)에 주어진 제 2차 불확실성 시스템에 대해서 다음과 같은 슬라이딩 서피스를 정의한다.

$$\sigma_r(e(t), t) = c_r(t) e_1(t) + e_2(t) \quad (8)$$

$$\sigma_r(e(t_0), t_0) = \sigma_0 = c_{r0} e_1(t_0) + e_2(t_0)$$

우리는 이 슬라이딩 서피스가 처음에 임의로 주어진 초기조건을 지나며, 이 때의 기울기는  $c_{r0}$ 가 됨을 알 수 있다. 다시말해 representative point(RP)는 초기에 Fig. 1(a)에 나타난 바와 같이 서피스  $\sigma_{r0}$  위에 놓여 있게 된다. 이 그림에서  $\sigma_p$ 는 미리 설정된 슬라이딩 서피스이며  $\sigma_p = c_p e_1(t) + e_2(t)$ 로 정의된다. 이 서피스의 이동 알고리즘을 기술하기전에 다음의 정리에서 슬라이딩 모드의 존재성에 대하여 논증하였다.

정리 1 : 만약 식(8)의  $c_r(t)$ 가 시간  $t \in [t_0, t_s]$ 에서 계단함수로 정의되고 양 끝값이 각각  $c_r(t_0) = -e_2(t_0)/e_1(t_0)$ 와  $c_r(t_s) = c_p$ 이며, 시간  $t \in (t_s, \infty)$ 에서  $c_r(t) = c_p$ 인 상수함수로 정의되면, 슬라이딩 서피스 (8)와 연계된 제어기 (6)을

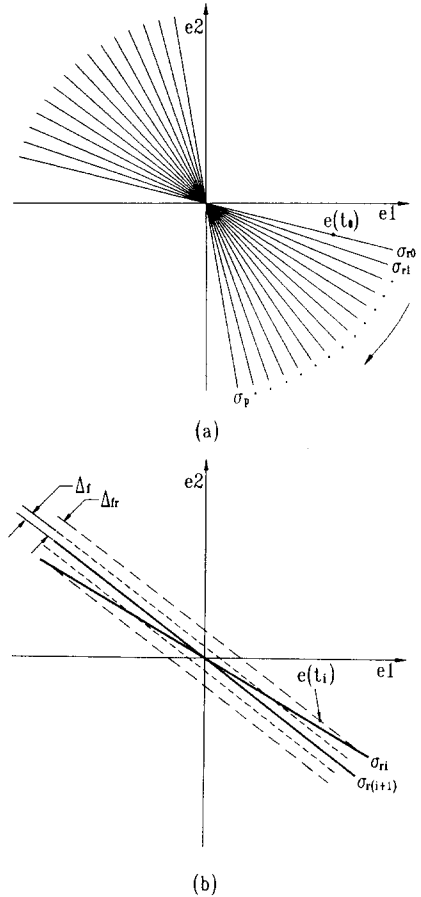


Figure 1. A rotating sliding surface: (a) configuration; (b) mechanism.

갖는 시스템 (1)은 슬라이딩 조건  $\sigma_r(e, t)\dot{\sigma}_r(e, t) < 0$  을 거의 모든 곳에서 만족한다.

증명 : 정의 1에 의해 분할  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 가 존재하여  $t_0 = v_1 < v_2 < \dots < v_n = t_s$ 이며 각각의 개 부분구간  $(v_{k-1}, v_k)$ ,  $1 < k \leq n$ 에서  $c_r(t)$ 가 상수가 된다. 확연히 P가 유한집합이라는 것을 알 수 있다. 따라서 우리는 P가 measurable이며  $m(P) = m_0(P) = 0$  인 것을 증명할 수 있는데<sup>(9)</sup> 여기서  $m$ 은 Lebesgue measure를,  $m_0$ 는 Lebesgue exterior measure를 각각 나타낸다. 그러므로, 우리가  $c_r(t)$ 를  $[t_0, t_s]$ 에서 계단함수로 택했기 때문에  $t \in [t_0, t_s] - P$ 에서  $\dot{c}_r(t) = 0$ 이며,  $(t_s, \infty)$ 에서  $\dot{c}_r(t) = 0$ 이다. 이렇게 하여 슬라이딩 서피스 (8)와 연계된 제어시스템 (1)과 (6)은 명확히 슬라이딩 조건을 만족한다. 즉 시간  $t \in [t_0, t_s]$  일 때는  $e \in \mathbb{R}^2 - \sigma_r$ ,  $t \in [t_0, t_s] - P$ 에서  $\sigma_r(e, t)\dot{\sigma}_r(e, t) < 0$ 이며, 시간  $t \in (t_s, \infty)$  일 때는  $e \in \mathbb{R}^2 - \sigma_r$ 에서  $\sigma_r(e, t)\dot{\sigma}_r(e, t) < 0$ 을 만족하므로 정리의 증명이 완결된다.

이제 우리는 슬라이딩 조건을 깨뜨리지 않고 슬라이딩 서피스  $\sigma_{r0}$ 를  $\sigma_p$ 로 이동할 수 있다. 본 논문에서 제안된 이동 알고리즘은 다음과 같이 요약될 수 있다.

단계 1. 서피스를 회전시키기 위해 필요한 적당한  $\Delta r$ 을 결정하고(Fig. 1(b) 참조),  $\Delta r = \Delta f + \Delta r$  로 정의하는데, 여기서  $\Delta r$ 은 시간지연(delay), 히스테리시스(hysteresis) 등의 nonideality에 의해 발생하는 서피스의 스위칭(transition) 경계영역이다.  $\Delta r$ 의 값은 추적성능을 향상시키는 데 있어 매우 중요한 역할을 한다.  $\Delta r$ 의 값이 작을 수록 추적시간 (tracking time)은 감소하고, 따라서 시스템 민감성을 감소시킬 수 있다. 만약  $\Delta r$ 이 영에 접근한다면 RP가 슬라이딩 서피스를 시작할 때 부터 통과할 수 있어 추적시간이 지연되거나 리칭상태가 거의 제거됨으로서 다른 견지에서의 시스템 강건성을 향상시킬 수 있다.

단계 2. 초기조건  $e(t_0)$ 에 대해서  $\sigma_0=0$ 을 만족하는 초기의 기울기  $c_{r0}$ 를 구한다. 즉  $c_{r0} = -e_2(t_0)/e_1(t_0)$ 이 된다.

단계 3.  $c_{r0}$ 의 값과  $c_p$ 의 값에 의해서 회전방향을 결정한다. 만약  $c_{r0} < c_p$ 이면 시계방향, 만약  $c_{r0} > c_p$ 이면 반시계방향이다.

단계 4. 서피스  $\sigma_0$ 에서 방정식  $|c_{r1}e_1(t_0) + e_2(t_0)| = \Delta r$ 의 해로부터 얻어지는 기울기  $c_{r1}$ 을 갖는 서피스  $\sigma_1$ 으로 즉시 회전시킨다. 시계방향으로 회전할 때는 두 해중 큰 값을  $c_{r1}$ 값으로 택하고 반시계방향으로 회전할 경우에는 작은 값을 택한다. 서피스  $\sigma_1$ 은 방정식  $|c_{r2}e_1(t_1) + e_2(t_1)| = \Delta r$  (여기서  $t_1 = t_0 + \Delta\tau$ )의 해로부터 얻어지는 기울기  $c_{r2}$ 를 갖는 서피스  $\sigma_2$ 로 이동하기전에 유한한 시간동안 머물러 있게된다(이 시간을 거주시간( $\Delta\tau$ )이라하자).  $\Delta\tau$ 은  $\Delta r$ 과 같이 시스템 성능에 매우 큰 영향을 미친다. 거주시간이 짧을 수록 추적시간도 감소하게 된다. 만약  $\Delta\tau$ 가 길게 선택된다면 RP가 슬라이딩 서피스를 통과할 수 있다. 그렇게 되면 반대부호에 해당하는 제어입력이 가해짐으로서 느린 운동을 유발하게 된다. 다음 단계의 조건을 만족시키기 전 까지 서피스의 회전이 계속된다.

단계 5. 시계방향 회전시  $c_{rn} > c_p$ 의 조건을 만족하면  $c_r(t) = c_p$ 로 고정시키고, 반시계방향 회전시  $c_{rn} < c_p$ 이면  $c_r(t) = c_p$ 로 고정시킨다. 이때 이 기울기  $c_{rn}$ 은 방정식  $|c_{rn}e_1(t_{n-1}) + e_2(t_{n-1})| = \Delta r$ 의 해로부터 구하며, 여기서  $t_{n-1} = t_0 + (n-1)\Delta\tau$ 이다.

그렇다면 만약 초기조건이 불안정한 영역 즉 1, 3사분면에 있으면 어떻게 될 것인가에 의문점을 가질 수도 있을 것이다. 우리가 만일 슬라이딩 서피스를 원점과 초기조건을 함께 지나도록 설계한다면 이 서피스 자체가 불안정성을 갖게된다. 그러므로, RP가 안정한 영역에 도달하기전까지는 RP가 점점 원점에서 멀어져갈 것이 명확하다. 수학적인 관점에서 보면 RSS (8)를 이용하여 유한한 시간동안에 RP를 원점으로 보낼 수 있지만 이것은 오히려 기존의 방법보다도 더욱 긴 추적시간을 유발할 수 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 우리는 다음과 같은 슬라이딩 서피스를 제안한다.

## 2.2 평행이동 슬라이딩 서피스 (SSS)

시스템 (1)에 대한 슬라이딩 서피스를 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma_s(e(t), t) = c_p e_1(t) + e_2(t) + a(t) \quad (9)$$

$$\sigma_s(e(t_0), t_0) = \sigma_0 = c_p e_1(t_0) + e_2(t_0) + a_0$$

여기서  $c_p$ 는 미리 설정된 슬라이딩 서피스  $\sigma_p$ 의 기울기이며,

$a(t)$ 는  $e_2(t)$  축의 서피스 가변절편이다. 이 서피스는 Fig. 2(a)에서 보는 바와 같이 처음에 적당한 초기 절편  $a_0$ 를 갖고 임의로 주어진 초기조건을 지난다. RSS (8)에서의 같이 우리는 SSS (9)에 대한 슬라이딩 모드 존재성에 대한 정리를 다음과 같이 얻을 수 있다.

정리 2 : 만약 식 (9)의  $a(t)$ 가 시간  $t \in [t_0, t_s]$ 에서 양 끝값  $a(t_0) = -e_2(t_0) - e_1(t_0)$ 와  $a(t_s) = 0$ 를 갖는 계단함수로 정의되고 시간  $t \in (t_s, \infty)$ 에서  $a(t) = 0$ 로 정의된다면, 슬라이딩 서피스 (9)와 연계된 제어기 (6)을 갖는 시스템 (1)은 슬라이딩 조건  $\sigma_s(e, t)\dot{\sigma}_s(e, t) < 0$ 을 거의 모든 곳에서 만족한다.

증명은 정리 1의 증명과 유사하게 완성될 수 있어 생략한다. 이 움직임은 서피스가  $\sigma_{s0}$ 에서  $\sigma_p$ 까지 변화될 때 까지 진전된  $a(t)$ 를 구함으로서 행해지며, 다음의 알고리즘으로 요약될 수 있다.

단계 1. 서피스를 평행이동시키기 위한 적당한 상수  $\Delta s$ 를 결정하고(Fig. 2(b) 참조)  $\Delta s = \Delta f + \Delta s$ 로 정의한다.

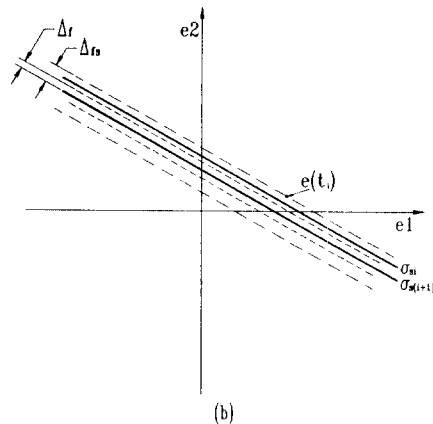
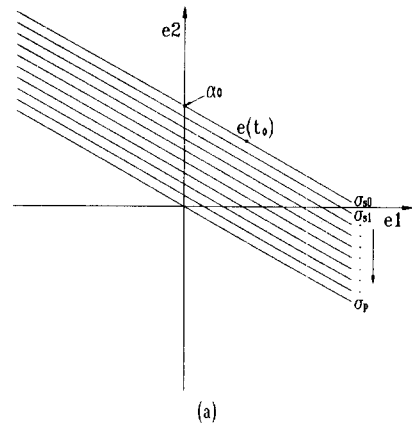


Figure 2. A shifting sliding surface: (a) configuration; (b) mechanism.

단계 2. 초기조건  $e(t_0)$ 에 대해서  $\sigma_{s0}=0$ 를 만족하는 초기절편  $a_0$ 를 구한다. 즉  $a_0 = -c_{pe1}(t_0) - e_2(t_0)$  이 된다.

단계 3. 이  $a_0$ 의 값에 따라 평행이동 방향이 결정된다. 만약  $a_0 > 0$  이면 윗방향, 만약  $a_0 < 0$  이면 아랫방향으로 결정한다.

단계 4. 서피스  $\sigma_{s0}$ 에서 방정식  $|c_{pe1}(t_0) + e_2(t_0) + a_1| = \Delta r_s$ 의 해로부터 얻어지는 절편  $a_1$ 을 갖는 서피스  $\sigma_{s1}$ 으로 즉시 이동시킨다. 윗방향으로 회전할 때는 두 해 중에서 큰 값을  $a_1$ 으로 택하고, 아랫방향일 때는 작은 값을 택한다. 서피스  $\sigma_{s1}$ 은 방정식  $|c_{pe1}(t_1) + e_2(t_1) + a_2| = \Delta r_s$  (여기서  $t_1 = t_0 + \Delta\tau$ )의 해로부터 얻어지는 절편  $a_2$ 를 갖는 다음 서피스  $\sigma_{s2}$ 로 이동하기 전에 유한한 시간( $\Delta\tau$ ) 동안 머물러 있게 된다. 평행이동은 다음 단계의 조건을 만족시키기 전까지 계속 수행한다.

단계 5. 윗 방향일 때  $a_n > 0$ 의 조건을 만족하면, 또는 아랫 방향일 때  $a_n < 0$  이면  $a(t) = 0$ 로 고정시킨다. 이 때의 절편  $a_n$ 은 방정식  $|c_{pe1}(t_{n-1}) + e_2(t_{n-1}) + a_n| = \Delta r_s$ 의 해로부터 구하며, 여기서  $t_{n-1} = t_0 + (n-1) \times \Delta\tau$ 이다.

직관적으로, 추적시간을 줄이고 강건성을 증가시켜 보다 나은 결과를 얻기 위하여 서피스 (8)와 (9)을 결합시켜 볼 수 있다. 예로서, 만약 초기오차가 불안정한 영역에 있으면 RP가 안정한 영역으로 들어오기 전 까지 SSS를 사용하고, 그 후 부터는 RSS를 계속 사용하면 매우 우수한 추적제어 효과를 거둘 수 있다. 결과적으로 우리는 다음과 같은 이동 슬라이딩 서피스(MSS)를 정의할 수 있다.

$$\sigma_m(e(t), t) = c(t)e_1(t) + e_2(t) + a(t) \quad (10)$$

$$\sigma_m(e(t_0), t_0) = c(t_0)e_1(t_0) + e_2(t_0) + a(t_0)$$

### 3. 시뮬레이션 결과 및 고찰

제한된 슬라이딩 서피스의 특성과 효율성을 살펴보기 위하여 Fig. 3의 비선형 스프링-댐퍼 시스템을 고려한다. 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$m\ddot{x} + \nu(\dot{x}, t) + \mu(x, t) = u(t) + d(t) \quad (11)$$

여기서  $d(t)$ 는 외란이며,  $\nu(\dot{x}, t)$ 와  $\mu(x, t)$ 은 다음과 같이 취한다.

$$\nu(\dot{x}, t) = (\nu_0\dot{x} + \nu_1\dot{x}|\dot{x}|) + (\delta\nu_0\dot{x} + \delta\nu_1\dot{x}|\dot{x}|) \quad (12)$$

$$\mu(x, t) = (\mu_0x + \mu_1x^3) + (\delta\mu_0x + \delta\mu_1x^3)$$

따라서,  $x_1(t) = x(t)$  그리고  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ 으로 놓으면, 식 (11)는 식 (1)의 형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

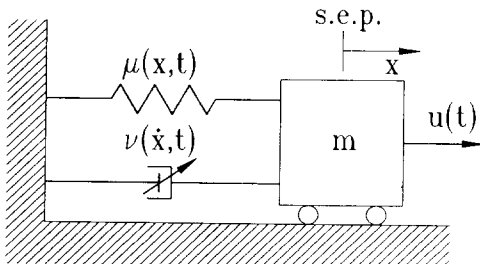


Figure 3. A nonlinear spring-damper system.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \sum_{i=1}^4 f_i(x, t) + \sum_{i=1}^4 \delta a_i(t)g_i(x, t) + bu(t) + hd(t) \quad (13)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

여기서

$$b = h = 1/m$$

$$f_1(x, t) = -\mu_0x_1/m, \quad f_2(x, t) = -\mu_1x_1^3/m$$

$$f_3(x, t) = -\nu_0x_2/m, \quad f_4(x, t) = -\nu_1x_2|x_2|/m$$

$$\delta a_1(t) = -\delta\mu_0, \quad \delta a_2(t) = -\delta\mu_1 \quad (14)$$

$$\delta a_3(t) = -\delta\nu_0, \quad \delta a_4(t) = -\delta\nu_1$$

$$g_1(x, t) = x_1/m, \quad g_2(x, t) = x_1^3/m$$

$$g_3(x, t) = x_2/m, \quad g_4(x, t) = x_2|x_2|/m$$

시뮬레이션을 위하여  $m=1$ ,  $\mu_0 = \mu_1 = 0.5$ ,  $\nu_0 = \nu_1 = 0.3$ 을 사용하였고, 불확실항  $\delta a_i(t)$ 와  $d(t)$ 는 다음과 같이 선택되었다.

$$\delta a_1(t) = \delta a_2(t) = -0.05 + 0.25\sin(5\pi t)$$

$$\delta a_3(t) = \delta a_4(t) = -0.05 + 0.15\sin(7\pi t) \quad (15)$$

$$d(t) = 0.05 + 0.25\cos(3\pi t)$$

한편, 요구상태 궤적은 다음과 같이 선택되었다.

$$x_{d1}(t) = -0.5\cos(\pi t/5) \quad (16)$$

$$x_{d2}(t) = 0.1\pi\sin(\pi t/5)$$

따라서, 이동 슬라이딩 서피스를 다음과 같이 선택함으로써,

$$\sigma_m(t) = c(t)(x_1 - x_{d1}) + (x_2 - x_{d2}) + a(t) \quad (17)$$

우리는 식 (6) 형태의 VSC 제어기를 설계할 수 있다.

$$u(t) = \left[ -\left(k + \sum_{i=1}^4 |\tilde{g}_i(x, t)|\right) \text{sgn}(\sigma_m(t)) \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^4 f_i(x, t) + \sum_{i=1}^4 \tilde{g}_i(x, t) \right] \quad (18)$$

$$- cx_2 + cx_{d2} + \dot{x}_{d2}] * m$$

여기서

$$\tilde{g}_1(x, t) = -0.05x_1/m, \quad \tilde{g}_2(x, t) = -0.05x_1^3/m$$

$$\tilde{g}_3(x, t) = -0.05x_2/m, \quad \tilde{g}_4(x, t) = -0.05x_2|x_2|/m$$

$$\tilde{g}_1(x, t) = 0.25x_1/m, \quad \tilde{g}_2(x, t) = 0.25x_1^3/m \quad (19)$$

$$\tilde{g}_3(x, t) = 0.15x_2/m, \quad \tilde{g}_4(x, t) = 0.15x_2|x_2|/m$$

$$k = 0.5$$

Fig. 4는 제한된 MSS와 기존의 고정된 서피스 간의 제어 응답을 비교한 것이다. 기존의 서피스에 대해서는  $c = 7.0$ 이 임의로 선택되었고, 제한된 슬라이딩 서피스를 위해 다음과 같은 수치들이 선택되었다:  $c_p = 7.0$ ,  $\Delta r = 0.002$ ,  $\Delta\tau = 0.003$ ,  $\Delta s = 0.002$ ,  $\Delta\tau = 0.001$  sec. 우리는 제한된 슬라이딩 서피스를 사용함으로써 추적성능이 기존의 고정된 서피스(임의 혹은 최적) 사용시보다 현격하게 향상되었음을 쉽게 알 수 있다. 그림에서 추적시간  $T_t$ 는 요구상태 궤적과 실제상태 궤적의 오차가 1 퍼센트 이하가 되는 순간의 시간을 의미한다. 이와같이 바람직하지 않은 제어입력의 떨림을 증가시키지 않고 향상된 제어성능은 실제 시스템에 있어서 더욱 많은 장점을 제공할 것이다. Fig. 5의 서피스궤적과  $c(t)$ 의 변화를 통해 우리는 제한된 서피스가 먼저  $\Delta s = 0.002$ 를 가지고 평행이동 되었고, 곧이어  $\Delta\tau = 0.003$ 을 가지고 회전이 된 것을 쉽게 알 수 있다. 일반적으로 초기오차에 따라서 회전 혹은 평행이동이 시작된다. Fig. 6은 기존의 서피스와 거주시간  $\Delta\tau = 0.02$  sec인 제한된 서피스 사용시 제어응답을 오차 상태에서 비교한 것이다. 이 그림으로부터 추적시간을 희생함으로써 변수변화와 외란에 대한 시스템 민감성이 전 제어 수행 기간동안 거의 나

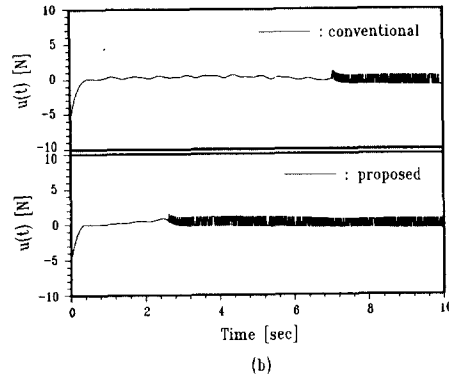
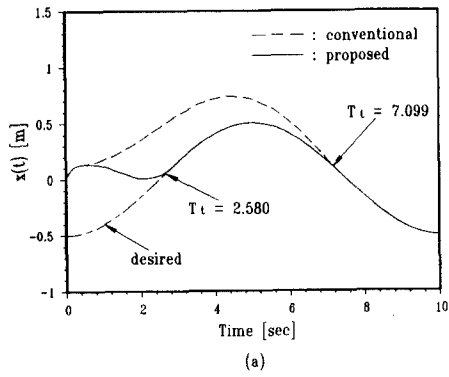


Figure 4. Control responses ( $\Delta\tau = 0.001\text{sec}$ ): (a) state trajectories; (b) control histories (discontinuous).

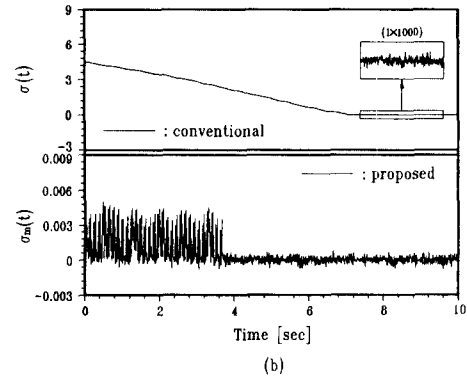
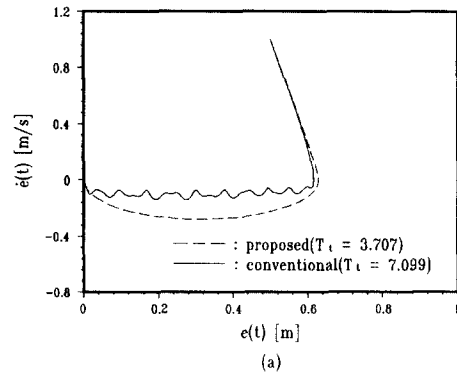


Figure 6. Control responses ( $\Delta\tau = 0.02\text{sec}$ ): (a) phase portraits; (b) sliding surfaces.

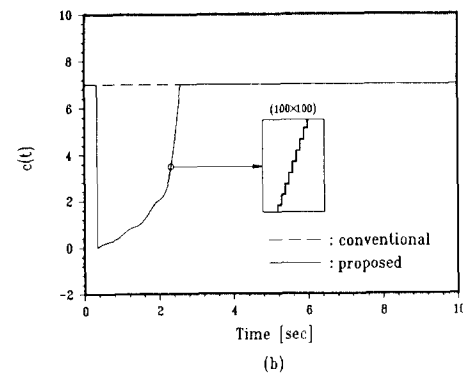
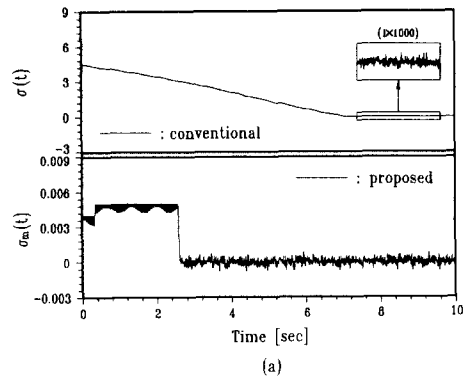


Figure 5. Surface characteristics: (a) sliding surfaces; (b) variations of  $c(t)$ .

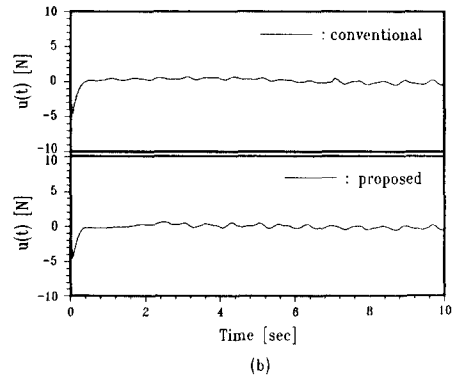
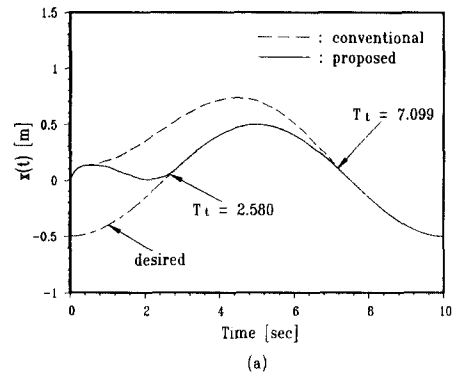


Figure 7. Control responses ( $\Delta\tau = 0.001\text{sec}$ ): (a) state trajectories; (b) control histories (continuous).

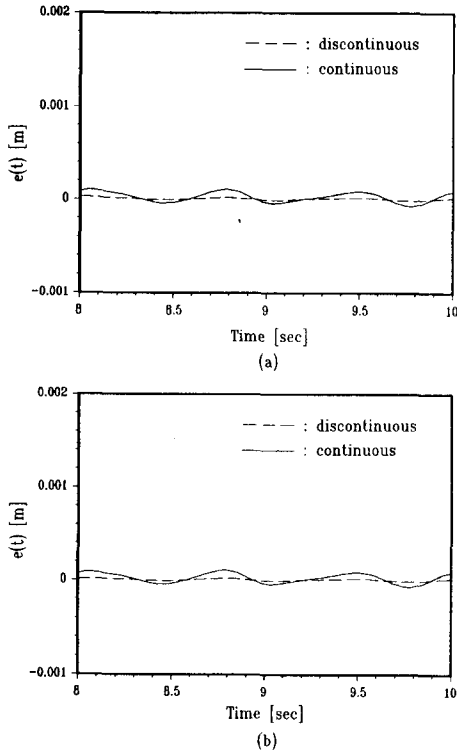


Figure 8. Tracking errors: (a) conventional; (b) proposed.

타나지 않았음을 명확히 알 수 있다. 이는 RP가 시작하는 순간부터 슬라이딩 서피스를 통과하여 리칭상태가 거의 제거되었고 따라서 시스템의 강건성이 전 기간동안 보장되기 때문이다.

우리는 실제에 있어서 기기의 파손을 가져올 수 있는 떨림 현상 때문에 불연속 제어기 (18)를 사용하는 것이 바람직하지 않다는 것을 잘 알고 있다. 그래서 경계영역 내에서 불연속 제어입력을 연속인 것으로 근사하여 구할 수 있다(2). 이것은 식 (18)의  $\text{sgn}(\sigma_m(t))$ 를  $\text{sat}(\sigma_m(t))$ 로 대체함으로써 얻을 수 있으며 연속 제어기는 다음과 같이 주어진다.

$$u(t) = [ -(k + \sum_{i=1}^4 |\bar{g}_i(x, t)|) \text{sat}(\sigma_m(t)) - \sum_{i=1}^4 f_i(x, t) + \sum_{i=1}^4 \bar{g}_i(x, t) ] \quad (20)$$

$$- cx_2 + cx_{d2} + \dot{x}_{d2}] * m$$

여기서

$$\text{sat}(\sigma_m(t)) = \begin{cases} \sigma_m(t)/\Delta f, & |\sigma_m(t)| \leq \Delta f \\ \text{sgn}(\sigma_m(t)), & |\sigma_m(t)| > \Delta f \end{cases} \quad (21)$$

Fig. 7은 연속 제어기 (20)를 사용하여 얻은 제어응답을 나타낸 것으로, 제어입력의 떨림현상이 제거되었음을 쉽게 알 수 있다. 그리고, 예상했던 바와 같이 불연속제어기 사용시보다 추적오차가 기존의 서피스와 제한된 서피스에서 모두 증가된 것이 Fig. 8에 잘 나타나 있다.

#### 4. 결론

변수변화와 외란을 갖는 VSC 시스템의 추적성능을 향상시키기 위해 이동 슬라이딩 서피스(MSS)가 제안되었다. 이 서피스는 처음에 임의로 주어진 초기오차를 지나고 곧이어 미리 설정된 슬라이딩 서피스로 회전과 평행이동을 통해 이동하도록 설계되었다. 불확실성 시스템에 있어서 슬라이딩 조건을 만족하는 제어기를 설계하였고, 이와 연계한 MSS를 사용함으로써 제어입력 신호의 바람직하지 않은 떨림을 증가시키지 않고 추적시간을 현저하게 줄일 수 있었다. 물론 제안된 방법은 일반성을 잃지 않고 다입력(multi-input) 시스템에도 확장될 수 있다. 다입력 시스템에서는 각각의 슬라이딩 서피스가 초기오차의 위치에 따라 각각 독립적으로 이동한다. 본 연구에서 제안된 MSS는 로봇을 비롯한 2차 선형 혹은 비선형식으로 표현되는 많은 물리적 시스템 제어에 매우 유용하게 사용될 것으로 사료된다.

#### 참고문헌

- (1) Young, K.K.D., 1978, "Controller Design for Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems", IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, Vol. 8, No 2, pp. 101-109.
- (2) Slotine, J.J. and Sastry, S.S., 1983, "Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators", International Journal of Control, Vol. 38, pp. 465-492.
- (3) Choi, S.B. and Jayasuriya, S., 1987, "A sliding mode controller incorporating matching conditions applied to manipulators", Proceedings of the 10th IFAC World Congress, 4, 290-295.
- (4) Fu, L.C. and Liao, T.L., 1990, "Globally Stable Robust Tracking of Nonlinear Systems Using Variable Structure Control and with an Application to a Robotic Manipulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 12, pp. 1345-1350.
- (5) Elmali, H. and Olgac, N., 1992, "Robust Output Tracking Control of Nonlinear Systems via Sliding Mode Technique", Automatica, Vol. 28, No. 1, pp. 145-151.
- (6) Utkin, V.I. 1977, "Variable Structure Systems with Sliding Modes", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 2, pp. 212-222.
- (7) Young, K.K.D., Kokotovic, P.V. and Utkin, V.I., 1977, "A Singular Perturbation Analysis of High-Gain Feedback Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, pp. 931-938.
- (8) Choi, S.B., Cheong, C.C. and Park, D.W., "Moving Switching Surfaces for Robust Control of Second-Order Variable Structure Systems", International Journal of Control (to be appeared).
- (9) Cohn, D.L., 1980, Measure Theory, Birkhäuser, Boston.