비선형 동흡진기의 동적거동에 관한연구

박 철 희*, ⊙송 석 흥**, 신 현 재**

(A Study on the Behaviour of Nonlinear Dynamic Absorber)

Chol-Hui Pak, Suck-Heung Song, Hyun-Jae Shin

1. 서 론

일반적으로 기계계 또는 기계요소가 외력을 받아 진동할때 공진이 문제시 되는 경우가 많다. 이러한 계의 공진제어에는 주로 댐핑재료(Damping Material)의 사용이 일반화 되어 왔다. 그러나 댐핑재료를 사용한 제어에 있어서는 계의 특성이나 규모등에 따라 많은 제한요소가 따르는데 특히 구조물의 규모가 커지거나 복잡해지면, 제어 위치선정에도 어려움이 따르며 그 효과도 기대하기 어렵다. 다른 방법으로는 기계계의 동적 특성치에 변화를 주는 것이나, 이를 허용하지 않는계가 많다. 따라서 이러한 단점들을 보완하기 위해서 고안된 것이 동흡진기(Dynamic Absorber)이다.

기존의 선형 동흡진기[1]는 주공진 부근영역에서 가진되는 계에 만 적용이 가능하기 때문에, 흡진기와 기계계의 크기비 (ratio)의 결정이 제한적이다. 이런 제한을 극복하여 비교적 넓은 범위의 가진주파수에 대해서 최대의 응답을 최소화 하기 위해서는 비선형 동흡진기[5]의 해석이 요구되고 있다.

제어대상의 최적응답을 얻기위해 흡진기의 크기를 변환시키는 과정을 tuning 이라 하는데, 이 과정을 통해 최적의 감쇠값을 결정할 수 있다. 비선형 흡진기의 장점은 tuning 과정시 비선형 파라미터 변화에 의해 제어가 가능한 영역을 확장할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 동흡진기의 tuning 과정시 흡진기의 크기비와 비선형 파라미터비에 따른 효과를 정규모우드를 활용하여 고찰한 후, 최적의 응답을 통해 비선형 동흡진기의 동적 거동을 연구하였다.

2. 계의 설정 및 운동방정식

3 차항의 비선형을 고려한 비선형 동흡진기의 모델은 그림 1과 같고, 이에 대한 운동방정식은 Newton의 제 2 법칙에 의해서

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + k_1 x + k_2 (x-y) + C_2 (\dot{x}-\dot{y}) + \alpha_1 x^3 \\ + \alpha_2 (x-y)^3 = F \cos\Omega t \\ m_2 \ddot{y} + k_2 (y-x) + C_2 (\dot{y}-\dot{x}) + \alpha_2 (x-y)^3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

로 표현된다. 여기서 C_2 는 감쇠상수, F 는 외력의 크기, Ω는 외력의 주파수, α_i (i=1,2)는 계의 비선형 특성을 나타내는 파라미터들이다.

* 인하대학교 기계공학과, 정회원
** 인하대학교 기계공학과 대학원

3. 비선형 정규모우드

비선형계의 비감쇠 자유진동에 대한 주기해를 1-st approximation 하면, 이 해는

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos\Omega t \\ y(t) &= b(t) \cos\Omega t \end{aligned} \quad (2)$$

가 된다. 식 (2)를 식 (1) 에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -m_1\Omega^2 a + k_1 a + k_2(a-b) + \frac{3}{4}\alpha_1 x^3 + \frac{3}{4}\alpha_2 (a-b)^3 \\ -m_2\Omega^2 b + k_2(b-a) + \frac{3}{4}\alpha_2 (a-b)^3 \end{aligned} \quad (3)$$

따라서, 이 두식에서 비선형 정규모우드를 구하기 위해, Ω를 소거하여서 좌표변환($a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$)하면 다음과 같이 나타낼 수 가 있다.

$$f(P) + r^2 g(P) = 0 \quad (4)$$

여기서,

$P=\tan\theta$,

$$f(P) = m_2 k_2 (1+P^2)\left(P^2 - \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{m_1}{m_2} + 1\right)P - \frac{m_1}{m_2}\right),$$

$$g(P) = \frac{3}{4} m_2 \alpha_2 \left(P^4 - \left(3 - \frac{m_1}{m_2}\right)P^3 - 3\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)P^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 3\frac{m_1}{m_2} + 1\right)P - \frac{m_1}{m_2}\right).$$

따라서, 계의 파라미터가 주어지면 위 식에서 정규모우드를 구 할 수가 있다.

4. 비선형 동흡진기 이론

자동차의 내연기관과 같이 속도변화를 가지는 기계계나 하중의 변화를 받는 기계계에 있어서 동흡진기에 점성감쇠기(dashpot)을 설치하므로써 가진주파수의 변화에 따른 계의 공진을 제어할 수 있다. 먼저 식 (1)을 상대변위($z=y-x$)로 좌표변환후 새로운 6개의 무차원변수로 나타내면,

$$(1-g^2)\,A - \mu f^2(1+\frac{3}{4}\varepsilon_2\,(B^2+D^2))B + 2\zeta_2\mu\, g\, D = x_{st}$$

$$(1-g^2)\,C - \mu f^2(1+\frac{3}{4}\varepsilon_2\,(B^2+D^2))D + 2\zeta_2\mu\, g\, B = 0$$

$$(f^2(1+\frac{3}{4}\varepsilon_2\,(B^2+D^2))-g^2)\,B - g^2 A + 2\zeta_2\, g\, D = 0 \qquad (5)$$

$$(f^2(1+\frac{3}{4}\varepsilon_2\,(B^2+D^2))-g^2)\,D - g^2 C - 2\zeta_2\, g\, B = 0$$

여기서 6개의 무차원 변수를 각각

$$\mu=\frac{m_2}{m_1}\ ;\ f=\frac{\omega_2}{\omega_1}\ ;\ g=\frac{\Omega}{\omega_1}\ ;\ \varepsilon_2=\frac{\alpha_2}{k_1}$$

$$x_{st}=\frac{F}{k_1}\ ;\ \zeta_2=\frac{C_2}{C_c};\ C_c=2m_2\omega_1$$

으로 나타낼 수 있다.
식 (5)의 기계계에 대한 응답함수는

$$\left(\frac{X_1}{x_{st}}\right)^2=\frac{E\,\zeta_2^2+F}{G\,\zeta_2^2+H} \qquad (6)$$

여기서

$$E=(2g)^2$$

$$F=(f^2T-g^2)^2$$

$$G=(2g)^2\ (g^2-1+\mu g^2)^2$$

$$H=((1-g^2)(f^2T-g^2)-\mu f^2 g^2 T)^2$$

$$T=1+\frac{3}{4}\varepsilon_2 X_2^2$$

$$X_1^2=A^2+C^2$$

$$X_2^2=B^2+D^2$$

식 (6)에서 극한의 감쇠계수에 따라 뚜렷한 특징을 볼 수있다. 첫째, 감쇠가 무한대의 경우와 둘째, 감쇠가 영(zero)인 경우로 이들 특성응답곡선은 두 점에서 교차하며 임의의 감쇠응답곡선은 이두점을 통과한다. 그림 2은 감쇠값의 변화에 따른 응답곡선이다. 최적의 감쇠 응답곡선은 이 두점의 높이가 같고 교차되는 각 점에서 극값을 갖는다.

-1. Tuning

식 (6)에서 특성응답곡선의 두 고정점을 구하기 위한 관계식은

$$\frac{E}{G}=\frac{F}{H} \qquad (7)$$

으로 나타나며 식 (7)의 nontrivial solution 관계로부터 g에 대한 특성방정식은

$$g^4-\frac{2}{2+\mu}\,(f^2T+\mu f^2T+1)\,g^2+\frac{2f^2}{2+\mu}\,T=0 \qquad (8)$$

이 된다. 식 (8)을 만족하는 두 근을 g_1^2, g_2^2 라면 (g_1에 해당하는 점 P, g_2에 해당하는 점 Q) 근 g_1^2 과 g_2^2에 해당하는 진폭을 같게하기 위해 특성응답곡선에 대입하면

$$\left\{\frac{E}{G}\right\}_{g_1^2}=\left\{\frac{E}{G}\right\}_{g_2^2} \qquad (9)$$

식 (9)로부터 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$g_1^2+g_2^2=\frac{2}{1+\mu} \qquad (10)$$

식 (8)의 두 근의 합에 대한 관계식은 식 (10)의 근과 계수 관계에 의해

$$f^2T=\frac{1}{(1+\mu)^2} \qquad (11)$$

간단한 형태의 식으로 나타난다. tuning된 두 고정점은 식 (11)을 식 (8)에 대입하여 구할 수 있다

$$g^4-\frac{2}{1+\mu}\,g^2+\frac{2}{(1+\mu)^2(2+\mu)}=0 \qquad (12)$$

4-2. Optimum Damping

Tuning된 동흡진기의 최적의 감쇠 응답곡선은 tuning 때의 주파수 g_1 또는 g_2에서의 기울기가 영(zero)일때 이므로 응답곡선의 식 (6)을 g에 대해 미분하여 얻을 수 있다. tuning시 얻은 관계식 으로부터 응답 곡선식은

$$\left\{\frac{X_1}{x_{st}}\right\}^2=\left\{\frac{\tau}{\pi^2+\Theta^2}\right\} \qquad (13)$$

여기서

$$\pi=(2\zeta_2 g)\ (g^2+\mu g^2-1)$$

$$\Theta=(1-g^2)(\frac{1}{(1+\mu)^2}-g^2)-\frac{\mu}{(1+\mu)^2}\,g^2$$

$$\tau=(2\zeta_2 g)^2+(\frac{1}{(1+\mu)^2}-g^2)^2$$

로 표현되며 식 (13)을 미분하여 g_1^2, g_2^2 을 각각 대입하면

$$\frac{d}{dg^2}\left\{\frac{\tau}{\pi^2+\Theta^2}\right\}_{g_1}=0 \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dg^2}\left\{\frac{\tau}{\pi^2+\Theta^2}\right\}_{g_2}=0 \qquad (15)$$

식 (14)과 식 (15)에서 각각 P점과 Q점에서의 기울기를 영(zero)으로 하는 감쇠계수 값을 얻을 수 있다. 이때의 감쇠계수가 최적의 응답을 나타낸다.

5. 결과 및 고찰

1) 정규모우드의 해석을 통해 흡진기 크기비와 비선형 파라미터 비에 따른 모우드의 분기(bifurcation) 영역을 그림 3에 나타내었다. 모우드의 분기영역은 흡진기의 크기비가 커질 수록 비선형 파라미터의 영향이 커짐을 알 수 있다.
2) 흡진기의 크기에 따라 tuning 가능한 비선형 파라미터의 범위를 그림 4에 나타내었다.
3) 2)의 결과로 부터 tuning된 흡진기의 최적의 응답곡선은 그림 5 tuning이 않되는 특성곡선을 그림 6에 나타내었다.

6. 결론

비선형을 고려한 동흡진기에 대한 연구결과 다음과 같은 결론를 얻었다.

1) 정규모우드의 해석을 통해 기계계에 적합한 흡진기의 크기와 비선형 파라미터범위를 구할 수 있다.
2) tuning은 비선형 파라미터에 의해 지배된다.
3) tuning된 응답곡선에 의해 구해진 감쇠응답은 계의 공진영역 에서 최적화한 응답을 얻었다.
4) 비선형 동흡진기로 설계된 기계계는 가진주파수에 대한 제어영역폭을 넓게할 수 있었다.

참고문헌

[1] Ormondroyd and J. P. Den hartog, 1928, " Theory of Dynamic Vibration Absorber " , Trans. ASME, Vol. 50, APM-241

[2] L. A. Pipes, 1953, " Analysis of a Nonlinear Dynamics Vibration Absorber " , J. Applied Mechanics

[3] W. Szemplinska-Stupnicka, 1969, " On the Phenomenon of Combination Type Resonances in Non-linear Two Degree-of-Freedom Systems " , International J. of Non-linear Mechanics

[4] A. Soom, Ming-san Lee, 1983, " Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped Systems " , J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design

[5] J. C. Nissen etc., 1985, " Optimization of a Dynamic Non-linear Vibration Absorber " , J. of Sound and Vibration

[6] H. J. Rice, 1986, " Combinational Instability of the Non-linear Vibration Absorber " , J. of Sound and Vibration

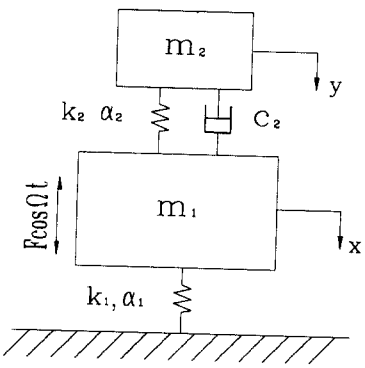

그림1. 비선형동흡진기의 모델

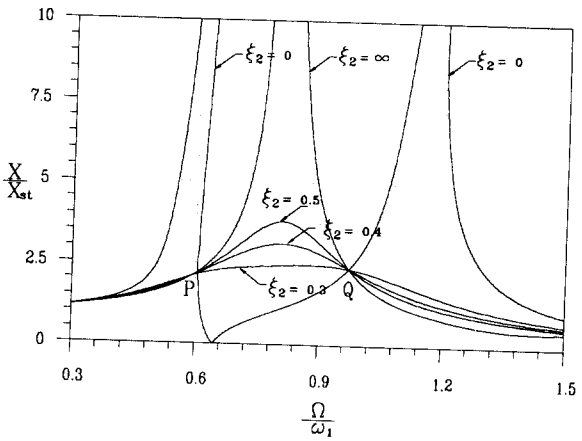

그림2. 감쇠변화에 따른 응답곡선

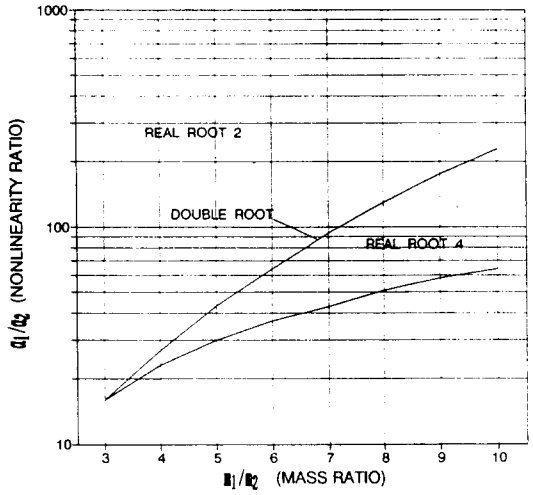

그림3. 정규모우드 분기영역

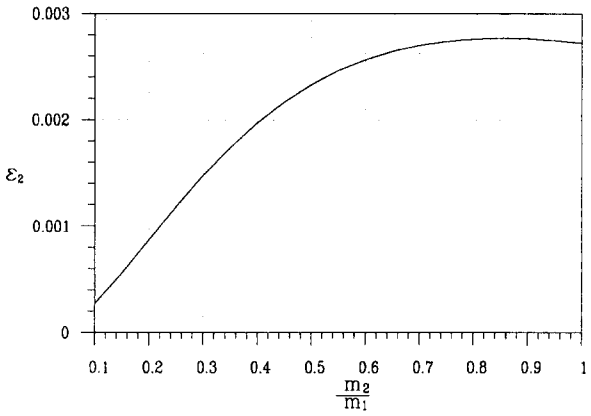

그림4. Tuning가능한 파라미터 범위

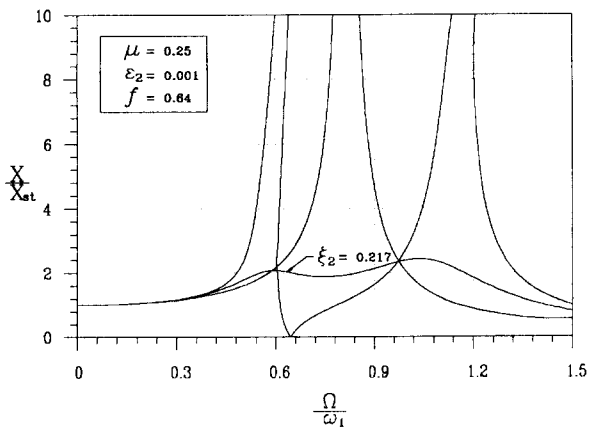

그림5. 최적의 주파수응답곡선

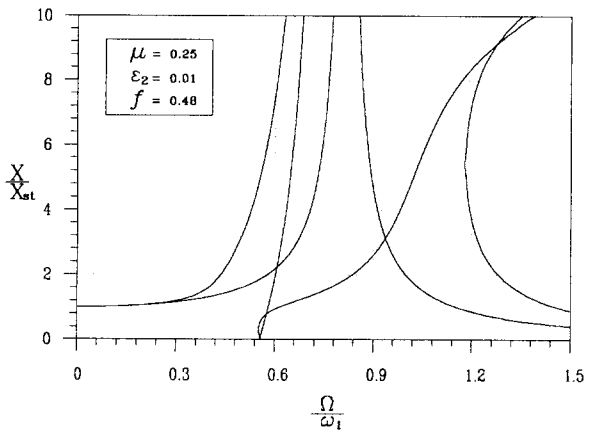

그림6. Tuning이 않되는 특성곡선