

하천에서의 2차원 흐름특성 해석을 위한 유한요소모형의 개발

한 전연* 이 종태** 김 상현***

요 지

하천에서의 2차원 흐름특성 해석을 위하여 2차원 shallow water식을 기본방정식으로 하고 이를 불연속보간 함수와 upwinding weighting을 도입한 petrov-Galerkin 방법에 의하여 해석하는 RIV-FEM2 를 개발하였다.

RIV-FEM2는 전처리(pre-processing), 주처리(analysis-processing), 후처리과정(post-processing) 으로 구성되어 있다.

2차원 가상하도의 경우와 실제 하천에 대하여 본 모형을 적용한 결과 유속분포, 수면형 및 해석 영역내에서의 mass flux의 보존등의 면에서 수렴성과 안정성이 뛰어나고 계산속도도 작게 나타나 본 모형의 적용성을 입증할수 있었다. 본 연구를 통하여 개발된 RIV-FEM2는 실제의 하천에서의 수자원의 이수 및 치수관리면에서 크게 기여할수 있을 것으로 판단된다.

1. 서 론

하천시스템에서의 수리학적 현상을 파악하고 하천환경에 미칠 영향을 평가하기 위하여 수치해석 모형에 의한 시뮬레이션은 매우 중요한 부분을 차지하고 있다. 홍수시 수공구조물에 의한 수위상승의 예측이나 급변부정류의 선단부의 처리를 위한 해석, 또는 하천 수질해석등에 영향인자인 유속분포 양상과 혼합과정등 수공학분야에서의 실제적인 문제를 해결하는데 있어서 하천에서의 유속분포나 수위변동에 관한 정확한 계산이 필요로 하게 되었다. 유한요소법은 공학 및 물리학에서의 연속체 문제를 해결하는데 매우 효과적인 방법으로서 발전되어 오고 있다. 하천 수공학 분야에서의 유한요소법의 응용은 다른 공학 분야에 비하여 뒤떨어져 있는데, 이는 free surface flow의 유한요소 해석시 직면하게되는 해석 알고리즘의 난해성에 기인한 것으로 사료된다. 그러나, 이에 대한

* 경북대 부교수

** 경기대 교수

*** 경북대 대학원

새로운 해석기법들의 도입과 고속전자계산기를 이용하여 많은 양의 계산을 빠른 시간내에 수행함으로써 free surface flow 에 관한 유한요소법의 적용이 최근에 들어 더욱 활발히 진행되고 있다.

본 연구에서는 2차원 shallow water 식을 기본방정식으로 하고 이를 petrov-Galerkin 방법에 의하여 해석한 유한요소모형을 개발하여 자연하천에서의 복잡한 지형학적 조건, 상하류부에서의 다양한 경계조건등을 효율적으로 처리하고자 한다. 본 유한요소모형은 pre-processing, analysis processing과 post-processing으로 구성되어 있으며 개발된 유한요소모형은 가상하도 및 실제하천에 적용하여 그 활용성을 입증하였다.

2. 2차원 shallow water식의 유한요소해석

2차원 shallow water 식은 (1)-(5)식과 같이 Matrix 형태로 기술된다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + D = 0 \quad (1)$$

$$\text{여기서, } U = [h \quad p \quad q]^T \quad (2)$$

$$F_x = [p \quad r_1 \quad r_2]^T \quad (3)$$

$$F_y = [q \quad r_2 \quad r_3]^T \quad (4)$$

$$D = [i \quad gh(S_{0,x}-S_{r,x})-ui/2 \quad gh(S_{0,y}-S_{r,y})-vi/2]^T \quad (5)$$

여기서, x, y 는 수평면의 좌표축, t 는 시간

$$h = h(x, y, t)$$

$$p = u(x, y, t) h(x, y, t)$$

$$q = v(x, y, t) h(x, y, t)$$

$$r_1 = u^2 h + \frac{1}{2} gh^2$$

$$r_2 = uvh$$

$$r_3 = v^2 h + \frac{1}{2} gh^2$$

공학분야에서 일반화되어 사용되고 있는 유한요소 기법중 종래의 Galerkin법은 free surface

flow식과 같은 hyperbolic equation의 적용은 적절하지 못한 점이 있는 것으로 나타났다. 이것은 종래의 Galerkin 방법이 가지는 non-dissipative 한 특성에 기인한 것으로서 하천에서의 흐름을 해석하기 위한 방법으로 적합하지 못한 것으로 연구되었던 바 있다. 즉, 이제까지의 free surface flow에 관한 유한요소 모형은 난류나 Reynold 응력항을 포함시켜 이를 calibration과정에서 와점성 계수를 과도하게 설정하도록 구성하고 있어 convection-dominated flow를 diffusion-dominated flow로 왜곡하여 해석하고 있으므로 인하여 물리적인 의미를 상실하게 되었으며 Gray등은 이에 대하여 유한 요소법의 적용에 관한 한계성을 지적한 바 있다.

본 연구에서 사용한 petrov-Galerkin 방법은 최근에 연구되고 있는 FEM기법의 하나로서 Galerkin 방법의 non-dissipative한 특성을 개선한 것인데 보간 함수로서 불연속성인 특성과 upwinding weighting의 특성을 갖는 보간 함수를 이용하여 해석하는 기법으로서 hyperbolic equation에서 문제에 대한 물리적 특성을 보존한 상태에서 안정해를 얻을수 있는 기법이다.

$$N' = N + \rho_x A^T \frac{\partial N}{\partial x} + \rho_y B^T \frac{\partial N}{\partial y} \quad (6)$$

여기서 ρ_x 와 ρ_y 는 dissipation level이다. 이제 (6)식의 가중함수에 의하여 (1)식을 유한요소방정식으로 표시하면 (7)식과 같다.

$$\sum_{\Omega}^{NE} \left[(N')^T \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial N}{\partial x} + B \frac{\partial N}{\partial y} + D \right\} d\Omega = 0 \quad (7)$$

여기서, NE는 전체 element의 수, Ω 는 한 element의 면적이고, $A = \partial F_x / \partial x$, $B = \partial F_y / \partial y$ 로 기술된다.

시간 미분항에 대한 Galerkin방법의 적용은 유한차분형으로 나타난다는 것은 잘 알려져 있기 때문에 가중치 θ 를 도입한 implicit형으로 기술하면 (8)식과 같다.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left[\theta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^n \right] \quad (8)$$

여기서 θ 는 시간가중치이고 $U = [h \ p \ q]^T$ 이므로 $[\partial h / \partial t \ \partial p / \partial t \ \partial q / \partial t]^T$ 의 항으로 (8)식을 정리하면 (9)식과 같다.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^{n+1} = \alpha U^{n+1} - \beta \quad (9)$$

$$\text{여기서, } \alpha = \frac{1}{\theta \Delta t} \quad \beta = \alpha U^n + \frac{1-\theta}{\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^n$$

이제 (9)식을 (1)식에 대입하면 비선형 대수방정식을 얻게 된다. 이 식들에 대한 해는 Newton-Raphson 방법에 의하여 그 해를 구할수 있다. 주어진 element내에서 수행되는 바 모든 적분은 4점 Gaussian quadrature 식에 의하여 계산되었다. 또한 본 연구에서는 global matrix의 형성시 non-pivoting과 all coreroutine 방법을 사용함으로써 계산용량을 줄일수 있었고 계산속도에서의 효율성을 크게 증대시켰다.

초기조건으로서 본 연구의 유한요소모형은 'cold-start'와 'hot-start'를 모두 처리 할 수 있도록 구성하였다. 상하류단의 개방 경계조건은 일관성 있게 주어져야 한다. 2차원 상류상태의 조건에서는 유입경계에는 2개의 경계조건(예를들면 x 및 y방향 유속 또는 유량)이 부여되고, 유출 경계에서는 1개의 경계조건(유량 또는 수위)이 필요하게 된다. 2차원 하류상태의 조건에서는 유입 경계에서만 3개의 경계조건이 필요로 하고 유출부는 자유상태 또는 어떤 값도 부여되지 않는 상태로 처리한다.

3. 유한요소모형 RIV-FEM2 의 개발

2장에서 기술된 유한요소 방정식을 기초로 하여 한 유한요소모형 RIV-FEM2를 개발하였다. RIV-FEM2모형은 크게 세가지 부분으로 구성되어 있다. 즉, 전처리와 주처리과정은 FORTRAN77으로 작성하였고 후처리과정은 turbo-Pascal을 이용하여 전처리와 주처리 과정에서 계산된 결과를 graphics으로 사용자가 손쉽게 사용할수 있도록 interactive하게 구성하였다.

(1) 前處理 과정 (Pre-Processing)

본 유한요소 모형의 전처리 과정은 부 프로그램 INPUT와 PREP에 의하여 수행된다. INPUT은 각종 입력자료를 처리하는 부분으로서, 전체 node의 수, element의 수, boundary node의 수, 계산 시간 간격, 계산수행시간, x-y방향의 dissipative값, 조도계수, 시간가중치등을 읽어 드린다. PREP는 자동으로 Isoparametric-Laplacian generator 방법에 의하여 자동으로 mesh를 생성하는 기능을 갖고 있는데 컴퓨터내에서 최소한의 band width를 갖도록 처리하고 있다. mesh의 생성은 직선형 및 arc형에 대하여 가능하며 이들을 조합처리 하거나 별도의 mesh 좌표에 대한 입력도 가능하도록 되어 있다.

(2) 主處理 과정 (Analysis Processing)

주 처리 과정은 부프로그램 GLOBAL, BOUND, NEWRAP, JACOB등에 의하여 수행되는데 JACOB은 임의

의 형상을 가진 local element를 처리하여 Jacobian을 구하는 과정이고 GLOBAL는 local matrix를 global matrix로 바꾸며 NEWRAP 과정에서는 nonsymmetric matrix를 풀기 위하여 Gauss elimination을 적용하고 있는데 이 때의 해석 기법은 non-pivoting 과 all-core routine 방법을 이용하였다. 계산결과치는 VOLUME에 의하여 내부적인 체적의 보존을 검산하며 DATASV에 의하여 계산된 결과가 저장되고 후처리과정에 이용되도록 하였다.

(3) 後處理 과정 (Post-Processing)

후처리과정은 2차원 유한요소모형에 의한 계산결과를 graphic으로 처리하기 위하여 개발되었다. 이 프로그램은 최대 1000개의 element를 처리할수 있으며 PC 에서 수행될 수 있도록 하였고 프로그램의 실행을 위한 그래픽카드는 VGA와 HGC의 두가지이고 출력은 화면과 레이저 프린터에 의하여 얻을수 있다. 프로그램은 자료의 입력, 선택사항의 입력, 화면보기, 화면확대, 프린터출력으로 구성된다. 자료입력은 정해진 format에 의해서 data를 입력하고, 선택사항 입력은 그림을 그리는데 있어서의 각종 option을 선택한다. 화면보기는 입력된 자료와 option에 의해서 화면상에 그림을 그리며, 화면확대는 zoom 기능으로서 확대하여 보고 싶은 곳이 있는 경우 그곳을 확대하여 보며, 프린터 출력은 화면에 그려진 그림을 레이저 프린터로 출력한다.

4. 유한요소모형 RIV-FEM2 의 적용

본 연구에서의 수학적 모형의 일반적인 거동을 시험하기 위하여 다양한 수치실험이 실시되었다. 2차원 모형을 1차원적으로 해석한 surge와 dam-break 문제에 적용하여 해석적인 해와 비교하였는데 본 연구에서의 해석기법이 안정도 및 surge 선단부 등의 추적에 있어 만족할만한 결과를 얻을수 있었다. 그림 1과 같이 수평한 직사각형 수로에 급격한 축소단면을 하천제방 또는 댐 파괴의 경우로 보고 하류단을 폐쇄단으로 처리해서 제내지에서의 수위 및 유속분포 상황을 시뮬레이션하고자 하였다. 이 수치실험의 목적은 유속상의 급격한 축소와 확대에 기인하게 되는 비선형항의 영향이 증대되고 서로 다른 상하류단 경계조건이 존재하는 비교적 복잡한 흐름 상황에서 모형의 계산수행 능력을 평가하고자 함에 있다. 초기조건은 유속이 zero이고 수위를 1m로 가정하였고 상류개방단에서 $1 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ 의 유량이 연속적으로 유입되도록 하였다. 평균적인 Courant 수는 1.0 이었으며 그림 1 에 서와 같이 안정되고 대칭적인 해석결과를 얻을 수 있었다. 초기상태에서는 흐름은 축소부를 통과하기 전에 수축되었고, 확대부로 유입될때 확산 되었으며 이후에는 와류영역이 형성되었다. 시간경과에 따라 주류영역의 형성이 중앙부에 집중되고 있으며 와류영역도 뚜렷하게 나타났는데 이는 유사한 경우에 대하여 Garcia 등이 유한차분기법에 의해 계산한 결과치와 그 속도벡터등의 경향이 잘 일치되고 있었다.

실제하천에서의 복잡한 흐름에 관한 수치모형화 과정에 있어서는 대상시스템의 기하학적 지형학적 특성을 반영하여 수치해를 일관성있게 처리하여야 한다. 본 연구에서 사용한 유한요소 모형

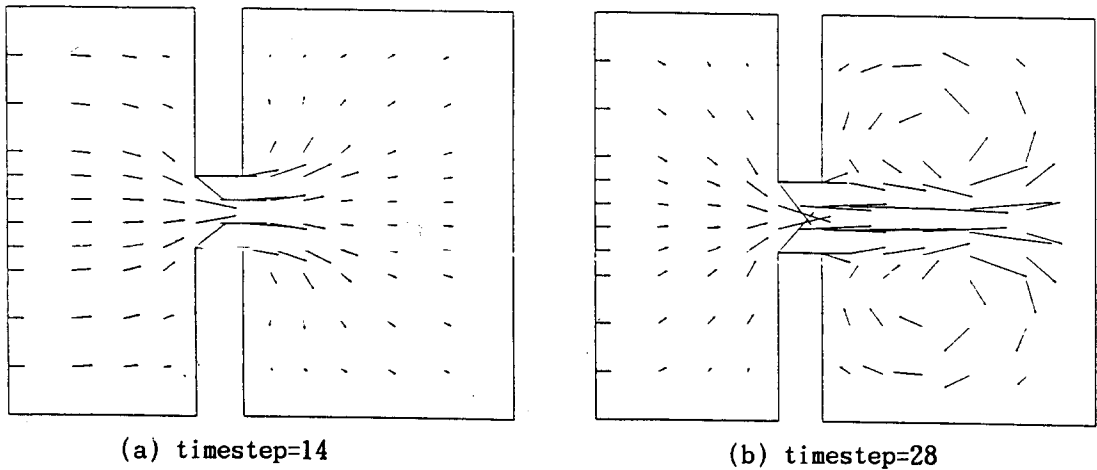


그림 1. 대칭적인 축소부를 갖는 수로

은 해석적 및 수치계산적으로 최적의 계산 결과를 얻을 수 있는 수치해석 기법으로 증명되었고, 전처리 및 후처리과정을 효율적으로 다룰수 있도록 package화된 프로그램으로 제시하였다. 그림 2는 미국 미시간주에 위치한 휴런강에 대한 하천자료 및 상하류단 경계조건 자료를 구하고 본 연구에서의 RIV-FEM2에 적용하여 본 모형의 적용성을 증명하고자 하였다. 계산결과 각 시간대예의 그림 3과 같이 유속벡터와 등수심선을 얻을수 있었던 바, 수위 및 x,y 방향의 유속벡터를 구할수 있었고 2시간 이후에는 흐름의 유속장에 있어 큰 변화가 없었고, 이 경우에는 정상상태로 도달한것으로 판단되었다. 이 시간대에서 단면의 폭이 비교적 좁은 상류단 부근에서는 유속이 대단히 크게 나타났고 좌측상단부의 저류영역에서는 유속이 거의 zero 상태로 계산되었으며 섬둘레에서도 유속벡터 및 수위변화가 합리적으로 계산되었다. 특히, 정상상태에서 유입되는 유량과 유출되는 유량의 오차가 2.0% 미만으로 나타나 mass flux가 잘 보존되고 있었는데 이는 계산과정에 포함된 수치근사화와 discretization 오차등을 고려한다면 매우 양호한 결과로 판단되었다. 앞으로, 더욱 다양한 상황에서의 하천지형자료와 실측자료를 기초로 하고, 본 연구모형의 적용 및 검정을 통하여 하천에서의 각종 유동해석을 실시할수 있도록 계속 발전시켜 나아가야 할것으로 사료되었다.

5. 결 론

(1) 2차원 shallow water식을 기본 방정식으로 하고 이를 불연속 보간함수와 upwinding weighting을 도입한 petrov-Galerkin법에 의하여 해석하는 유한요소모형 RIV-FEM2를 개발하였다.

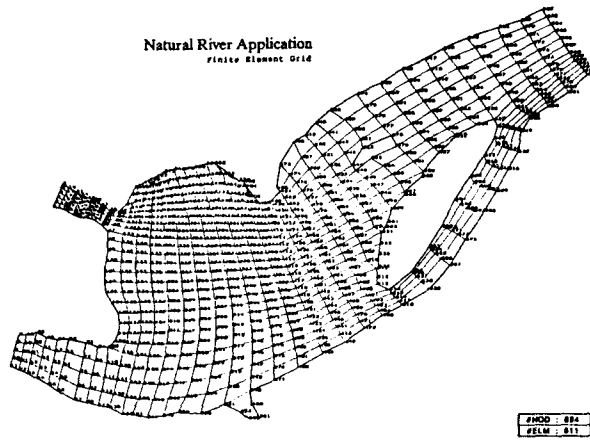


그림 2. 실제하천에 대한 유한요소망

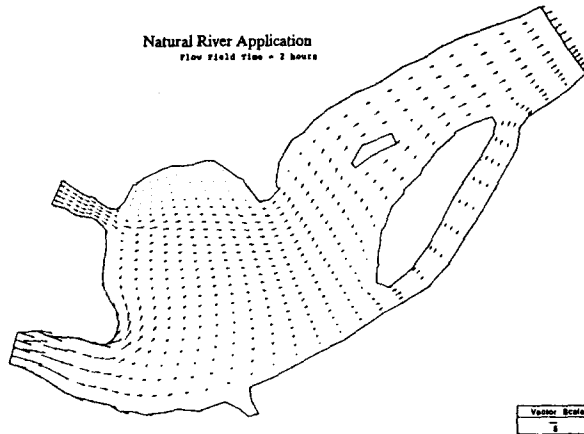


그림 3. 실제하천에 대한 유속분포도

RIV-FEM2는 전처리, 주처리 및 후처리 과정으로 구성되어 있다.

(2) 主處理과정에서는 Newton-Raphson method에 의하여 sparse한 nonsymmetric matrix를 풀기 위하여 Gauss 소거법을 적용한바 이 때의 해석기법으로는 non-pivoting과 all-core routine 방법을 적용함으로써 효율적인 알고리즘을 제시하였다. 後處理과정에서는 계산결과를 graphics으로 처리하기 위하여 개발되었는데 PC상에서 최대 1000개의 element에 대하여 grid 형상, 속도 vector 및 등수심선을 도시할수 있으며 zoom 기능도 갖고 있어 세부적인 도시도 가능하도록 구성하였다.

(3) 2차원 가상하도에 대한 수치실험 결과 본 모형은 다양한 상황에 대하여 유속분포, 수면형등에서 수렴성과 안정성이 뛰어난 것으로 나타났다. 불규칙한 자연지형에서의 경계조건과 다양한 상하류단 경계조건을 가진 실제하천에 대하여 본 모형을 적용한 결과 일정시간 도달이후에 정상 상태

의 흐름을 얻을수 있었으며, 본 모형은 다양한 유동조건에 대하여 안정하고 정확한 계산을 수행함으로써 본 모형의 활용성을 입증하였다.

참고 문헌

- 1) Garcia, R. and Kahawita, R. A., "Numerical Solution of the St. Venant Equations with the MacCormack Finite Difference Scheme," Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 1986, pp. 259-274
- 2) Gray, W. G., "Do Finite Element Models Simulate Surface Flow?", Finite Elements in Water Resources III, (eds. Wang, S.Y and others), Univ. of Mississippi Press, 1980, pp. 1. 122-1. 136.
- 3) Gray, W. G., Kinmark, I., QUIET : A Quadratic Isoparametric Explicit in Time Finite Element Model for Tidal Circulation, Princeton University, 1982, pp. 1-106.
- 4) Katopodes, N. D., "Two-Dimensional Surge and Shocks in Open Channels", J. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, No. HY6, 1984, pp. 794-812.
- 5) Kawahara, M., and Umetsu, T., " Finite Element Method for Moving Boundary Problems in River Flow", Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 1986, pp. 365-386
- 6) Lee, J. K., and Froehlich, D. C., Review of Literature on the Finite Element Solution of the Equations of Two-Dimensional Flow in the Horizontal Plane, U. S. Geological Survey Circular 1009, 1986, pp. 1-65.
- 7) Raymond, W. H., and Garder, A., "Selective Damping in Galerkin Method for Solving Wave Problems with Variable Grids", Monthly Weather Review, Vol. 104, 1976, pp. 1583-1590.