平行線形貯水池模型의 一般化에 關한 硏究

(A STUDY OF GENERAL FORMULAS FOR THE PARALLEL LINEAR RESERVOIRS MODEL)

徐 榮 濟*

1. 序論

降雨가 河川에서 流出의 形態로 變換되어 흘러가는 過程은 매우 複雜하므로 이와 같은現象을 定量的으로 分析하기 위하여 여러가지의 降雨-流出模型이 各國에서 開發되어 왔다. 이웃나라 日本의 Sugawara(菅原)(1956)가 提案한 Tank-model은 降雨-流出資料만을 利用하여 모델링하는 過程에서 模型의 非線形性때문에 多年間의 숙련이 必要하므로 韓國에서 實用化하기에는 多少 어려운 점이 있었다[4]. 그리고 美國에서 開發된 實驗模型(USDHAL, SSARR, Stanford)等도 流域內의 物理的 媒介變數가 降雨-流出資料와 함께 많이 要求되는 것이 또한 短點이다. 따라서 短期洪水時 降雨-流出事象을 再現하기 위해서는 Nash가 提案한 階段式 線形貯水池模型(Cascade linear reservoirs model: Nash-model)이 槪念的인 模型인 동시에 數學的으로 誘導가 可能한 側面에서 널리 利用되고 있다[5]. 本 硏究는 線形貯水池 模型을 平行式으로 나열하여 降雨-流出反應을 流出量의 S-曲線으로 單純하게 誘導할 수 있는 數式을 一般化하였으며 모델의 媒介變數決定은 Rosenbrock의 Hill-climb[1][3] 方法을 利用하여 最適化 하였다. 그리고 和蘭에서 開發된 複合線形貯水池 模型의 一種인 J-model[2]을 함께 紹介하여 우리나라의 降雨-流出事象에 어떻게 反應하는지도 살펴보았다.

2. 模型의 瞬間反應函數(Instantaneous Response Function)

線形貯水池 模型은 하나의 集水流域을 貯水池로 假想하여 流出量을 推定하는 方法으로 貯水量(S)이 流出量(Q)에 比例한다고 假定하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = K \cdot Q \qquad (1)$$

여기서 K = 貯溜常數이며 時間에 대한 貯水池流入量 I(t)과 流出量 Q(t)의 變化에 따라 連續方程式을 適用하면

* 農漁村振興公社 技術支援部 課長

$$I - Q = \frac{ds}{dt} \tag{2}$$

이 되고 流入量을 無視한 水文曲線의 減水部(Recession Curve)만 생각하면 I=0이므로

$$\frac{ds}{dt} = -Q \tag{3}$$

이 된다. 여기서 (1)式에 (2)式의 微分項을, T = 0일때 Q = Q_o를 代入하여 풀면

$$Q_t = Q_o \cdot e^{-k/t} \tag{4}$$

이 되고 t = 0일때 線形貯水池 單位流出總量 S(0) = 1로 두면 $Q_o = 1/k$이 되어 瞬間單位圖의 反應函數(Responsible function of Instantaneous unit hydrograph)는

$$IUH = u(0, t) = Q(t) = \frac{1}{K} \cdot e^{-t/k} \tag{5}$$

이 된다.

3. 平行線形貯水池(Parallel Linear Reservoir:PLR)模型

fig.-1과 같이 降雨-流出反應의 概念的인 模型을 하나의 線形貯水池(Single Linear Reservoir: SLR)로 생각하고 線形시스템의 代表函數인 回旋積分方程式(Convolution Integral)을 Fig.-2의 S-曲線에 適用하면

$$S(t) = \frac{P}{D} \cdot \int_0^t u \cdot (0, t) \cdot dt0 \tag{6}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 單位 降雨強度 P = 1로 두고 瞬間單位圖의 反應函數,

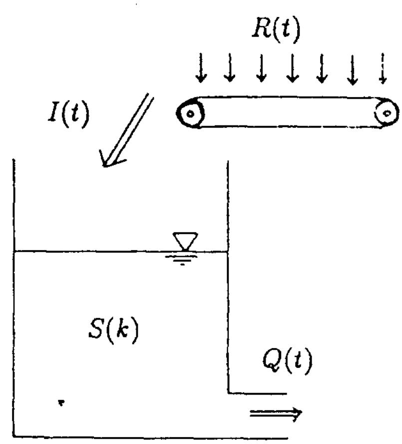


Fig.-1 降雨-流出模型

$IUH = u(0, t) = \frac{1}{K} \cdot e^{-t/K}$ 을 (6)式에 代入하면

$$S(t) = \frac{1}{D} \cdot \int_0^t \frac{1}{K} \cdot e^{-t/K} \cdot dt = \frac{1}{D} \cdot (1 - e^{-t/K}) \tag{7}$$

이 되며 D 時間만큼 遲滯시킨 S(t-D)曲線의 函數式은

$$S(t - D) = \frac{1}{D} \cdot (1 - e^{-(t-D)/K}) \quad ; \quad t \geq D \tag{8}$$

이 된다

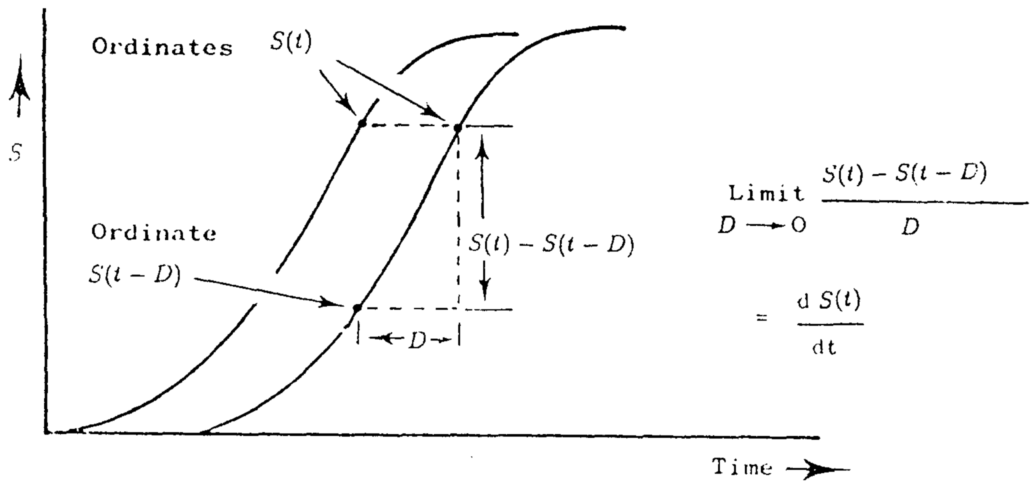


Fig.-2 S - 曲線

따라서 單位圖의 槪念 u(D, t)는

$$u(D,t) = S(t) - S(t-D)$$

$$= \frac{1}{D}\cdot(1 - e^{-t/K}) - \frac{1}{D}\cdot(1 - e^{-(t-D)/K})$$

$$= \frac{1}{D}\cdot e^{-t/K}\cdot(e^{D/K} - 1) \qquad ; \quad t \geqq D \qquad (9)$$

으로 나타낼 수 있다. 上記式에서 K 値는 時間의 函數로 單位時間에 대한 D = 1을 適用하면

0 ＜ t ≦ 1 의 조건에서

$$u(D,t) = S(t) = 1 - e^{-t/K} \qquad (10)$$

t ＞ 1 일 경우

$$u(D,t) = e^{-t/K}\cdot(e^{1/K} - 1)^2 \qquad (11)$$

이 된다. 그리고 (10), (11)식은 單一 線形貯水池(SLR) 模型의 單位圖 縱距를 구하기 위한 一般式으로 誘導하면

t = 1 일 경우는 (10)式으로 부터

$$DUH(SLR) = {}_0\int_{t-1}^{t} u(D,t)\cdot dt$$

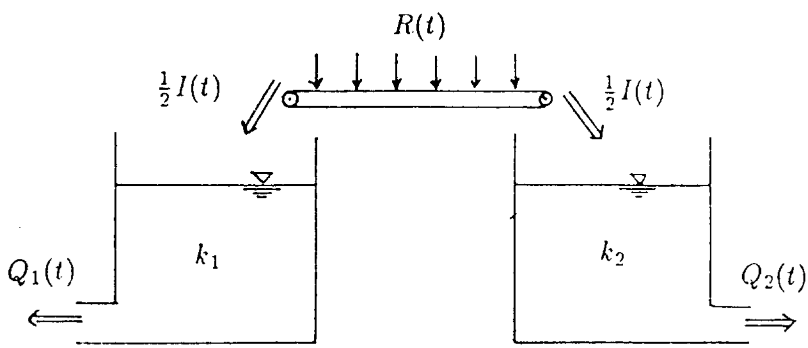
$$= \int_{t-1}^{t} (1 - e^{-t/K}) \cdot dt \quad = k \cdot e^{-t/K} - (K-1) \tag{12}$$

그리고 t = 2, 3, 4, ···일 경우

$$DUH(SLR) = \int_{t-1}^{t} e^{-t/k} \cdot (e^{-1/k} - 1) \cdot dt = k \cdot e^{-t/k} \cdot (e^{1/k} - 1)^2 \tag{13}$$

또 이를 Fig.-3 과 같이 두개의 平衡貯水池模型에 대한 一般式으로 나타내면

$$\left.\begin{aligned} DUH(2\text{-}PLR) &= \frac{1}{2} \cdot [K_1 \cdot e^{-t/K1} - (K_1-1)] + \frac{1}{2} \cdot [K_2 \cdot e^{-t/K2} - (K_2-1)] \quad t=1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot e^{-t/K1} \cdot (e^{1/K1}-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot e^{-t/K2} \cdot (e^{-t/K2}-1)^2 \quad t=2,3,\cdot \end{aligned}\right\} \tag{14}$$



$$Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$$

Fig.-3 Conceptual 2-PLR model

이 되며 N個의 平行線形貯水池(Fig.-4)를 構築할 경우 模型의 一般式은

$$\left.\begin{aligned} DUH(N\text{-}PLR) &= \sum_{i=1}^{N} \cdot \frac{1}{N} \cdot [K_i \cdot e^{-t/Ki} - (K_i-1)] \quad ; \quad t=1 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \cdot \frac{1}{N} \cdot [K_i \cdot e^{-t/Ki} \cdot (e^{1/Ki}-1)^2] \quad ; \quad t=2,3,4\cdots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

이 된다. 또 2個의 平行線形貯水池 模型에서 流入되는 降雨의 形態가 等分布되지 않고 α만큼 配分되는 경우, 즉 分布函數 α 를 고려한 2-PLR$_u$ (Unequal distributed Rainfall of 2-PLR) 모형을 생각하면 (Fig.-5)

$$\left.\begin{aligned} DUH(2\text{-}PLR_u) &= (\alpha) \cdot [K_1 \cdot e^{-t/K1} - (K_1-1)] + (1-\alpha) \cdot [K_2 \cdot e^{-t/K} - (K_2-1)] \quad t=1 \\ &= (\alpha) \cdot K_1 \cdot e^{-t/K1} \cdot (e^{1/K1}-1)^2 + (1-\alpha) \cdot K_2 \cdot e^{-t/K2} \cdot (e^{-t/K2}-1)^2 \quad t=2,3,\cdot \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

으로 誘導할 수 있다.

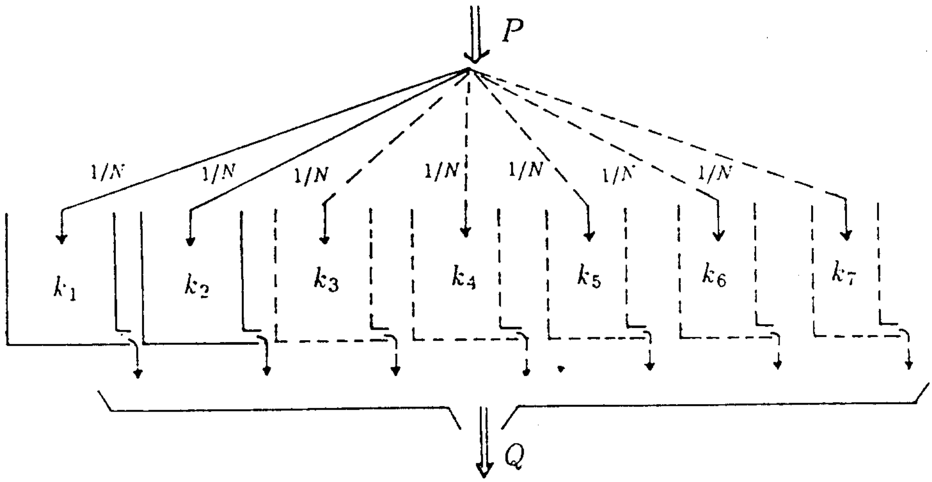


Fig.-4 N-parallel linear reservoirs model

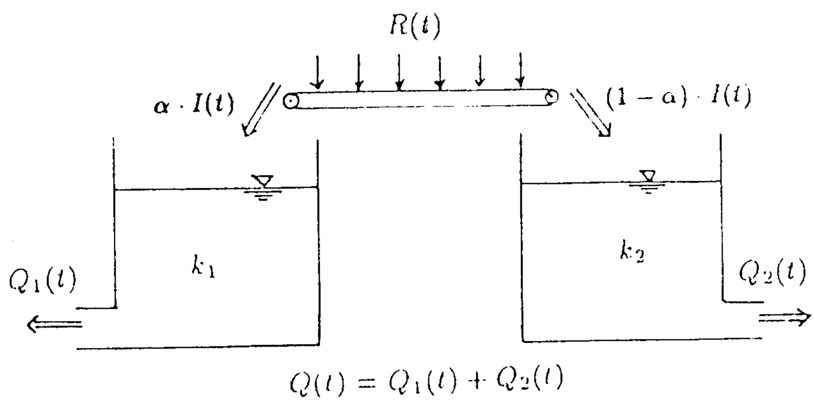


Fig.-5 Conceptual 2-PLR$_u$ model

4. J-model

J-model은 和蘭의 干拓地에서 等間隔으로 分割된 排水路의 流出量을 算定하기 위하여 Krayenhoff Van de Leur에 의해 誘導된 模型이다(Fig.-6).

이 模型에서 表現된 瞬間單位圖 IUH는 (17)式으로 나타낼 수 있다.

$$u(0, t) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{j} \cdot \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{n=\infty} e^{(-n^2 \cdot t/j)} \tag{17}$$

여기서 j는 貯溜常數이며 n은 貯水池의 個數이다. 따라서 (17)式을 다시 쓰면

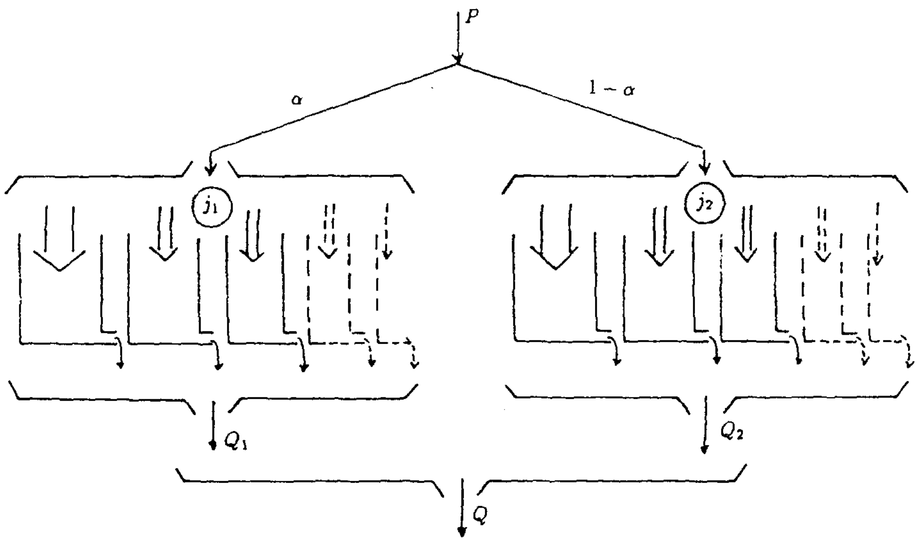


Fig.-6 J - model

$$u(0,t) = \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{j}\cdot e^{-t/K} + \frac{1}{9}\cdot\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{9}{j}\cdot e^{-9t/j} + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{25}{j}\cdot e^{-25t/j} + \cdot \tag{18}$$

여기서 $K_n = \frac{j}{n^2}$, $d_n = \frac{8}{\pi^2 \cdot n^2}$ 을 (18)式에 代入하면

$$u(0,t) = \frac{\alpha_1}{K_1}\cdot e^{-t/K1} + \frac{\alpha_3}{K_3}\cdot e^{-t/K3} + \frac{\alpha_5}{K_5}\cdot e^{-t/K5} + \cdots\cdots \tag{19}$$

으로 나타낼 수 있다 여기서 單位流出總量 P = 1을 適用하면

$$P = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \cdot \alpha_n = \frac{8}{\pi^2}\cdot\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = 1 \tag{20}$$

이 되고 Fig.-2의 S-曲線과 回旋積分方程式을 利用하면 (21)式이 된다

$$S(t) = \int_0^t \frac{1}{D}\cdot u(0, t-\tau)\cdot dt \tag{21}$$

여기서 瞬間單位圖의 反應函數 (17)式을 (21)式에 適用하면

$$S(t) = \frac{1}{D}\cdot\frac{8}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}(1 - e^{-n^2\cdot t/J}) \tag{22}$$

이 되고 여기서 線形貯水池模型과 같이 S-曲線을 利用하여 誘導하면
u(D, t) = S(t) - S(t-D)로서 (23)식이 된다.

$$= \frac{1}{D} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (e^{n^2 \cdot D/j} - 1) \cdot e^{-n^2 \cdot t/j} \tag{23}$$

여기서 j를 時間의 函數로 나타내면

$$DUH(1) = 1 - j \cdot \frac{\pi^2}{12} - j \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^2/j} \tag{24}$$

i 〉1 이면

$$DUH(i) = j \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot (e^{n^2/j} - 1)^2 \cdot e^{-n^2 \cdot i/j} \tag{25}$$

로 誘導할 수 있다. 今回 分析에 利用된 實際 J-model은 2가지 形態의 分散된 水文曲線으로 構成되어 있으며 降雨 P가 앞서 誘導된 2-PLR$_u$ 模型과 같이 分布函數 α 로서 j_1과 j_2의 總體的模型에 分散된다고 假定하여 誘導된 것을 利用하였다.

5. 검토 및 결과

論山川 上流部의 塔亭池 流域에서 觀測된 降雨-流出事象을 利用하여 上記模型의 適用性을 檢討하

表 -1. Optimization results of Modelling Parameters

DATE	Models	Tr *1)	Parameters		Qp(mm)		R M S	F	DUH (cm)
			Starting $K_1 \cdots K_5$	Ending $K_1 \cdots K_5$	Obs.	Com.			
'84. 5.13 - 5.15	SLR	6	13.5	11.94	1.703	1.690	0.002565	0.2882	0.9904
	2-PLR	6	13.5,34.5	8.32,17.84	"	1.711	0.002375	0.2471	0.9771
	3-PLR	6	13.5,34.5,34.5	16.14,6.83,16.13	"	1.720	0.002318	0.2354	0.9785
	4-PLR	6	13.5,······	15.34,15.35,15.34,5.8	"	1.726	0.002279	0.2275	0.9798
	5-PLR	6	13.5,······	14.85,14.86,14.86,14.85,5.09	"	1.730	0.002249	0.2215	0.9809
	J-model	7	13.5,34.5, α=0.5	15.36,15.33, α=0.293	"	2.052	0.003189	0.4495	0.9766
	2-PLR$_u$	6	13.5,34.5, α=0.5	7.93,24.17, α=0.542	"	1.741	0.002159	0.2042	0.9997

*1) = Channel delay time

表 -2. Results of Calibration

Date	Models	OBS$_{SUM}$ (mm)	CAL$_{SUM}$ (mm)	F	R M S
'84.7.2	SLR	174.28	170.13	73.73	0.0035480
- 7.11	2-PLR	"	168.26	72.91	0.0035046
	3-PLR	"	168.58	72.43	0.0034931
	4-PLR	"	168.26	71.86	0.0034794
	5-PLR	"	169.13	71.87	0.0034796
	J-model	"	172.24	74.86	0.0035512
	2-PLR$_u$	"	168.11	64.27	0.0032904

였다. 利用된 模型들은 J-model, SLR, 2-PLR, 3-PLR, 4-PLR, 5-PLR, 2-PLR$_u$ 로서 瞬間單位圖와 各種 모델이 가지는 媒介變數를 誘導하여 長期複合降雨의 事象에 檢定(Calibration)하였다. 그 結果는 表-1과 表-2에 나타나 있으며 結論的으로 J-model을 除外한 線形貯水池模型의 適用與否는 韓國河川의 上流部 洪水流出에 매우 適合한 것으로 나타났다.

參考文獻

〔1〕 F.A.O., 1973, Mathematical models in Hydrology, Irrigation and Drainage Paper, No.19, pp.252-260.

〔2〕 Krayenhoff Van de Leur,D.A.,1973, Rainfall-Runoff relations and computational models In:Drainage principles and application, Vol.2, ILRI, Wageningen, The Netherlands.

〔3〕 Rosenbrock, H.H., 1960, An Automatic Method of Finding the Greatest of Least value of a Function, Computer J. 3, pp.175-184.

〔4〕 徐榮濤, 1983, Tank-model에 의한 流出解析, 建國大學校 碩士學位論文, 未發表.

〔5〕 徐榮濤, 1987, 線形貯水池模型의 媒介變數硏究, 韓國水文學會紙, Vol.20, No.3, pp.229-235.