여울의 가락

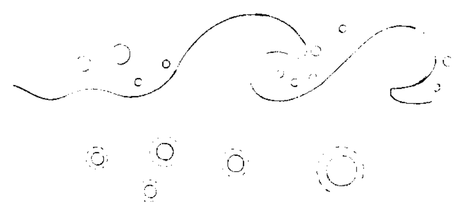
韓國科學技術院 教授 李炳昊

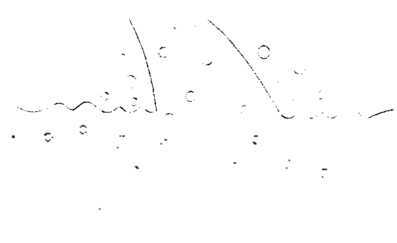
Musical Sounds of Running Water

Byung Ho Lee (Emeritus)
The Korea Advanced Institute of Science and Technology

五月의 初여름밤, 江가의 모래沙場, 산들거리는 薰風에 머리를 식히면서 쏟아지는 푸른 별빛을 바라보며, 寂寞한 森羅萬象의 정경을 吟味하노라면, 여울(Ford)에서 들리는 그윽한 神奇의 가락은 우리의 心襟을 울린다.

宇宙創造와 大自然의 營爲의 그 神秘의 가락은, 흐르는 江물 속에 들어있는 氣泡들이, 그들 自身의 固有振動數로 共振하여 Monopole 로 放出하는하는 소리들로 合成된 音樂이다. 여기서는 大自然의 音樂 (The music of the Sphere)의 하나인 여울의 가락의 根本 Mechanism 을 밝히고자 한다.





I. 물속의 Gas Bubbles 에서 내는 소리

대개 Gas bubbles 에서 나는 소리는, (1) 물속에서 bubble 自身의 固有振動數로 振動하여 울리는 것과, (2) bubble 이 들어있는 물을 hydrodynamic pressure 가 變動하는 물속에 부을 때, 어떤 bubble 은 그 固有振動으로 울리는 것과, 또 (3) 두 개 이상의 bubble 들이 합쳐서 큰 bubble 로 되거나, 하나의 bubble 이 두 세개의 작은 bubble 로 갈라지면서 진동하여 울려서 나온다. 이들은 主로 radially uniform 한 monopole sound source 로 작용한다.

II. Velocity Potential

中心對稱의 경우에는 velocity potential ϕ 는 다음의 Wave eq. 을 만족한다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c_o^2\nabla^2\phi = c_o^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \qquad (1)$$

이것은

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} = c_o^2\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} \tag{2}$$

으로도 쓸 수 있다. 이것의 解는 잘 알려진 바와 같이

$$\phi(r,t) = \frac{f(c_o t - r) + g(c_o t + r)}{r} \tag{3}$$

여기서 f와 g는 임의의 함수인데, 이들은 경계조건으로부터 결정할 수 있다. 右邊 첫 항은 일정속도 c_o로 밖으로 나가는 球面波, 둘째항은 밖에서 안으로 들어오는 球面波이다.

지금 radially pulsating 하면서 밖으로 나가는 球面波를 생각해 보자.

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c_o}\right) \tag{4}$$

여기서 적절한 경계조건은 구의 표면에서 물의 속도 u_r과 bubble 표면의 속도 U(t)가 같다는 것이다. 왜냐하면 물과 bubble은 항상 붙어있기 때문이다. 그런데 물의 속도는 오직 radial component 만 있어

$$u_r = -\frac{1}{rc_o}f'\left(t - \frac{r}{c_o}\right) - \frac{1}{r^2}f\left(t - \frac{r}{c_o}\right) \tag{5}$$

이다. 이를 위의 경계조건에 적용하면

$$-\frac{1}{ac_o}f'\left(t - \frac{a}{c_o}\right) - \frac{1}{a^2}f\left(t - \frac{a}{c_o}\right) = U(t)$$

또는

$$f'\left(t - \frac{a}{c_o}\right) + \frac{c_o}{a}f\left(t - \frac{a}{c_o}\right) = -ac_oU(t). \tag{6}$$

이 미분방정식을 풀어 $f\left(t - \frac{r}{c_o}\right)$를 알면, 식(4)에 代入하여 velocity potential을 얻는다. 지금 $\xi = t - a/c_o$라 쓰면 식(6)은

$$f'(\xi) + \frac{c_o}{a}f(\xi) = -ac_oU\left(\xi + \frac{a}{c_o}\right) \tag{7}$$

로 되고 이의 해는

$$f(\xi) = -ac_oe^{-c_o\xi/a}\int_{-\infty}^{\xi} e^{c_o\xi'/a}U\left(\xi' + \frac{a}{c_o}\right)d\xi' .$$

이다. 이제 변수변환 $\tau = \xi' + a/c_o$을 하면, 윗 식은

$$f(\xi) = -ac_oe^{-\frac{c_o}{a}\left(\xi + \frac{a}{c_o}\right)}\int_{-\infty}^{\xi + a/c_o} e^{c_o\tau/a}U(\tau)d\tau ,$$

$$f\left(t - \frac{r}{c_o}\right) = -ac_oe^{-\frac{c_o}{a}\left(t - \frac{r-a}{c_o}\right)}\int_{-\infty}^{t-(r-a)/c_o} e^{c_o\tau/a}U(\tau)d\tau . \tag{8}$$

로 쓰여지고, Harmonic pulsation $U(t) = U_oe^{-i\omega t}$의 경우에는 velocity potential은 식(4)와 (8)로부터

$$\phi(r,t) = -\frac{ac_oU_o}{r}e^{-\frac{c_o}{a}\left(t - \frac{r-a}{c_o}\right)}\int_{-\infty}^{t-(r-a)/c_o} e^{\frac{c_o}{a}\left(1 - i\frac{\omega a}{c_o}\right)\tau}d\tau$$

$$= -\frac{a^2U_o}{r}\frac{e^{-ikc_o\left(t - \frac{r-a}{c_o}\right)} - e^{-\frac{c_o}{a}\left(t - \frac{r-a}{c_o}\right)}}{1 - ika} \quad (\omega/c_o = k)$$

으로 얻어진다. 이는 steady solution (우변 제1항)과 transient solution (우변 제2항)으로 되어있어, 보통 steady solution 에만 興味가 있다. 왜냐하면 transient solution은 시간이 지나가면 사라지기 때문이다. 그러므로

$$\phi(r,t) = -\frac{a^2U_o}{r}\frac{e^{-ikc_o\left(t - \frac{r-a}{c_o}\right)}}{1 - ika} = -\frac{a^2U_o}{r}\frac{e^{i[k(r-a)-\omega t]}}{1 - ika} \tag{9}$$

U_o를 volume flow rate Q_o로 表記하면, $U_o = \frac{Q_o}{4\pi a^2}$. 따라서 우리의 monochromatic velocity potential은

$$\phi(r,t) = -\frac{Q_o}{4\pi r}\frac{e^{i[k(r-a)-\omega t]}}{1 - ika} \tag{10}$$

로 쓸 수 있다. 이로부터 음압은, $p' = i\rho_o\omega\phi$인 관계로부터 얻어진다.

III. Added Mass M_o

Bubble sphere에 作用하는 fluid force는 radial 이며, 그 크기는

$$F = -4\pi a^2 p'(a,t) = -4\pi a^2\rho_o i\omega\phi(a,t)$$

$$= 4\pi\rho_o a^3\frac{1}{1 - ika}i\omega U_oe^{-i\omega t}$$

$$= 4\pi\rho_o a^3 \frac{1}{1-ika} i\omega U \qquad (U = U_o e^{-i\omega t}) \qquad (11)$$

또는

$$F = -4\pi\rho_o a^3 \omega \frac{ka}{1+(ka)^2} U - 4\pi\rho_o a^3 \frac{1}{1+(ka)^2} \dot{U} \qquad (12)$$

Body 가 fluid 에 미치는 force 는 body force 의 negative 이다. 따라서

$$F_b = 4\pi\rho_o a^3 \omega \frac{ka}{1+(ka)^2} U + 4\pi\rho_o a^3 \frac{1}{1+(ka)^2} \dot{U} \qquad (13)$$

우변 첫 항은 force 의 dissipative part, 둘째 항은 inert part 라 하며 순간 가속도에 비례하고 이것은 표면속도와 90° 의 위상차를 갖는다. 따라서 에너지 소모는 가져오지 않는다. 이를

$$-G = \frac{4}{3}\pi\rho_o a^3 \frac{3}{1+(ka)^2} \dot{U} \qquad (14)$$

라 쓰면, surface motion 에 반대방향으로 작용하므로 이를 또한 反力이라고도 한다. 식(14)로부터 알 수 있듯이 이 反力은 유체의 mass $\frac{4}{3}\pi\rho_o a^3$에 비례한다. 그래서 식(14)의 가속도 $\dot{U}$의 계수를, 구와 함께 진동하는 물의 mass를 표현하는 것이라고 생각하는 것이 편리하다. 따라서

$$M_o = \rho_o V_s \frac{3}{1+(ka)^2} = \frac{4\pi a^3 \rho_o}{1+(ka)^2} \qquad (15)$$

이것은 bubble이 점령하는 물의 mass $\rho_o V_s$에 $3/[1+(ka)^2]$倍한 것이다. 이것이 바로 added mass이다. ka 가 0 으로 갈 때에는 물의 mass 의 3倍로 된다. 1933 년 Minnaert 가 그렇게 잡고, mass-spring-damper system 으로 약산을 한 바가 있다.

IV. Bubble 의 Vibration (Monopoles)

지금 bubble 표면의 반경방향의 순간변위를 $\varepsilon(t)$ 라 하면 bubble의 운동방정식은

$$M_o \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 4\pi a^2 (p_b - p_o) \qquad (16)$$

라 쓸 수 있고 여기서 p_o, p_b 는 각각 bubble 밖의 압력 및 bubble안의 압력이다. 평형상태에서는 이 압력은 서로 같다. Bubble의 평형상태에서의 체적은 $V_o = \frac{4}{3}\pi a^3$ 이고, 순간체적은 $V = \frac{4}{3}(a+\varepsilon)^3$ 이다. Bubble 속의 기체가 perfect gas이고, adiabatic 과정으로 진동하면

$$p_b = p_o (V_o/V)^\gamma \approx p_o\left(1 - \frac{3\gamma\varepsilon}{a}\right), \quad p_b - p_o = -\frac{3\gamma p_o}{a}\varepsilon \quad (17)$$

이다. 식(17)을 식(16)에 대입하면

$$M_o \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 12\pi a\gamma p_o \varepsilon = 0$$

이고, 여기에서 식(15)를 이용하면 운동방정식은

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{3\gamma p_o}{\rho_o a^2}[1+(ka)^2]\varepsilon = 0 \qquad (18)$$

이 된다. 그러므로 bubble의 고유진동수 ω_o 는

$$\omega_o^2 = \frac{3\gamma p_o}{\rho_o a^2}[1+(ka)^2] = \frac{c_g^2}{a^2}\frac{3\rho_b}{\rho_o}[1+(ka)^2]$$

$$\omega_o = \frac{c_g}{a}\left(\frac{3\rho_b}{\rho_o}[1+(ka)^2]\right)^{1/2}, \quad \left(c_g^2 = \frac{\gamma p_o}{\rho_b}\right) \qquad (19)$$

이다. 일반적으로 ka 의 값이 작을 때는 고유진동수는

$$\omega_o = \frac{c_g}{a}\left(\frac{3\rho_b}{\rho_o}\right)^{1/2} \qquad (20)$$

으로 쓸 수 있다.

V. 여울의 가락과 Bubble 의 크기

원래 물속에서 bubble 이 받는 disturbance 는 작아서, bubble의 고유진동수와 같은 주기의 disturbance 를 받는 bubble만이 resonance vibration을 일으켜서 소리를 내게 될 것이다. 식(20)으로부터

$$a = \frac{c_g}{2\pi f}\left(\frac{3\rho_b}{\rho_o}\right)^{1/2}$$

여기서 $c_g = 3.43\times10^5$ mm/sec, $\rho_b = 1.21\times10^{-3}$ gr/cm^3,

$\rho_o = 1\ gr/cm^3$인 값을 이용하면, bubble 반경과 주파수의 관계는

$$a = \frac{3.2890262}{f} \times 10^3\ (mm) \qquad (21)$$

으로 주어진다. 다음 표에 Equitempered music scale 과 각 music tone 을 낼 때 필요한 bubble 의 반경을 나타내었다.

이와 같이 해서 여울의 가락은 가지가지 크기의 氣泡가 그들의 고유진동을 통하여 울리는 소리들이 합성되어, 奇奇妙妙한 "The music of the Sphere" 를 이루는 것이다. 結局 音樂은 소리의 高低와 長短이 調和로운 rhythm을 타고 配合되는 것 일진대, 크고 작은 bubble들이 固有振動數로 흔들려서 音의 高低가 일어나고, 振動하는 氣泡가 길게 혹은 짧게 消滅되는데에 따라 長短이 생기며 흐르는 물결과 rhythm을 이루어서 "The music of the Sphere" (天上의 音樂) 을 형성하게 된다. 이 여울의 가락에 심취해서 듣고 있노라면 태초의 적막 속에서 천상의 음악을 듣는 희열을 느끼는 듯, 형언할 수 없는 느낌을 받는다. 다시한번 신의 조화와 신비에 통하는 거룩한 순간이다. 이리하여 인간은 신의 세계에 접근할 수 있는 것이다.

Equitempered scale $\quad a = 2^{1/12} = 1.05946$ (semi tone)

Note	Do	Di	Re	Ri	Me	Fa	Fi	So	Si	La	Li	Ti	Do
	C	$C^\#$, Db	D	$D^\#$, Eb	E	F	$F^\#$, Gb	G	$G^\#$, Ab	A	$A^\#$, Bb	B	C
Semitone order in octarve		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Interval ratio to key note	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
Frequency ratio to key note	1.000	1.059	1.122	1.189	1.260	1.335	1.414	1.498	1.587	1.682	1.782	1.888	2.000

Frequencies and Bubble Radii $\quad a = \frac{c_g}{\omega}(3\frac{\rho_b}{\rho_o})^{1/2} = \frac{3.2890262}{f} \times 10^3$ (mm)

Note	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
Frequency(Hz)	16.352	32.703	65.406	130.81	261.63
Radius(mm)	220.70	100.36	50.18	25.09	12.54

C_4	$C_4^\#$	D_4	$D_4^\#$	E_4	F_4	$F_4^\#$	G_4	$G_4^\#$	A_4	$A_4^\#$	B_4	C_5
261.63	277.18	293.66	311.13	329.63	349.23	369.99	392.00	415.30	440.00	466.88	493.88	523.25
12.54	11.84	11.17	10.55	9.95	9.40	8.87	8.37	7.90	7.46	7.03	6.64	6.27

C_5	C_6	C_7	C_8	B_8
523.25	1046.5	2093.0	4186.0	7902.1
6.27	3.14	1.57	0.78	0.41