PID 제어기에 의한 F-MM Ⅱ의 특성다항식 실현(Ⅱ)

이 수흠○*, 정 원용*, 이 현우*, 정 광조**, 류 상욱***, 박 현태****
경남대학교*, 한국기계연구원**, 영남전문대학***, 영진전문대학****

A Characteristic Polynomial Assignment using PID Controller in F-MM(Ⅱ)

Soo-Heum Lee○*, Won-yong Chong*, Hyun-Woo Lee*, Kwang-Jo Chung**,

Sang-Wook Lyu***, Hyun-Tae Park****,

* Kyungnam Univ. ** KIMM *** Yeungnam Jr. College **** Yeungjin Jr. College

〈Abstract〉

Most control system design problems involve finding state feedback gain for good response by the pole or characteristic polynomial assignment.
In this paper, the characterstic polynomial assignment using PID controller for discrete 2-dimensional system descrived by the Fornasini-Marchesini's 2nd model (F-MM Ⅱ) is considered.
This method is not only available to F-MM Ⅱ but also to Rosser's model.

Ⅰ. 서 론

근래에 2차원(2-D) 시스템은 X-ray enhancement,화상처리, 일기예보,질병진단, radar and sonar array 등의 현대 공학 분야와 관련하여 상당한 주목을 받고 있다.
한편, 제어계 설계에서는 양호한 응답특성을 얻기위해 1차원(1-D) 계통의 경우 극배치 방법이 많이 사용되나 2차원(2-D) 계통의 경우 극 들이 독립적이지 않는 경우가 대부분이므로 희망하는 특성다항식을 지정하여 이를 실현하는 상태 또는 출력궤환설계법[1-4] 이 많이 사용되고 있다.
그러나 이러한 연구 결과들은 대부분이 Rosser model(RM)[5] 에 관한 것들이다.
따라서 본 연구에서는 RM보다 더 일반적인 2-D 시스템 모델인 F-MM Ⅱ (Fornasini-Marchesini's 2nd Model)[6]에 대해 RM에 관한 Paraskevopoulos 등이 제시한 PID 제어기 설계법[7]을 확장하여 희망하는 특성다항식을 실현하는 상태 궤환 PID 제어기의 설계법을 논하며 이것을 다입력계에 까지 확장하고 설계예를 통하여 그 타당성을 확인하고자 한다.

Ⅱ. 문제의 정식화

다음과 같은 F-MM Ⅱ를 생각한다.

$$X(i+1,\ j+1) = A_1X(i+1,\ j) + A_2X(i,\ j+1) + b_1u(i+1,\ j) + b_2u(i,\ j+1) \tag{1}$$

여기서 i,j는 각각 수직 및 수평좌표의 정수 값이고
$X(i,j) \in R^n$ 은 (i,j)에서의 상태벡터,
$u(i,j) \in R^m$ 은 (i,j)에서의 입력벡터.
A_1, A_2, b_1, b_2는 각각 적절한 차원의 실벡터이다.
이 때 다음의 제어칙을 사용하여 상태궤환을 행한다.

$$u(i,j) = K^T X(i,j) + r(i,j) \tag{2}$$

여기서 r(i,j)는 (i,j)에서의 기준입력이다.
(2)식을 z 변환하면

$$U(z_1,z_2) = K^T(z_1,z_2)\ X(z_1,z_2) + R(z_1,z_2) \tag{3}$$

가 된다.
여기서 $K(z_1,z_2)$를 다음과 같은 PID 제어기라 가정한다.

$$K(z_1,z_2) = K_1/z_1 + K_2/z_2 + K_3 + z_1K_4 + z_2K_5 \tag{4}$$

$$K_i \in R^{n\times 1} \quad (i=1,2,\cdots,5)$$

z변환된 영역에서 (2)식을 (1)식에 대입하여
개루프 특성다항식 ($d_o(z_1,z_2)$)과
폐루프 특성다항식 ($d_c(z_1,z_2)$)을 각각 구하면

$$d_o(z_1,z_2) = \det[\ I_n - z_2A_1 - z_1A_2\ ] \tag{5}$$

$$d_c(z_1,z_2) = \det[\ I_n - z_2A_1 - z_1A_2 - (z_2b_1 + z_1b_2)\ K^T\ ] \tag{6}$$

이다.
따라서 (1)식 (즉, A_1,A_2,b_1,b_2)이 주어졌을 때 희망하는 폐루프 특성다항식 $d_c(z_1,z_2)$를 실현하는 $K_i(i=1,2,\cdots,5)$를 구하는 문제로 귀착된다.

Ⅲ. PID 제어기 설계

일반적으로

$$\det[\ A + bK^T\ ] = \det[A] + K^T\ \mathrm{adj}\ [A]b \tag{7}$$

가 성립하므로 식(6)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_c(z_1,z_2) &= \det[\ I_n - z_2A_1 - z_1A_2\ ] - K^T\ \mathrm{adj}[\ I_n - z_2A_1 - z_1A_2\ ](z_2b_1 + z_1b_2) \\ &= d_o(z_1,z_2) - M(z_1,z_2)\ K \end{aligned} \tag{8}$$

여기서

$$M^T(z_1,z_2) = \mathrm{adj}\ [\ I_n - z_2A_1 - z_1A_2\ ]\ (z_2b_1 + z_1b_2) \tag{9}$$

이다. (8)식을 다시 쓰면

$$M(z_1,z_2)K = d_o(z_1,z_2) - d_c(z_1,z_2) \tag{10}$$

가 되고,

$$d(z_1,z_2) = d_o(z_1,z_2) - d_c(z_1,z_2) \tag{11}$$

이라면

$$M(z_1,z_2)K = d(z_1,z_2) \tag{12}$$

또는 양변에 z_1z_2를 곱하여

$$M(z_1,z_2)[K_1z_2 + K_2z_1 + K_3z_1z_2 + K_4z_1^2z_2 + K_5z_1z_2^2] = z_1z_2\ d(z_1,z_2) \tag{13}$$

를 얻는다. 그런데

$$M(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_{ij}\, z_1^{\,i}\, z_2^{\,j}\ ,$$

$$d(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} d_{ij}\, z_1^{\,i}\, z_2^{\,j}$$ 이므로

이것을 (13)식에 대입하여

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_{ij}[\, K_1 z_1^{\,i} z_2^{\,j+1} + K_2 z_1^{\,i+1} z_2^{\,j} + K_3 z_1^{\,i+1} z_2^{\,j+1} + K_4 z_1^{\,i+2} z_2^{\,j+1} + K_5 z_1^{\,i+1} z_2^{\,j+2}\,] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} d_{ij}\, z_1^{\,i+1}\, z_2^{\,j+1} \tag{14}$$

이 되고,
양변의 $z_1^{\,i}\ z_2^{\,j}$ 항의 계수를 비교하여

$$\bar{M}\,\bar{K} = \bar{d} \tag{15}$$

를 얻는다. 여기서

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{00} & 0 & 0 & 0 \\ m_{10} & m_{01} & m_{00} & 0 & 0 \\ m_{20} & m_{11} & m_{10} & m_{00} & 0 \\ m_{11} & m_{02} & m_{01} & 0 & m_{00} \\ \hline 0 & 0 & 0 & m_{n,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{n-1,n} \end{bmatrix},\quad \bar{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{01} \\ \hline d_{n+1,n-1} \\ d_{n-1,n+1} \end{bmatrix}$$

$$K = [\ K_1\ \ K_2\ \ K_3\ \ K_4\ \ K_5\ ]^T$$

이다. 이 때 (15)식은
Kronecker-Capelli's theorem에 의하여 다음식이 만족할 때 유일한 해가 존재한다.

$$\text{rank}\ \bar{M} = \text{rank}\ [\ \bar{M}\ \bar{d}\ ] \tag{16}$$

Ⅳ. 다입력계로의 확장

먼저, 다입력계로의 확장을 위해

$$\hat{K}_i = qK_i^T \quad (\ i = 1,2,\cdots,5\ ) \tag{17}$$

여기서 $q\in R^{m\times 1}$, $K_i\in R^{n\times 1}$
인 dyadic 구조의 $\hat{K}_i$를 가정하고,
다음의 다입력 F-MM Ⅱ를 생각한다.

$$\begin{aligned} X(i+1,\ j+1) &= A_1X(i+1,\ j) + A_2X(i,\ j+1) \\ &\quad + B_1U(i+1,\ j) + B_2U(i,\ j+1) \end{aligned} \tag{18}$$

폐루프 특성다항식은

$$\begin{aligned} d_c(z_1,z_2) &= \det[\ In - z_2A_1 - z_1A_2 - (z_2B_1+z_1B_2)\hat{K}\ ] \\ &= \det[\ In - z_2A_1 - z_1A_2 - (z_2b_1+z_1b_2)K^T\ ] \end{aligned} \tag{19}$$

여기서 $b_i\ =\ B_iq$ 가 되며
이것은 앞서의 (6)식과 일치하므로 다입력계의 설계에서도 단일 입력계와 동일한 설계방법의 적용이 가능하다.

Ⅴ. 설계 예

식 (18)에서 A_1, A_2, B_1, B_2 가 각각 다음과 같다고 하자.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

희망하는 폐루프 특성다항식이

$$d_c(z_1,z_2) = -2z_1z_2^2 - z_1^2z_2 - 5z_1z_2 - 2z_1^2 - 2z_1 - 2z_2 - 4$$

이라면, 이 시스템의 개루프 특성다항식은

$$\begin{aligned} d_o(z_1,z_2) &= \det[\ In - z_2A_1 - z_1A_2\ ] \\ &= z_1^2z_2 + 3z_1z_2 + z_1^2 + 2z_1 + z_2 + 1 \end{aligned}$$

이고, $q^T = [\ -1,\ 1\ ]$ 이라면

$$b_1 = B_1q = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$$
$$b_2 = B_2q = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]^T$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} M^T &= \text{adj}[\ In - z_2A_1 - z_1A_2\ ]\,(z_2b_1 + z_1b_2) \\ &= [\ z_1^2 + 2z_1^2z_2,\ \ z_1 + 2z_1z_2,\ \ z_1^2z_2 + z_1z_2 + z_2\ ]^T \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} d(z_1,z_2) &= d_o(z_1,z_2) - d_c(z_1,z_2) \\ &= 2z_1^2z_2 + 2z_1z_2^2 + 8z_1z_2 + 3z_1^2 + 4z_1 + 3z_2 + 5 \end{aligned}$$

이다. m_{ij} 를 구하면

$m_{10} = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]^T$, $m_{01} = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$,
$m_{11} = [\ 0\ \ 2\ \ 1\ ]^T$, $m_{20} = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T$,
$m_{21} = [\ 2\ \ 0\ \ 1\ ]^T$

가 되며, 이것을 (15)식에 대입하여 K_i를 구하면

$K_1 = [\ 1\ \ 1\ -5\ ]^T$, $K_2 = [\ 1\ \ 1\ \ 4\ ]^T$,
$K_3 = [\ 1\ -3\ \ 6\ ]^T$, $K_4 = [\ 1\ -4\ \ 1\ ]^T$,
$K_5 = [\ 1\ \ 1\ \ 0\ ]^T$

가 되며, 따라서

$$\hat{K}(z_1,z_2)$$
$$= qK^T(z_1,z_2)$$
$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{-1} + z_2^{-1} + 1 + z_1 + z_2 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} - 3 - 4z_1 + z_2 \\ -5z_1^{-1} + 4z_2^{-1} + 6 + z_1 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} -z_1^{-1}-z_2^{-1}-1-z_1-z_2, & -z_1^{-1}-z_2^{-1}+3+4z_1-z_2, & 5z_1^{-1}-4z_2^{-1}-6-z_1 \\ z_1^{-1}+z_2^{-1}+1+z_1+z_2, & z_1^{-1}+z_2^{-1}-3-4z_1+z_2, & -5z_1^{-1}+4z_2^{-1}+6+z_1 \end{bmatrix}$$

가 얻어진다.

해의 타당성을 확인하여 보면

$$K(z_1,z_2) = K_1/z_1 + K_2/z_2 + K_3 + z_1K_4 + z_2K_5$$
$$= [\ 1/z_1+1/z_2+1+z_1+z_2,\ 1/z_1+1/z_2-3-4z_1+z_2,\ -5/z_1+4/z_2+6+z_1\ ]^T$$
$$d_o(z_1,z_2) = \det[\ I_n - z_2A_1 - z_1A_2 - (z_2b_1+z_1b_2)K^T\ ]$$
$$= -2z_1z_2^2 - z_1^2z_2 - 5z_1z_2 - 2z_1^2 - 2z_1 - 2z_2 - 4$$

이므로 희망하는 폐루프 특성다항식과 일치함을 알 수 있다.

Ⅵ. 결론

제어계 설계에 있어 양호한 응답특성을 얻기위한 극 또는 특성다항식 실현을 위해 상태궤환 또는 출력궤환을 구하는 방법이 많이 사용된다. 본 논문에서는 2-D 시스템의 가장 일반적인 모델인 F-MM Ⅱ 에 대해 희망하는 특성다항식 실현을 위해 상태궤환 경로에 PID 제어기를 배치하는 설계법을 제시하고 다입력계에 확장하였으며, 설계예를 통하여 이의 타당성을 확인하였다. 제시된 알고리즘은 RM 에도 적용할 수 있으며 출력궤환계통에도 확대 적용할수 있을 것으로 생각하며 앞으로의 연구 과제로 할 것이다.

참 고 문 헌

(1)Kaczorek T.:Pole assignment problem in two-dimensional linear system.Int.J. Control vol.37,no.1, 1983,pp.183-190

(2)Kaczorek T.:Eigenvalue assignment problem for 2-D systems with separable characteristic polynomials. Bull.Acad.Polon.Sci.Techn.vol.32,no.1-2,1984/inpress/.

(3)Mertzios B.G.:Pole assignment of 2-D systems for separable characteristic equations.Int.J.Control vol.39,no.5,1984.pp.879-889.

(4)Paraskevopoulos P.N.:Characteristic polynomial assignment and determi nation of the residual polynomial in 2-D systems.IEEE Trans.Automat. Control vol.AC-26,1981,pp.541-543.

(5)Roesser R.P.:A discrete state-space model for linear image processing.IEEE Trans Autom.Control.vol.AC-20, no.1,Febr.1975,pp.1-10.

(6)Soo-Heum Lee,Toshiyuki Kitamori:Decoupling Of 2-D System by State Feedback in F-MM Ⅱ,KIEE,vol 39.no. 4 Apr.1990,pp.371-379

(7)Paraskevopoulos P.N.,and Kosmidou,O.I.:Eigenvalue assignment of two-dimensional systems using PID controllers.Int.J.Sci.,1981,12,(14),pp.407-412