표준 H_∞제어와 LQ제어의 성능 비교 연구

노태훈°, 박진배, 문영현, 이태식
연세대학교 전기공학과

A Study on the Performance Comparison of Standard H_∞ Control and LQ Control

Tae-Hoon Roh, Jin-Bae Park, Young-Hyun Moon, Tae-Shik Lee
Dept. of Electrical Eng., Yonsei University

Abstract

It is a standard problem that designs a controller to minimize the H_∞-norm of a given plant. By reducing a standard problem to a model-matching problem, we can obtain all the parameters which consist of a controller.

After presenting a practical model and applying it to a tracking model, we design an H_∞ controller and an LQ controller to concrete that H_∞ control theory is far more robust than LQ control theory. And we show the advantage of an H_∞ controller by obtaining a desired Bode diagram and comparing it with that of an LQ controller.

1. 서론

H_∞ 제어이론은 놈(norm)의 개념을 이용한 것인데 이는 실함수 해석에 수학적 기초를 두고 있다. 1981년 Zames[1]가 피드백이 감도에 주는 영향을 놈의 개념을 도입하여 설명함으로써 처음 소개된 이 이론은 외란이 존재할 때 상당한 오차의 감소를 가져온다고 알려져 있다.

H_∞ 제어문제란 주어진 모델의 전달함수 행렬의 H_∞-놈을 최소화시키는 제어기를 설계하는 것이다. 본 논문에서는 H_∞제어 문제를 표준 문제에서 모델매칭 문제로 축소하여 해석하고, 인수분해 이론과 상태공간 방법을 적용하여 각 파라미터들을 유도하고자 한다.

본 논문은 H_∞제어를 외란이 존재하는 추적문제(tracking problem)에 적용하여 오차를 줄임으로써 H_∞ 제어가 LQ (linear quadratic) 제어[2]보다 나은 성능을 가지고 있음을 보여주고자 한다. 시뮬레이션시, 패키지 유틸리티인 386pc-MATLAB을 이용하여 H_∞제어기와 LQ제어기를 설계하고자 하며 매트랩(Matlab) 함수를 이용하기 위하여 추적모델을 변형시켜 LQ제어를 적용하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 표준 H_∞ 제어

2.1 표준 문제 및 모델매칭 문제

그림 2.1은 표준 문제를 나타내는 블럭선도이다.

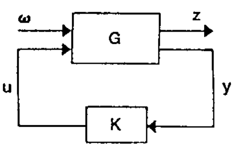

그림 2.1 표준 문제 블럭선도

여기서 ω 는 외부신호, 즉 외란, 센서노이즈, 기준 입력등이고 u는 제어 신호이고 z는 제어되는 신호, 즉 추적 오차, 제어 플랜트 출력, 구동기 출력등이고 y는 측정 신호이다. G(s)를 최소화 실현시키고 다음을 정의하자.

$$[A, B, C, D] := D + C(s - A)^{-1}B$$

이때, G의 입력은 w와 u, 출력은 z와 y, 그리고 B, C, D는 입출력의 갯수에 따라 각각 구분(partition) 할 수 있다.

표준 문제란 제어기 K가 플랜트 G를 안정화시키는 조건하에서 ω에서 z로의 전달행렬의 H_∞-놈을 최소화시키는 적절한 계수 행렬 K를 찾는 것으로 정의되는데, 표준 문제의 한 대표적 예가 모델매칭 문제이다. 이것은 플랜트와 모델의 입·출력 응답 사이의 오차를 최소화시키는 계단 제어기(cascade controller)를 설계하는 것이다. 그림 2.2는 모델매칭 문제를 블럭선도로 보여주는 그림이다.

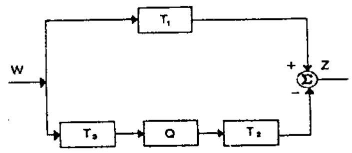

그림 2.2 모델매칭 문제 블럭선도

2.2 파라미터화

실계수 유리함수(real-rational function)를 포함하는 H_∞의 부분집합을 RH_∞로 나타낸다. RH_∞-파라미터 행렬 Q와 공소수 인수분해(coprime factorization)를 이용해서 G를 안정화시키는 모든 K를 파라미터화 시킴으로써 K가 G를 안정화시킬 수 있다. 이를 위해 다음 정리를 고려해보자.

정리 2.1 K가 G_{22}를 안정화 시키면 K가 G를 안정화 시키고 그 역도 성립하게 된다[3]. 여기서 G_{22}는 행렬 G의 2번째 행, 2번째 열의 요소이다.

이에따라 공소수분해로 K를 파라미터화시키자. G의 이중 공소수 인수분해는 다음과 같다.

$$G_{22} = N_2 M_2^{-1} = \tilde{M}_2^{-1}\tilde{N}_2 \tag{2.1}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_2 & -\tilde{Y}_2 \\ -\tilde{N}_2 & \tilde{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & Y_2 \\ N_2 & X_2 \end{bmatrix} = I \tag{2.2}$$

그리고 K의 공소수 인수분해는 다음과 같다.

$$K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U} \tag{2.3}$$

위 식의 K는 다음 정리에 의해 파라미터화시킬 수 있다.

정리 2.2 G를 안정화시키는 모든 K의 집합은 다음의 공식에 의하여 파라미터화 된다[4].

$$K = (Y_2 - M_2Q)(X_2 - N_2Q)^{-1} \tag{2.4}$$

$$= (\tilde{X}_2 - Q\tilde{N}_2)^{-1}(\tilde{Y}_2 - Q\tilde{M}_2)$$

$$Q \in RH_\infty$$

아래의 파라미터들은 공소수 인수분해의 정의를 이용하여 다음의 상태 방정식과 두개의 식으로부터 얻을 수 있다[5].

$$\dot{x} = Ax + B_2u \tag{2.5}$$
$$y = C_2x$$
$$A_F := A + B_2F \qquad A_H := A + HC_2 \tag{2.6}$$

각 파라미터들의 전달행렬은 다음과 같다.

$$M_2(s):=[A_F,\ B_2,\ F,\ I] \quad X_2(s):=[A_F,\ -H,\ C_2,\ I] \tag{2.7}$$
$$N_2(s):=[A_F,\ B_2,\ C_2,\ 0] \quad Y_2(s):=[A_F,\ -H,\ F,\ 0]$$
$$\tilde{M}_2(s):=[A_H,\ H,\ C_2,\ I] \quad \tilde{X}_2(s):=[A_H,\ -B_2,\ F,\ I]$$
$$\tilde{N}_2(s):=[A_H,\ B_2,\ C_2,\ 0] \quad \tilde{Y}_2(s):=[A_H,\ -H,\ F,\ 0]$$

다음에 w에서 z로의 전달행렬 T_1-T_2QT_3와 식(2.4)의 K가 같도록 놓으면 T_i를 얻을 수 있다[3]. 그러므로 지금까지 구한 파라미터들을 가지고 대수연산을 하면 다음과 같이 전달 행렬 T_i가 구해진다.

$$T_1(s) = [\ \underline{A}_1,\ \underline{B}_1,\ \underline{C}_1,\ D_{11}\ ] \tag{2.8a}$$
$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} A_F & -B_2F \\ 0 & A_H \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 + HD_{21} \end{bmatrix}$$
$$\underline{C}_1 = [\ C_1 + D_{12}F,\ \ -D_{12}F\ ]$$
$$T_2(s) = [\ A_F,\ B_2,\ C_1 + D_{12}F,\ D_{12}\ ] \tag{2.8b}$$
$$T_3(s) = [\ A_H,\ B_1 + HD_{21},\ C_2,\ D_{21}\ ] \tag{2.8c}$$

2.3 모델매칭 오차의 최소화

최소(infimal) 모델매칭 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha := \inf\{\ \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty :\ Q \in RH_\infty\} \tag{2.9}$$

식(2.9)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha = \mathrm{dist}(T_1,\ T_2H_\infty T_3) \tag{2.10}$$

즉 α는 T_1에서 다음에 정의된 부분공간까지의 거리다.

$$T_2H_\infty T_3 := \{T_2QT_3\ :\ Q \in H_\infty\}$$

α는 특별한 경우에 Hankel연산자의 놈과 같음을 다음 정리에서 알 수 있다.

정리 2.3 행렬 $R(\ \in L_\infty)$과 가장 가까운 H_∞-행렬과의 거리는 H_2로부터 $H_2{}^\perp$까지의 연산자 ($\Pi M_R|H_2$)의 놈과 같다. 여기서 $\Pi M_R|H_2$는 기호 R을 가지는 Hankel 연산자이다.

유리수 기호를 가진 Hankel 연산자의 놈은 상태공간 방법으로 계산될 수 있다. R을 RL_∞에 있는 행렬이라고 하고 $C(s-A)^{-1}B$를 불안정부분의 최소실현이라고 하면, R(s)는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$R(s) = C(s-A)^{-1}B + (RH_\infty\text{에 존재하는 행렬 })$$

그리고 다음의 Liapunov 방정식을 고려해보자.

$$AL_c + L_cA' = BB' \tag{2.11}$$
$$A'L_o + L_oA = C'C$$
$$L_c := \int_{-\infty}^{0} e^{At}BB'e^{A't}dt$$
$$L_o := \int_{-\infty}^{0} e^{A't}C'Ce^{At}dt$$

여기서 프라임(′)은 전치(transpose)를 의미하고, L_c, L_o는 Liapunov 방정식의 유일한 해다. 그러므로 L_cL_o는 양의 실수인 고유치만을 가진다.

보조정리 2.3 유리수 기호 R을 가진 Hankel 연산자 $\Gamma := \Pi M_R|H_2$ 는 유한한 랭크를 가진다. 연산자 $\Gamma^*\Gamma$와 행렬 L_cL_o은 영이 아닌 고유치를 공유한다. 특히 Γ의 놈은 L_cL_o의 가장 큰 고유치의 제곱승근과 같다. 여기서 스타(*)는 복소수 연합 정치(complex-conjugate transpose)를 의미한다.

이때 α를 직접 구할 수는 없다. 그러나 반복계산에 의해서 원하는 α에 근접한 상한치를 계산하는 것은 가능하다. 즉 실수 γ가 부등식 $\alpha < \gamma$ 을 만족하면 다음식을 만족하고 그 역도 성립한다.

$$\mathrm{dist}(T_1,\ T_2H_\infty T_3) < \gamma \tag{2.12}$$

여러가지 γ값에 대해 식(2.12)를 만족하는지 테스트하여 원하는 신뢰도로 α를 구할 수 있다. 일반적인 결과는 다음 정리 2.4와 같다.

정리 2.4 $Q \in RH_\infty$이면 다음 식이 성립한다[6].

$$\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty < \gamma, \qquad \gamma > 0$$

여기서 전제조건은 다음과 같다.

$$\|Y\|_\infty < \gamma, \quad \|Z\|_\infty < 1, \quad \|R - X\|_\infty < 1$$

$$T_2 = U_iU_o,\ U_i\ \text{내부(inner)},\ U_o\ \text{외부(outer)} \tag{2.13a}$$
$$Y := (I - U_iU_i^\sim)T_1 \tag{2.13b}$$
$$Y_o := \gamma^2 I - Y^\sim Y\text{의 스펙트랄 요소} \tag{2.13c}$$
$$T_3Y_o^{-1} := V_{co}V_{ci},\ V_{co}\ \text{공-외부},\ V_{ci}\ \text{공-내부} \tag{2.13d}$$
$$Z := U_i^\sim T_1Y_o^{-1}(I - V_{ci}^\sim V_{ci}) \tag{2.13e}$$
$$Z_{co} := I - ZZ^\sim\ \text{의 공-스펙트랄 요소} \tag{2.13f}$$
$$R := Z_{co}^{-1}U_i^\sim T_1Y_o^{-1}V_{ci}^\sim \tag{2.13g}$$
$$X := Z_{co}^{-1}U_oQV_{co} \tag{2.13h}$$

반복 계산을 통해서 적당한 γ를 구한후 $\|R - X\|_\infty < 1$을 만족하는 X를 찾고 식(2.13h)에서 Q를 구할 수 있다.

R을 RL_∞ 행렬이라고 하고 문제를 공식화하면 다음을 만족하는 행렬 $X(\ \in RH_\infty)$를 정리2.5를 이용하여 구할 수 있다.

$$\|R - X\|_\infty = \mathrm{dist}(R,\ RH_\infty) \tag{2.14}$$

정리 2.5 최적 X는 다음과 같이 주어진다.

$$X(s) = R(s) - \lambda[A,\ w,\ C,\ 0]/[-A',\ v,\ B',\ 0]$$

여기서 λ^2은 L_cL_o의 최대고유치이고, w는 이에 대응하는 고유벡터이며, 그리고 $v := \lambda^{-1}L_ow$ 이다.

3. LQ 제어

그림 3.1과 같은 제어 시스템에 대한 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.1}$$
$$u = -Kx \tag{3.2}$$

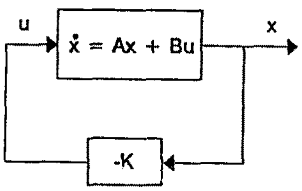

그림 3.1 LQ 제어 시스템

주어진 제어 시스템의 성능을 평가하기 위해 다음과 같이 평가지수(performance index)를 정의한다.

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\ dt \tag{3.3}$$

여기서 Q, R은 양한정(positive-definite) Hermitian 또는 실대칭 행렬(real symmetric matrix)이다.

이러한 평가지표에 기초한 최적 조정 시스템(optimal regulator system)을 설계하는 것은 평가지수 J를 최소화하는 이득행렬 K를 결정하는 것이다. 이때 평가지수 J를 최소화하는 이득행렬 K는 다음과 같이 주어진다[2].

$$K = -R^{-1}B'S \tag{3.4}$$

여기서 S는 다음과 같은 Riccati 방정식을 만족시키는 행렬이다.

$$A'S + SA - SBR^{-1}B'S + Q = 0 \tag{3.5}$$

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

본 장에서는 2장에서 제시한 표준 문제와 모델매칭 기법을 외란 즉, 기준입력을 가지는 추적문제에 적용하여 제어기를 구했다. 그리고 LQ 제어기도 구하여 성능비교를 함으로써 H_∞제어의 특성을 고찰하였다. 수치계산 및 프로그램은 매트랩(Matlab) 팩키지를 이용하였다.

4.1 시뮬레이션

주어진 모델은 다음과 같다. 플랜트 P는 불안정한 것으로 잡았고 하중인수와 하중필터를 다음과 같이 정했다.

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}, \quad W(s) = \frac{0.5s+0.95}{10s+1}, \quad \rho = 1$$

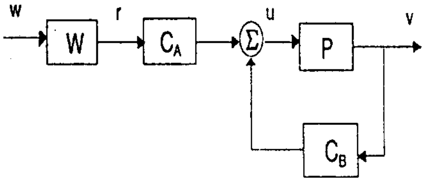

그림 4.1 추적 모델

그림 4.1에서 추적 오차 신호를 r - v로 잡으면 비용함수(cost function)는 다음과 같이 잡을 수 있다.

$$(\|r-v\|_2^2 + \|\rho u\|_2^2)^{1/2} \tag{4.1}$$

여기서 $\rho > 0$은 스칼라 하중인수이다.
식(4.1)을 z로 바꾸고 그림 2.1의 나머지 변수들도 다음과 같이 정의하여 추적문제를 표준문제로 변형할 수 있다.

$$z := \begin{bmatrix} r-v \\ \rho u \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \quad K := \begin{bmatrix} C_A & C_B \end{bmatrix}$$

$$G := \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

위 행렬에서 그림 4.1의 전달함수 G를 구할 수 있다.

$$G(S) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{0.5s+0.95}{10s+1} & -\frac{s-1}{s(s-2)} \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{0.5s+0.95}{10s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s(s-2)} \end{array}\right]$$

최소 실현을 시켜서 상태방정식의 계수를 구하고 식 (2.6)에 정의된 F, H를 구한 후 식(2.8)을 이용하여 T_1, T_2, T_3를 구한다.

정리 2.3에 의해서 최적 적절한 제어기가 존재함을 알 수 있다. 그리고 정리 2.4 에 의하여 다음과 같은 최적 Q를 구하는 알고리즘이 나온다.

step 1. Y 와 $\|Y\|_\infty$를 계산한다.
step 2. α에 대한 상한치 α를 찾는다.
step 3. 구간 $[\|Y\|_\infty, \alpha]$에서 시험값 γ를 택한다.
step 4. z와 $\|Y\|_\infty$를 구한다.
step 5. $\|Y\|_\infty < 1$ 이면 다음으로 넘어가고 아니면 γ를 증가 시켜 step 4로 간다.
step 6. R과 $\|\Gamma_R\|$를 계산한다. $\alpha < \gamma$ 이면 $\|\Gamma_R\| < 1$ 이므로 이에따라 γ값을 증감시킨다. 그리고 step 3 으로 돌아간다. 거의 정확한 상한치 α가 얻어지면 step 5 로 간다.
step 7. $\|R-X\|_\infty \le 1$을 만족하는 $X(\in RH_\infty)$를 구한다.
step 8. $X = Z_{co}^{-1}U_oQV_{co}$ 에서 $Q(\in RH_\infty)$를 구한다.

step 6까지 반복계산을 하면 γ값의 변화는 다음과 같다.

표 4.1 γ 값에 따른 $\|\Gamma_R\|$의 결과 값

γ	$\|\Gamma_R\|$
0.25	0.7069
0.23	0.7922
0.21	0.9068
0.17	1.3777
0.16	1.7268

표 4.1 에서 γ를 0.21로 잡는다.
이때 Q는 step 8에서 다음과 같이 나온다.

$$Q_1 = \frac{(s+1)^2(0.6633s^2+1.7905s+0.7596)}{(0.5s+0.95)(0.3586s+1)(s^2+\sqrt{7}s+1)}$$

Q_2는 zero로 놓는다(unconstrained).
마지막 단계로 식 (2.4)와 (2.7)로부터 K를 구한다.

$$C_A = -\frac{(s+1)^4(0.6633s^2+1.7905s+0.7596)}{(0.5s+0.95)(s+3.108)(s^2+\sqrt{7}s+1)(s^2+6s-23)}$$

$$C_B = -\frac{41s-1}{s^2+6s-23}$$

설계특성을 관찰하기 위해 기준신호 r에서 추적오차 r - v로의 전달함수 H_1을 그림 4.2에서 Bode 선도로 나타내었다. H_1은 그림 4.1에서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H_1 = \frac{1 - PC_B - PC_A}{1 - PC_B}$$

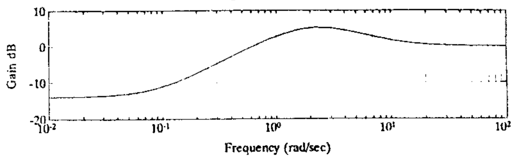

그림 4.2 전달함수 H_1의 Bode선도

위 그림에서 동작 주파수구간 (0, .1]에서는 -12dB 이하임을 볼 수 있다. 이것은 H_∞제어를 통해서, 오차 r - v가 기준신호의 6.3% 이하로 작음을 알 수 있다.

다음에는 LQ제어기를 구해보았다. 문제를 간략하게 하기 위하여 그림 4.1를 그림 4.3과 같이 변형시켰다.

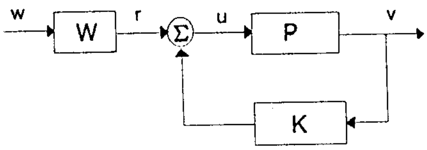

그림 4.3 피드백 루프 시스템

여기서는 매트랩 팩키지를 이용했기 때문에 매트랩함수에 변수를 맞추기 위해 입출력 관계를 변형시켰다.

$$\begin{bmatrix} r-v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -P \\ I \end{bmatrix} u$$

이것을 최소화 실현 시키고 하중행렬 Q, R을 구하면 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} .0001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} .0001 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

그리고 이득행렬을 구하면 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} 0.2311 & -0.3232 & 0.5165 \\ 0.0000 & -0.0001 & 4.0002 \end{bmatrix}$$

상태 변수를 출력에 연결시키고 피드백연결을 하여 r에서 r - v로의 전달함수 H_2를 구하여 Bode 선도를 그리면 그림 4.4와 같다.

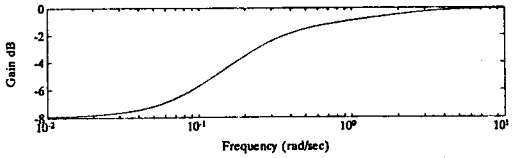

그림 4.4 전달함수 H_2의 Bode선도

그림에서 H_2의 크기는 동작주파수 구간 [0, .1]에서 -6dB로 부터 -8dB 정도이다. 따라서 오차가 기준신호의 약 20% 정도가 되므로 H_∞제어에 비해서 훨씬 큼을 알 수 있다.

4.2 결과 고찰

그림 4.2는 기준입력 r에서 추적오차 r - v로의 전달함수를 나타낸다. 한편, 필터 W는 주파수가 0.1일때까지 거의 0dB가 나온다. 따라서 W를 통해서 기준입력 r이 갖는 에너지가 주파수대역 [0,.1]에 집중되어있기 때문에 이 구간이 기준입력의 동작주파수 대역이 된다. 그런데 그림 4.2는 이 구간에서 -12dB보다 작은 값을 갖기때문에 H_∞제어를 통해 상당한 오차의 감소를 가져왔음을 알 수 있다. 그림 4.4는 LQ 최적 제어를 통한 r에서 r - v로의 전달함수의 Bode 선도를 나타내었다. 그림 4.2와 비교해서 동작 주파수 안에서의 오차가 3배이상 크다. 이 원인은 LQ 최적제어가 알려지지 않은 외부입력, 즉 외란에 약하기 때문이다. 이로써 H_∞제어가 LQ제어보다 외란에 강함(robust)을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 하디 공간(Hardy Space)에서 정의된 놈의 개념을 이용하여 H_∞제어 이론 중의 하나인 표준 문제를 모델매칭 문제로 축소시키고 공소수 인수분해 이론을 이용하여 파라미터화시킨 후, 이를 추적문제에 적용하여 제어기 K를 구하였다. 또한 같은 모델에서 LQ제어기를 구함으로써 두 제어기의 성능을 비교하였다. 시뮬레이션 결과, 외란이 존재할 때는 H_∞제어가 뛰어난 성능을 가짐을 알 수 있었다.

6. 참고 문헌

[1] G. Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, pp.301-320. 1981.

[2] K.Ogata, *Modern Control Engineering*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1980.

[3] P.P. Khargonekar, I.R. Peterson, and M.A. Rotea, "H_∞-Optimal Control with State Feedback", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 33, pp.786-788, 1988.

[4] D.C. Youla, H. A Jabr and J. J Bongiorno Jr., "Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers" : Part II, *IEEE Trans. Automat, Cont.*, AC-21, pp.319-338, 1976.

[5] B.A. Francis, and J.C. Doyle, " Linear Control Theory with an H_∞ Optimality Criterion", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 25, pp. 815-844, 1987.

[6] J. C. Doyle, *Lecture Notes in Advances in Multivariable Control*, ONR/Honeywell Workshop, Minneapolis, MN, 1984.