불확실 시스템의 제어를 위한 적분 최적 가변 구조 알고리듬

°이정훈*, 문건우*, 이대식**, 이주장*, 윤명중*

한국과학기술원 전기및 전자공학과* 경북 산업대학교 제어계측공학과**

Integral-Augmented Optimal VSS for Control of Uncertain SISO Systems

Jung-Hoon Lee*, Gun-Woo Moon*, Dae-Sik Lee**, Ju-Jang Lee*, and Myung-Joong Youn*

Department of electrical engineering, KAIST*

Department of control and measuring engineering, KyeungBook SanUp Uni.**

Abstract

An integral-augmented variable structure system is suggested for the control of an uncertain SISO syetems without the reaching phase problems. The integral-augmented sliding surface is defined in order to remove the reaching phase, then it is designed using the optiaml technique. The example results show the effecviness of the algorithm.

1. 서 론

가변구조 제어 이론의 주목할 만한 특징은 미리 설계된 슬라이딩 면 위에서 슬라이딩 모드를 형성하며 이 상태에서는 시스템의 불확실성과 외란에 대해 강인성을 갖게 된다는 점이다[1,2]. 이와 같은 장점에 비해 단점으로 입력의 불연속성과 함께 리칭 페이스(Reaching Phase)를 들 수 있다[1,2]. 리칭 페이스는 초기 조건에서부터 처음 슬라이딩 면에 이르는 궤적 구간을 의미하며 기존의 가변구조 제어기가 선형 슬라이딩 면을 사용하므로 슬라이딩 면 위에 존재하지 않는 초기 조건에 대하여 발생한다[1]. 이 구간에서는 슬라이딩 모드가 발생되지 않아 가변구조 제어의 강인성을 보장 받을 수 없다. 따라서 이 영역에서 시스템은 불확실성과 외란에 민감해질 수 있으므로 설계된 성능의 강인성 문제가 야기된다[2].

리칭 페이스에 대한 기존의 대책으로 스위칭 면을 초기 상태에서부터 적응적으로 변화시키는 방법[1,7], Haramashima 의 방법[6]과 비선형 항을 첨가하는 방법[8] 등이 있다. 이 방법들 모두 리칭 페이스 문제를 개선할 수는 있지만, [8]을 제외하면 설계 방법들은 공학적인 직관에 근거를 두고 있다.

본 연구에서는 단일 입출력 시스템에서 리칭 페이스 문제를 제거할 수 있는 적분 가변 구조 제어 알고리듬을 제시한다. 여기서 사용한 슬라이딩 면은 [11]의 결과를 확장 발전시킨 것으로 적분기를 첨가하여 리칭 문제를 개선한다. 그리고 슬라이딩 면의 설계를 위해 LQ 최적 이론을 이용하였다. 제안된 알고리듬은 상태 공간의 어떠한 초기 조건에 대해서도 리칭 페이즈 문제가 존재하지 않는다. 따라서, 전체 궤적에 대해 강인성이 보장되고, 그 결과 슬라이딩 면의 동특성을 이용하면 출력을 예측할 수 있다. 예제를 들어 제안된 알고리듬의 유용성을 입증한다.

2. 적분 가변 구조 제어

2.1 시스템 설명

적분기를 갖는 정규 단일 입출력(Canonical Single -Input Single-Output) 시스템을 고려한다.

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_n(t) \end{bmatrix} X+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix} U+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}, X(0)$$

$$x_0 \equiv \int_0^t x_1(\tau)\, d\tau, \qquad x_0^0$$

$$y=[1\ 0\ \cdots\ 0]X \qquad \text{-----(1)}$$

여기서 $X \in R^n$는 상태 변수, U는 입력, y는 출력, 그리고 $X(0)$는 초기치이다. 또, $a_i(t)$와 $b(t)$는 시스템 매개 변수이며 $f(t)$는 외란이다. 시스템 (1)에 대해 다음과 같은 기본적인 가정이 가변 구조 제어를 위해 필요하다.

가정: 유계(Boundedness)

시스템 매개변수인 $a_i(t)$와 $b(t)$ 그리고 외란 $f(t)$는 유계(Bounded)되었으며 다음과 같은 형태로 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} a_i(t) &= a_i^0+\Delta a_i(t) & |\Delta a_i(t)| &< \alpha_i \\ b(t) &= b^0+\Delta b(t) & |\Delta b(t)| &< \beta < b^0, \quad b(t)>0 \\ & & |f(t)| &< \gamma \end{aligned} \qquad \text{-----(2)}$$

여기서 a_i^0와 b^0는 Nominal 값이다.

시스템 (1)의 Nominal 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{X}=A \cdot X+B \cdot v, \quad X(0)$$

$$x_0 \equiv \int_0^t x_1\, dt, \qquad x_0^0 \qquad \text{-----(3)}$$

여기서

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_1^0 & -a_2^0 & \cdots & -a_n^0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b^0 \end{bmatrix}.$$

적분 가변 구조 제어기 설계에는 식 (3)과 (2)의 매개변수 변화의 한계값만 사용된다. 먼저 적분 슬라이딩 면을 설계하고, 그의 모든 점에서 슬라이딩 모드를 형성할 제어 입력을 설계한다.

2.2 적분 슬라이딩 면

본 연구에서는 아래와 같이 적분기를 첨가한 슬라이딩 면을 제안하여 리칭 페이즈 문제를 해결 하고자 하며 여기에는 초기 조건을 알고 있다는 가정이 필요하다.

$$\begin{aligned} s(x, x_0, t) &= C^T \cdot (X-X(0))+C_0 \cdot \int_0^t x_1 dt \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (x_i-x_i(0)), \quad c_n=1. \end{aligned} \qquad \text{-----(4)}$$

식 (4)는 상태공간의 어떠한 초기조건에 대해 $s(x^0, 0, 0)=0$

을 만족 하므로 초기 상태부터 슬라이딩이 가능하여 리칭 페이즈가 없게 된다. 따라서, 초기상태부터 원점까지 전궤적에 대해 강인성을 보장받을 수 있다. 그리고 슬라이딩 모드 상태는

$$s(x,\ x_0,\ t)=0 \quad \text{그리고} \quad \dot{s}(x,\ x_0,\ t)=0 \qquad \text{-----(5)}$$

을 만족한다. 식 (5)를 이용하여, 상태 공간에서 초기 조건과 원점 사이에 정의되는 제안된 슬라이딩 면의 슬라이딩 동특성을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ -c_0 & -c_1 & . & . & . & -c_n \end{bmatrix}\cdot X, \quad X^{0} \qquad \text{-----(6)}$$

식 (6)의 해를 이용하면 주어진 초기조건에 대하여 슬라이딩 모드의 불변성(Invariance Property)으로 인하여 제어의 결과인 출력을 예측할 수 있고, 기존의 잘 연구된 극배치 기법 (Pole-Assignment Technique)을 이용하면 원하는 성능을 만족하기 위한 슬라이딩 면의 설계가 가능하다.

본 연구에서는 최적 제어 이론을 도입하여 식 (6)을 이용 적분 슬라이딩 면 (4)를 설계하고자한다[5,10]. 먼저, 식 (6)을 Nominal 시스템 (3)의 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{X}=A\cdot X+B\cdot v, \quad X(0)$$
$$v = -K\cdot X \qquad \text{-----(7)}$$

여기서

$$K = [\,(c_0-a_1^0)/b^0 \ \ (c_1-a_2^0)/b^0 \ \cdots \ (c_{n-1}-a_n^0)/b^0\,].$$

식 (7)에서 최적 이득을 구하기 위해 시스템 (7)에 대하여 성능 지수를 다음과 같이 선정한다.

$$J = \int_0^{\infty} x^TQx + v^TRv\ dt \qquad \text{-----(8)}$$

여기서 $R > 0$ and $Q=W^TW \geq 0$ 이며 $(A,\ W)$가 관측가능하다. 최적이론에 의해 (8)을 최소화하는 제어 입력 (7)의 이득해는 다음과 같다[5,10].

$$K_{op} = R^{-1}B^TP \qquad \text{-----(9)}$$

여기서 P 는 다음 Matrix Riccati Equation의 해이다.

$$A^TP + PA + Q + P^TBR^{-1}B^TP = 0 \qquad \text{-----(10)}$$

따라서, 식 (9)를 이용하여 다음과 같이 슬라이딩 면의 계수를 Nominal 시스템에 대한 성능지수의 최적해를 선정할 수 있다.

$$c_i = a_{i+1}^0 + b_0\cdot k_{op\,i}, \quad i=0,\ \ldots,\ n-1 \qquad \text{-----(11)}$$

슬라이딩 면 설계의 최종단계로 적분기의 초기값을 정상 상태에서 영(Zero)이 되기 위해 다음과 같이 정한다.

$$x_0^0 = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^0/c_0 \qquad \text{-----(12)}$$

2.3 제어 입력

다음 단계는 설계한 슬라이딩 면의 모든 점에서 슬라이딩 모드를 형성할 제어입력의 설계이다. 따라서 제어 입력은 슬라이딩 모드 존재조건, 즉

$$\lim_{s(x,\ x_0,\ t)\to 0} s(x,\ x_0,\ t)\dot{s}(x,\ x_0,\ t) < 0 \qquad \text{----(13)}$$

을 만족하는 것으로 구한다. 제안된 제어 입력은 (6)의 등가 제어 입력(Equivalent Control Input)을 사용하여 다음과 같이 채택한다.

$$U=U_{eq}+\Delta U \qquad \text{-----(14)}$$
$$=-\sum_{i=1}^{n} b^{0^{-1}}(c_{i-1}-a_i^0)X_i - \sum_{i=0}^{n} Kx_i - \delta\ Sgn(s) - k\cdot S$$

여기서 U_{eq}는 슬라이딩 모드 동특성을 제어하며 슬라이딩 면 설계에 따라 결정이 되며, ΔU는 외란에 대해 슬라이딩 모드를 유지시켜주는 역할을 한다. 그 각각 이득은 다음 부등식에 의하여 선정한다.

$$k_i = \begin{cases} \alpha_i > \ (\alpha_i+\beta\cdot(c_{i-1}-a_i^0))/(b^0-\beta) & x_i\cdot s(x,x_0,t)>0 \\ \beta_i < \ -(\alpha_i+\beta\cdot(c_{i-1}-a_i^0))/(b^0-\beta) & x_i\cdot s(x,x_0,t)>0 \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} \zeta > \ \gamma/(b^0-\beta) & s(x,\ x_0,\ t)>0 \\ \zeta < \ -\gamma/(b^0-\beta) & s(x,\ x_0,\ t)<0 \end{cases}$$

$$k > 0.$$

결과적으로, 제어 입력설계는 슬라이딩 면의 설계에 의한 성능설계와 안정화 설계로 양분되었다.

정리 1: 시스템 (1)에 대하여 제안된 제어 알고리듬은 Nominal 시스템에 대한 최적 성능을 보장하며 원점에 대하여 점근적 안정성(Asymptotic Stability)을 만족한다.

증명 : Lyapnov 후보 함수를 다음과 같이 선정하고

$$V(t) = 1/2s^2(x,\ x_0,\ t) \qquad \text{----(15)}$$

그의 미분을 구하면 쉽게 다음을 만족함을 알 수 있다.

$$\dot{V}(t)=s(x,\ x_0,\ t)\cdot\dot{s}(x,\ x_0,\ t)<-(b^0-\beta)s^2(x,\ x_0,\ t) \qquad \text{---(16)}$$

다음 장에서는 예를 들어 제안된 알고리즘의 유용성을 기존의 가변구조 제어와 비교 검증한다.

3. 예 제

다음과 같이 적분기가 추가된 4차 시스템을 고려하자.

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix}\cdot X+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}\cdot U+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad X(0)$$

$$\dot{x}_0 = x_1, \qquad x_0^0$$
$$y=[1\ 0\ 0]X$$
$$a_i^0 = i, \quad |\Delta a_i(t)| < 0.3\cdot i, \quad i=1,2,3 \qquad \text{-----(17)}$$
$$b^0 = 5, \quad |\Delta b(t)| < 1.5$$
$$|f(t)| < 70$$

시스템 (17)의 제어를 위한 제어기의 설계는 다음과 같다. 먼저 슬라이딩 면의 설계에서 성능 지수의 Q와 R를 아래와 같이 선정한다.

$$Q = dia[100 \ \ 20 \ \ 1], \qquad R=0.1 \qquad \text{-----(18)}$$

따라서 K_{op}를 구한 후, 슬라이딩 면의 계수를 식 (11)에 의해 다음 표 1과같이 구할 수 있다. 그리고 기존의 슬라이딩 면에 대해서는 극 배치방법을 사용하였다.

Algorithm	c_0	c_1	c_2	c_3
proposed	158.1171	109.2578	21.94345	1.0
conventional	0.0	20.0	10.0	1.0

표 1. 설계된 슬라이딩 면의 계수

입력의 불연속 이득은 다음 표 2와같이 선정하였다.

SMC	x_0	x_1	x_2	x_3	δ	k
proposed	0.05	6.5	9.2	3.0	23.8	0.2
	-0.05	-6.5	-9.2	-3.0	-23.8	
comventional		3.6	26.3	3.8	23.8	
		-23.6	-2.3	-3.8	-23.8	

표 2. 선정된 불연속 입력의 이득

	a_1	a_2	a_3	b	f
nominal	-1.0	-2.0	3.0	5.0	0.0
case i	-1.3	-2.6	-3.9	6.5	-70.0
case ii	-0.7	-1.4	-2.1	4.5	70.0

표 3. 매개변수에 대한 두가지 조건

초기조건 X^{0^T} = [2 1 0]과 표 3의 두가지 매개변수 조건에 대하여 2 [*msec*] 샘플링하여 컴퓨터 시뮬레이션하였다.

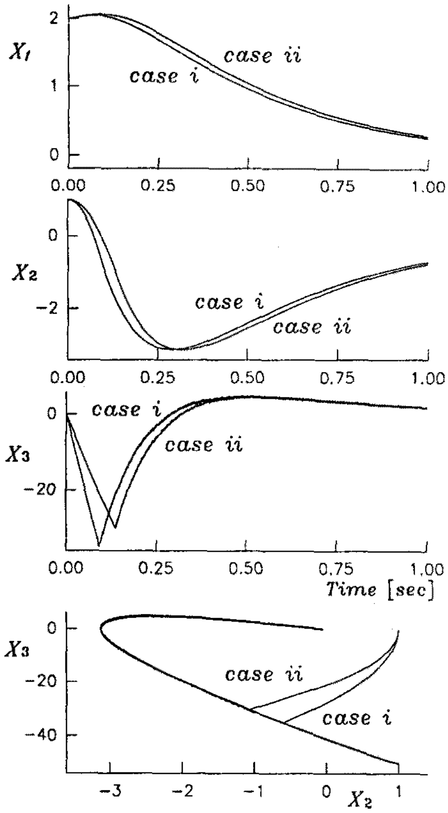

그림 1. 기존 가변구조의 결과

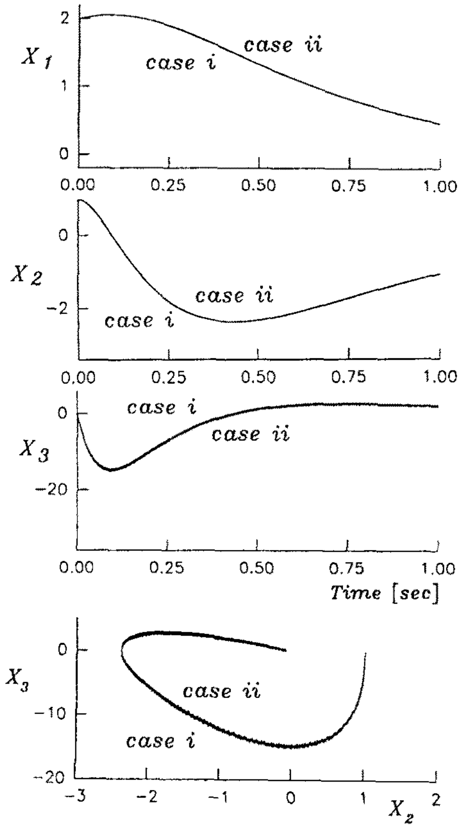

그림 2. 제안된 가변구조의 결과

그림 1은 기존의 가변구조의 결과이며 그림 2는 제안된 알고리듬의 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 기존의 알고리듬에서는 리칭 페이즈가 존재하여 외란에 대하여 둔감성을 보장받을 수 없다. 하지만 제안된 가변구조 제어에서는 리칭 페이즈없이 처음부터 슬라이딩하여 강인성을 보장받고 출력예측이 가능하다.

4. 결 론

불확실 SISO 정규 시스템의 개선된 강인 제어를 위하여 적분 가변구조 제어를 연구하였다. 기존 가변구조 제어의 단점인 리칭 페이즈 문제를 해결하기 위해 적분 슬라이딩 면을 채택하고 최적 이론을 이용하여 설계하였다. 슬라이딩 면에 설계된 성능의 둔감성과 출력 예측의 가능성을 슬라이딩 모드의 불변성에 의하여 증명하였다. 예제를 통하여 제안된 알고리듬의 유용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*. John Wiley & Sons, New York, 1976.

[2] V. I. Utkin, *Sliding Mode and Their Apprications in Variable Structure Systems*. MIR Publisher Moscow, 1978.

[3] R. A. Decarlo, S. H. Zak, and G. P. Mattews, "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems:A Tutorial," *Procdings of IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.

[4] J. Y. Hung and W. Gao, "Variable Structure Control: A Survey," *IEEE Tran. Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.

[5] V. I. Utkin and K. D. Yang, "Methods for Constructcting Dicontinuity Planes in Multidimensional Variable Structure Systems," *Automat. Remote Control*, vol. 39, no. 10, pp. 1466-1470, 1978.

[6] F. Harashima, H. Hashimoto, and S. Kondo, " MOSFET Converter-Fed Positions Servo with Sliding Model Control," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. IE-32, no. 3, 1985.

[7] G. T. Park, D. S. Kim, and J. K. Choi, "A Robust Controller Design for a Robot Manipulator Using Time-Varying Sliding Manifolds," *J. of KITE*, vol. 5, no.1, pp. 57-64, 1992.

[8] J. J. Kim, J. J. Lee K. B. Park, and M. J. Youn, "Design for New Time-Varying Sliding Surfaces for Robot manipulator Using Variable Structure Controller," *Electronics Letters*, vol. 29, no. 2, 1993.

[9] G. T. Park, J. K. Choi, and D. S. Kim, "The Design of Variable Structure Controller for the Systems Having the First Order dynamics," *Trans. of KIEE*, vol. 41, no. 4, pp. 392-399, 1992.

[10] T. L. Chern and Y. C. Wu, "An Optimal Variable Structure control with Integral Compensation for Electrohydraulic Position Control Systems," *IEEE Tran. Industrial Electronics*, vol. 39, no. 1, pp. 460-463, 1992.

[11] J. H. Lee, J. J. Kim, J. J. Lee, and M. J. Youn, "Position Control fo Dc Motor Using Variable Structure Systems with a Novel Sliding Surface," *Proceed. of ISPE'92*(Int. Symposium on Power Electronics, Seoul), pp. 347-351, 1992.