

피이드포워드 보상기를 갖는 강인한 선형 다변수 최적 모델 추종 서보계의 구성에 관한 연구

황 창선, 김 정택*, 김 동완, 김 문수, 이 경홍
부산대학교 전기공학과

Design of Robust Linear Multivariable Optimal Model Following Servo System Incorporating Feedforward Compensator

C. S. HWANG, C. T. KIM*, D. W. KIM, M. S. KIM, K. H. LEE
Department of Electrical Engineering, Pusan National University

ABSTRACT

In this paper, the method for designing a robust linear multivariable model following servo system is proposed. This model following servo system for the (n)th order reference input and the (n)th order disturbance is treated, and is designed so that the (n)th order response of the plant should be kept close to the (n)th order response of the given model by LQ(Linear Quadratic) optimal regulator approach. It is proved that the characteristics of the model following servo system is robust in the presence of the disturbances and the parameter perturbations of the plant dynamics.

여기를 제시하였으나 시간응답에 대해서는 그다지 고려가 없었다. 여기에 대하여 Kreindler등[2]에 의해 제시된 모델추종성과 Davison등에 의해 제시된 강인성을 제어기에 부가시켜, 입력과 같은 형태의 외란과 제어대상의 매개변수변동하에서도 모델의 계단응답에 대해 강인한 제어시스템을 구성하는 방법이 제안되었다[7-8].

본 연구에서는 강인한 선형다변수 모델추종형 서보시스템의 한 설계법을 제안하고자 한다. LQ최적레귤레이터문제로서, 기준입력이 (n)차형식으로 주어지고 (n)차형식의 외란이 존재할 경우에도 플랜트의 응답이 모델의 응답에 가능한 한 가깝도록 접근하는 모델추종형 서보시스템을 구성하고, 외란과 플랜트의 매개변수변동에 대해 강인한 모델추종형 서보시스템의 특성을 수식증명하고자 한다. 또한 지수가중치를 갖는 평가함수를 사용하여 설계의 영역을 확대하고자 한다.

2. 다변수 모델추종형 서보시스템의 구성

제어대상은 식(1)의 선형다변수 시불변시스템으로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p + E_p \delta \\ y_p &= C_p x_p \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x_p \in R^n$, $u_p \in R^m$, $y_p \in R^r$, $\delta \in R^s$ 는 각각 제어대상의 상태벡터, 제어입력, 출력, 미지의 외란이며 시스템 (A_p, B_p, C_p)는 가제어 가관측이라 가정한다. 제어대상이 추종해야 할 모델은 식(2)의 선형다변수시스템으로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m r \\ y_m &= C_m x_m \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $x_m \in R^n$, $r \in R^m$, $y_m \in R^r$ 는 각각 모델의 상태벡터, 목표치로서 n차 기준입력, 모델의 출력이다. 모델은 가제어, 가관측으로 점근안정하다고 가정한다. n차기준입력은 $r_0 * t^{n-1}/(n-1)!$ 의 형식으로 하고 r_0 는 상수, n은 음이 아닌 정수이다. 여기서 고려하는 미지의 외란 δ 는 $n = 0$ 인 경우 즉, 계단입력일 때는 미지의 계단 외란, $n \neq 0$ 인 경우는 (n)차 미지의 외란으로 $\delta_0 * t^{n-1}/(n-1)!$ 의 형식이다. 다음에 플랜트의 출력과 모델의 출력의 차를 오차 e로서 정의하면 식(3)과 같다.

$$e = y_m - y_p = C_m x_m - C_p x_p \quad (3)$$

플랜트와 모델에 대한 상태방정식을 (n+1)차 미분하여 확대계를 구하면 식(4)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} v \\ v &= u_p \end{aligned} \quad (4)$$

1. 서론

제어시스템설계의 중요한 목적은 예측할 수 없는 외란 또는 시스템의 매개변수변동하에서 제어하여야 할 시스템의 제어량을 주어진 목표치에 대하여 양호한 과도특성을 갖게 하면서 안정하게 유지시키는 것이라 생각할 수 있다. 상태공간법에 의해서 위에서 말한 특성을 만족하도록 제어시스템을 설계할 경우 유효한 기법으로서 모델매칭법과 모델추종형제어법이 잘 알려져 있는 기법이고 현재까지 많은 연구가 되고 있다.

Tyler[1]는 주어진 재특성을 만족하는 모델을 상정하여 모델과 플랜트의 출력의 차의 2차형식을 평가함수에 도입하여, 구성된 시스템의 특성을 모델의 특성에 가능한 한 접근시키는 Model-in-the-system법을 제안하였다. 또 Markland[3]는 Tyler의 기법을 확장하여 플랜트의 매개변수변동에 대하여 저감도의 모델추종형 제어시스템의 설계법을 제안하였다. 이러한 연구는 LQ최적레귤레이터문제에 근거한 방법으로 설계는 간단하지만 외란 또는 플랜트의 매개변수변동에 대해 정상상태편차를 생기게 하는 결점이 있다. 이것을 해결하기 위하여 목표함수가 계단함수일 경우 레귤레이터문제를 수정해서 적용함으로써 모델의 계단응답에 정상편차없이 추종하는 선형제어시스템을 구성하는 방법이 제안되었으나[4], 이 경우에 있어서도 입력과 같은 형태의 외란과 제어대상의 매개변수변동등에 대해서는 정상편차가 생기는 강인하지 못한 제어시스템의 구성이었다.

한편, 페루프시스템을 안정하게할 뿐 아니라 미지의 외란이 존재하는 경우에도 제어가능하도록 하는 서보제어기에 대한 연구가 Davison등[5-6]에 의해 연구되었다. 그들은 미지의 일정외란이 있는 경우 정상상태에서 일정기준입력에 대해 출력응답이 일치되도록 적분기를 포함한 서보계

여기서,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_m & 0 & \dots & 0 \\ -C_p & C_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} x_p^{(n+1)} \\ x_m^{(n+1)} \\ e \\ \dots \\ e \\ e \end{bmatrix}$$

이다. (·)는 (·)차미분을 나타내며 A_m 의 고유치(σ_i)는 $\text{Re}(\sigma_i) < 0$ 을 만족한다. 식(4)에 대한 평가함수를 식(5)와 같이 정의 함으로써 LQ레귤레이터문제에 취급할 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} (\bar{X}^T \bar{Q} \bar{X} + v^T R v) dt \quad (5)$$

여기서, $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q \end{bmatrix}$, $R = I_m$.

이며, I_m 은 m 차 단위행렬이다. 평가함수에 지수가증치를 포함시키면 어느 주어진 시정수까지 페루프 시스템의 응답속도를 보장할 수 있다. 즉 $e^{-\alpha t}$ 보다 빠르게 0으로 정상상태에 도달하게 되며, 평가함수에 지수가증치를 포함한 LQ레귤레이터의 극점들은 안정이 보장된다. 레귤레이터 문제에 의해서 평가함수 식(5)를 최소화하는 최적제어는

$$v^* = -R^{-1} \bar{B}^T P \bar{X} \quad (6)$$

로 주어진다. 여기서 P 는 식(7)의 수정된 행렬리카티방정식(Matrix Riccati Equation)의 해이다.

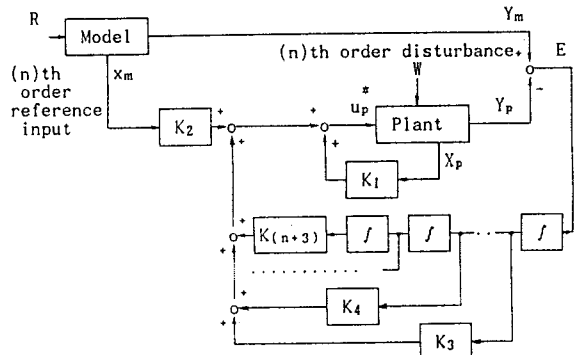
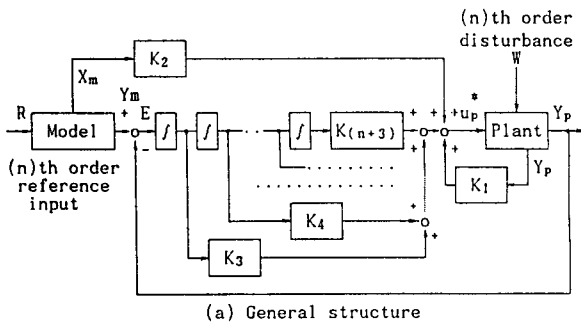
$$P[\bar{A} + \alpha I] + [\bar{A} + \alpha I]^T P - P \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T P + \bar{Q} = 0 \quad (7)$$

식(4), 식(6) 및 식(7)에 의해 식(5)의 평가함수를 최소화하는 최적제어입력은 식(9)와 같다. 이때 적분기의 초기치는 모두 0으로 두었다.

$$u_p^* = K_1 x_p + K_2 x_m + K_3 \int edt + K_4 \iint edt + \dots + K_{(n+3)} \int \dots \int edt \quad (8)$$

여기서 $K_1 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{11}$
 $K_2 = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{12}$
 \dots
 $K_{(n+3)} = -R^{-1} \bar{B}_p^T P_{1(n+3)}$ (9)

이상에서 얻어진 결과를 이용해서 제어시스템을 그림 1과 같이 구성할 수 있다.



(b) Equivalent structure of (a)
 그림 1. 강인한 모델추종형 서보제어기의 구성
 Fig. 1. Construction of robust model following servo controller

3. 다변수 모델추종형 서보시스템의 특성

식(8)의 제어규칙을 식(1)의 플랜트에 대입하고,

$$z_k = K(k+2) \int \dots \int e dt \quad (k\text{차 적분})$$

로 두면 페루프계는 식(10)이 된다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_p \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p + B_p K_1 & B_p & \dots & B_p & B_p \\ -K_3 C_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{(n+3)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p K_2 \\ K_3 C_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \delta \quad (10a)$$

$$Y_p = [C_p \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] [x_p \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n+1}]^T \quad (10b)$$

식(10a)를 라플라스(Laplace)변환하고 각 이득(gain) $K_1, K_2, \dots, K_{(n+3)}$ 이 공칭플랜트에 기초하여 설계된 값이라고 하여 각각을 $K_{1,N}, K_{2,N}, \dots, K_{(n+3),N}$ 이라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(sI - A_p - B_p K_{1,N} + B_p s^{-1} K_{3,N} C_p + B_p s^{-2} K_{4,N} C_p + \dots + B_p s^{-(n+1)} K_{(n+3),N} C_p) X_p(s) = (B_p s^{-1} K_{3,N} C_m + B_p s^{-2} K_{4,N} C_m + \dots + B_p s^{-(n+1)} K_{(n+3),N} C_m + B_p K_{2,N}) X_m(s) + E_p \delta_0 / s^{(n+1)} \quad (11)$$

$$X_m(s) = (sI - A_m)^{-1} B_m R(s) \quad (12)$$

$$Y_p(s) = C_p X_p(s) = P^*(s) \cdot (1/s^{n+1}) \quad (13)$$

여기서, s 는 라플라스 연산자를 나타낸다. 모델의 n 차 응답 $Y_m(s)$ 는 식(14)와 같고, 이것은 식(15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_m(s) = C_m (sI - A_m)^{-1} B_m r_0 (1/s^{n+1}) \quad (14)$$

$$= Q^*(s) (1/s^{n+1}) \quad (15)$$

식(3)으로부터 $e(t) = y_m(t) - y_p(t)$ 이므로 라플라스변환하면 $E(s) = Y_m(s) - Y_p(s)$ (16)

이고, 따라서

$$E(s) = (Q^*(s) - P^*(s)) (1/s^{n+1}) \quad (17)$$

$$= F^*(s) (1/s^{n+1}) \quad (18)$$

로 된다. 한편,

$$\frac{d^n}{ds^n} P^*(0) = \frac{d^n}{ds^n} Q^*(0) \quad (19)$$

이 성립하므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dn}{ds} F^*(s) / n! = 0 \quad (20)$$

이 된다. 식(20)의 결과에 의해 $t \rightarrow \infty$ 에서 $e(t)$ 가 영이 된다는 것을 알 수 있다. 즉, 플랜트 매개변수변동과 외란이 존재할 경우에도 정상상태에서는 y_p 가 y_m 에 일치하게 된다. 결과로부터 알 수 있듯이 구성된 제어시스템은 플랜트의 매개변수변동 및 (n)차 형식까지의 미지의 외란이 있을 경우에도 정상편차가 생기지 않는 강인한 제어시스템이다.

4. 컴퓨터 시뮬레이션

참고문헌[7]의 시스템을 사용하여 본 방법의 타당성을 보인다. 플랜트는

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \delta \quad (21)$$

$$y_p = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] x_p$$

로서 주어진다. 모델은 3차 시스템으로서 램프입력에 대해 정상편차가 없는 ITAE표준함수를 채택하였으며

$$J = \int e^{2at} (e^T Q e + v^T R v) dt \quad (22)$$

이며 여기서 $v = \dot{u}_p$, $R = 1$ 이다. 최적제어법칙은

$$u_p^* = K_1 x_p(t) + K_2 x_m(t) + K_3 / e dt + K_4 / e dt \quad (23)$$

로서 나타내어지고, 표 1에 각 Q에 대한 K_1, K_2, K_3, K_4 의 값을 표시하였다.

표 1. 3차모델의 경우 각 하중에 대한 제어입력의 이득
Table 1. Gain of control input for each weight in case of third order model

Q	K_1		K_2		K_3	K_4
10	7.2842	0.3963	-5.6711		-6.7875	-3.1623
	2.2768	0.3389	-13.8253			
	0.3927		-3.2202			
100	13.7179	0.5587	-11.5159		-16.5638	-10
	3.3592	0.4551	-32.6955			
	0.5734		-8.2153			
1000	26.2593	0.7958	46.5619		-40.7527	-31.6228
	5.0716	0.6099	81.6415			
	0.8470		38.6412			

그림 2는 시스템에 램프형 입력을 가하였을 때의 각 하중에 대한 시스템 출력응답과 제어입력의 형태를 나타낸 것이다. 시스템의 출력에 대한 하중이 커질 수록 기준모

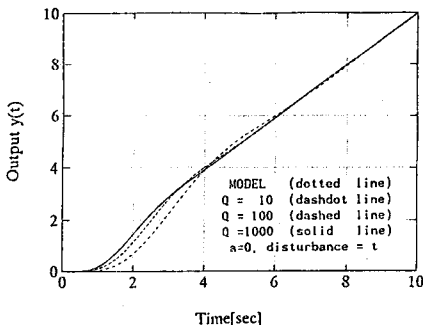


그림 2. 램프형 외란하에서의 램프입력에 대한 동특성
Fig. 2 Dynamic response under ramp disturbance

델의 응답에 더 가깝게 추종하는 것을 확인할 수 있다. 외란의 영향하에서도 기준모델의 응답에 잘 추종하는 강인함을 보여주고 있다.

그림 3은 그림2와 같은 조건에서 시스템 출력에 대한 하중은 100으로 고정시킨 채, 지수가중치 a의 변화에 따른 시스템 출력응답과 제어입력의 형태를 나타낸 것이다.

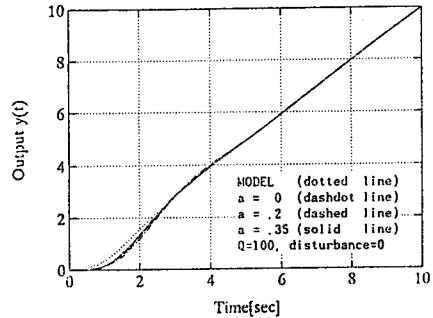


그림 3. 지수하중에 대한 동특성
Fig. 3 Dynamic response for a exponential weighting

5. 결론

본 연구에서는 정상상태에서 모델의 출력과 플랜트의 출력이 일치해야 한다는 제약아래, 지수 가중치를 갖는 LQ 레귤레이터문제로서 시스템의 출력이 모델의 출력에 최적으로 추종하는 제어계를 구성하였다. 시스템의 차수와 기준모델의 차수가 다를 경우에서도 사용될 수 있도록 모델 추종형 설계법을 사용하였으며, 플랜트의 매개변수변동과 미지의 (n)차의 외란하에서 (n)차의 기준입력에 대해서도 성립함을 수식증명하였고, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 이를 확인하였다.

참고 문헌

- [1]. J.S. Tyler, Jr., "The Characteristics of Model Following Systems as Synthesized by Optimal Control", IEEE Trans, Vol. AC-9, pp.485-498, 1964.
- [2]. E. Kreindler, "On the Linear Optimal Servo Problem", Int. J. of Control, Vol.8, No.4, pp.465-472, 1969.
- [3]. C.A. Markland, "Optimal Model Following Control System Synthesis Techniques", Proc. IEE, Vol.117, No.3, pp.623-627, 1970.
- [4]. Ichiro Suga, "Linear Control System Optimally Following Model Step Response", Trans. of Society of Instrument and Control Engineers, Vol.6, No.2, pp.175-181, 1970.
- [5]. E.J. Davison, "The Robust Control of a Servo mechanism Problem for Linear Time Invariant Multivariable Systems", IEEE, AC-21-1, pp.25-34, 1976.
- [6]. E.J. Davison, "The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods, IEEE Trans, Vol. AC-26, No. 1, pp.93-110, Feb. 1981.
- [7]. Katsuhisa Furuta and Katsumi Komiya, "Design of Model-Following Controller", IEEE AC, Vol. AC-27, No. 3, pp.725-727, JUNE 1982.
- [8]. 황창선, 김정택, 이양우, 최일섭, "강인한 적분형 최적 모델 추종형 서보계의 구성에 관한 연구", 전기학회 논문지, Vol.42, No.4, 1993.