

시스템의 불확실성을 고려한 자기부상 시스템의 비선형 궤환 선형화 제어기

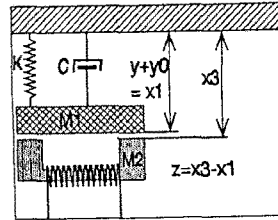
° 변지준, 주성준, 서진현
서울대학교 전기공학과

Development of Controller for EMS System using Nonlinear Feedback Linearization, regarding Uncertainty of System

° Jijoon Byun, Sungjun Joo, Jinheon Seo
Dept. Electrical Eng. Seoul Nat'l University

Abstract

It is known that Feedback linearization has important limitations—the full state has to be measured; no robustness is guaranteed with respect to parameter uncertainty and unmodeled dynamics. In this paper, we construct a nonlinear feedback linearization controller for the system containing uncertain parameters and unknown states, in the case of EMS system with rail vibration. Performance of this controller is demonstrated by computer simulation.



x1 : 절대 좌표에서 본 레일의 위치
x3 : 절대 좌표에서 본 전자석의 위치
y0 : 중력에 의해서 초기에 스프링이 늘어난 량
Z : 레일과 전자석과의 거리 (gap)

그림 2.1 한점에서 레일을 집중 정수 방식으로 표현한 모습

여기서 K : 레일의 탄성 계수(spring constant)
C : 레일의 감쇠 계수(damping constant)
M1 : 레일의 무게
M2 : 자석의 무게

I. 서론

비선형 궤환 선형화(Nonlinear Feedback Linearization) 기법은 기존의 테일러(Taylor) 급수 전개에 의한 선형화 방식과는 달리 각 상태 변수가 정의되는 모든 영역에서 선형성을 보장하므로 시스템의 동작형태를 정확히 예측할 수 있는 장점[4]이 있는 반면 비선형 궤환에 의해 시스템의 비선형성을 상쇄하는 방법이므로 완전한 선형성을 보장하기 위해서는 시스템의 모델과 파라미터(parameter)들을 정확히 알아야 하고 모든 상태 변수를 측정해야 한다는 단점이 있다.[9] 하지만 실제로 비선형 시스템을 정확히 묘사하거나 모든 상태 변수를 측정하는 것은 대단히 어려운 일로서 이러한 문제를 해결하기 위한 여러가지 연구가 진행 중이다. 최근에 적용 제어 기법에 의한 해결법[5][7]과 궤환 선형화 이후의 강인한 제어기 설계에 의한 해결 방안[11]이 제시되었다.

본 논문에서는 자기 부상 시스템을 채택하여 시스템에 불확실성이 있거나 모든 상태 변수를 측정하는 것이 불가능한 경우에 대해서 안정성과 강인성을 고려한 비선형 궤환 제어기를 설계하는 연구를 수행하였다.

II. 레일진동을 고려한 부상제어

본 연구에서는 먼저 레일 진동을 고려한 새로운 제어기를 제시하고 레일 진동을 고려하지 않고 연구된 기존의 제어기가 레일진동이 발생하였을 때 모형을 되지 않은 동특성에 대해서 시스템을 안정화 시킬 수 있는지에 관한 연구와 이에 따르는 제반 문제점을 검토하고 이를 시뮬레이션과 해석적인 방법으로 분석 검토하였다.

II.1 레일 + EMS 의 모델링

실제의 레일은 분포정수(distributed parameter)의 편미분방정식으로 이루어져 있지만 계산의 간소화를 위해서 이를 집중정수(lumped parameter)방식의 상미분 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

그림 2.1 과 같이 변수와 상수를 결정하고 다음과 같이 상태 변수를 정의하고 상태 방정식을 구해보면 (2.1.1)식과 같다.

$$x_1 = y + y_0, x_2 = \dot{x}_1, x_4 = \dot{x}_3, x_5 = \dot{x}_3$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K}{M_1}x_1 - \frac{C}{M_1}\dot{x}_2 + \frac{\mu_0 N^2 A}{4M_1} \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + G \\ \frac{-\mu_0 N^2 A}{4M_2} \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2(x_3 - x_1)}{\mu_0 N^2 A} \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_3 - x_1 \quad (2.1.1)$$

여기서 $\mu_0 : 4\pi \times 10^{-7}$

A : 유효 단면적, N : 마그네트의 turn 수
G : 중력 가속도, R : 마그네트의 저항

식 (2.1.1)는 비선형요소를 많이 포함하고 있는 상태식임을 알 수 있다. 본 연구에서는 이와 같은 방법으로 구한 상태식에 레일 진동을 고려한 새로운 제어기를 구현해 보고, 레일의 동특성을 고려하지 않은 기존의 제어 방법으로 설계된 제어기로 제어를 실행했을 때 실제 제어기의 궤환이득값에 따른 시스템의 동작특성과 안정성을 유지하는 범위를 제시하여 시스템에 불확실성이 존재하더라도 비선형 궤환 선형화 기법을 적용할 수 있는 경우가 있음을 보이고자 한다.

자기 부상 열차가 주행하며 각 상수값이 계속 가변될 경우 집중정수 상태의 시변 모델로 모델링하여 위와 같은 제어방식을 적용 검토해 보았다.

II.2 레일 진동을 고려한 제어기

주어진 시스템은 상대 차수(relative degree)가 3인 시스템이다. 이 시스템을 정규 형태(normal form)으로 바꾸기 위해 다음과 같이 좌표 변환을 한다.

$$u_1 = y = x_3 - x_1$$

$$u_2 = \dot{y} = L_f h(x) = \dot{x}_3 - \dot{x}_1 = x_4 - x_2 \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \dot{y} = L_f h(x) = \dot{x}_4 - \dot{x}_2 \\ &= -\frac{\mu_0 N^2 A}{4} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{K}{M_1} x_1 + \frac{C}{M_2} x_2 \end{aligned}$$

한편, 시스템은 5차이고 상대 차수가 3이므로 시스템의 내부 동특성(internal dynamics)을 기술하는 2개의 상태 변수가 존재하는데 이 상태 변수는 다음과 같은 방정식을 만족해야 한다.

$$L_g \psi_j = 0 \quad j=1,2$$

$$i.e. (x_3 - x_1) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_5} = 0 \quad j=1,2 \quad (2.22)$$

이 방정식을 만족하는 좌표 변환을 $\phi(x)$ 로 표시하면 $\phi(x)$ 는 영역 $U = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_3 > x_1, x_5 > 0\}$ 에서 정의된 (local) diffeomorphism 이다.

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ - \\ \psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ x_4 - x_2 \\ -\frac{\mu_0 N^2 A}{4} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{K}{M_1} x_1 + \frac{C}{M_2} x_2 \\ x_1 - \frac{(M_1 + M_2) G}{K} \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

(2.21) 식과 (2.23)식을 이용해서 새로운 상태 변수 μ 가 만족하는 시스템 방정식을 쓰면

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 &= \mu_3 \\ \dot{\mu}_3 &= L_f^2 h(x) + L_g L_f^2 h(x) u \\ &= L_f^2 h[\phi^{-1}(\mu, \psi)] + L_g L_f^2 h[\phi^{-1}(\mu, \psi)] u \end{aligned} \quad (2.24)$$

이 시스템을 선형화하기 위한 제어 입력 u 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} (v - L_f^2 h(x)) \\ &= \frac{1}{-\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{KC}{M_1^2} x_1} \\ &\quad \left[u - R \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{KC}{M_1^2} x_1 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{K}{M_1} - \frac{C}{M_1^2} \right) x_2 - \frac{\mu_0 N^2 A}{4M_1} \frac{C}{M_1} \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} - \frac{C}{M_1} G \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

이 식을 (2.24)식에 대입하면 시스템의 입력력 사이에 다음과 같은 간단한 선형 관계가 성립한다.

$$\mu_3 = y^{(3)} = v \quad (2.26)$$

출력이 원하는 기준치(referenc value) y_d 를 따라가도록 하기 위한 선형 제어 입력은

$$\begin{aligned} v &= -k_3 \mu_3 - k_2 \mu_2 - k_1 (\mu_1 - y_d) \\ &= -k_3 \left[-\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{K}{M_1} x_1 + \frac{C}{M_1} x_2 \right] \\ &\quad - k_2 (x_4 - x_2) - k_1 (x_3 - x_1 - y_d) \end{aligned} \quad (2.27)$$

이 된다.

시스템의 내부 동특성(internal dynamics)을 나타내는 방정식은 (2.1.1)식과 (2.2.3)식으로부터

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{K}{M_1 + M_2} \psi_1 - \frac{C}{M_1 + M_2} \psi_2 - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \mu_3 \end{aligned} \quad (2.28)$$

로 구해진다. 레일의 동특성을 나타내는 방정식임을 알 수 있다. 따라서, 시스템의 zero dynamics ($\mu = 0$)는

$$\dot{\psi}_1 + \frac{C}{(M_1 + M_2)} \psi_1 + \frac{K}{(M_1 + M_2)} \psi_1 = 0 \quad (2.29)$$

(2.29)식으로부터 알 수 있는 바와 같이 시스템의 zero dynamics는 점근적으로 안정(asymptotically stable)하다. 따라서, 좌반평면(LHP)에 식(2.2.6)의 시스템의 극점(pole)이 존재하도록 식(2.2.7)의 k_i ($i = 1, 2, 3$)를 선정하면 (2.2.5)식의 제어 입력 u 와 (2.2.7)식의 선형 제어 입력 v 에 의해 구성되는 폐루프(closed loop) 시스템은 극점적으로 점근적 안정(locally asymptotically stable)하다. [9]

폐루프(closed-loop) 시스템은

$$\dot{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 & -K_3 \end{pmatrix} \bar{\mu}$$

where $\bar{\mu} = [\mu_1 - y_d \ \mu_2 \ \mu_3]^T$ (2.2.10)

이 된다.

II.3 기존의 제어기에 관한 연구

II.2에서 제안된 제어기는 여러 가지 측면에서 실제로 구현하는 것이 불가능하다. 즉, (2.2.5)식의 제어기를 실현하려면 첫째로 절대 좌표에서의 레일의 위치(x_1)와 레일의 속도(x_2)를 측정해야 하고 둘째로 레일의 파라미터(K, C, M_1 등)를 알아야 한다. 그러나, 현실적으로 이런 일은 상당히 어려운 일이므로 본 연구에서는 레일의 동특성을 고려하지 않은 기존의 제어기를 활용하는 방안을 연구하였다. 실제로 II.2에서 보듯이 레일의 동특성은 점근적 안정하므로 외부 동특성만 안정화시킨다면 전체 시스템을 안정화시킬 수 있다.

기존의 제어기[2]는 레일을 강체(rigid body)로 간주하고 설계한 것으로 그 구성은 다음과 같다.

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{M_2} \frac{i}{z}} \left(v - \frac{R}{M_2} \frac{i^2}{z} \right)$$

where (2.3.1)

$$v = -k_3 \left(-\frac{\mu_0 N^2 A}{4M_2} \frac{i^2}{z^2} + G \right) - k_2 z - k_1 (z - y_d)$$

여기서 z : 레일과 마그네트 사이의 공극(gap)

\dot{z} : 마그네트의 속도

i : 마그네트에 흐르는 전류

현재의 시스템에서

$$\begin{aligned} z &= x_3 - x_1 \\ i &= x_5 \\ \dot{z} &= \dot{x}_3 - \dot{x}_1 = x_4 - x_2 \rightarrow x_4 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

역시 레일의 속도(x_2)를 측정하기는 어려우므로 자석과 레일의 상대속도($x_4 - x_2$)대신 자석의 속도(x_4)만을 제어 입력에 사용한다. (2.3.2)식을 (2.3.1)식에 대입하면 제어기의 식은

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{M_2} \frac{x_5}{(x_3 - x_1)}} \left(v - \frac{R}{M_2} \frac{x_5^2}{(x_3 - x_1)^2} \right)$$

where (2.3.3)

$$v = -k_3 \left[-\frac{\mu_0 N^2 A}{4M_2} \frac{x_5^2}{(x_3 - x_1)^2} + G \right] - k_2 x_4 - k_1 (x_3 - x_1 - y_d)$$

(2.3.3)식에서 알 수 있는 바와 같이 이 제어기는 레일의 위치(x_1)나 속도(x_2)를 필요로 하는 항이 없으며 또한 레일의 파라미터를 모르더라도 사용이 가능하다. 따라서 이 제어기가 레일의 진동을 고려한 모델을 안정화시킬 수만 있다면 레일의 동특성에 무관한, 보다 우수한 제어기임을 알 수 있다.

이 제어기가 주어진 시스템을 안정화시킬 수 있는지 조사해 보자. 입력 u 를 식(2.2.4)에 대입하면 새로운 상태 변수가 만족하는 선형 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ - \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_1}{M_2} \frac{C}{M} & \frac{K}{M_1} \frac{C}{M} & \frac{1}{M_1} \left(K - \frac{C}{M} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{M_2}{M} & -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ - \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (2.3.4)$$

선형 제어입력 v 를 새로운 상태 변수로 표현하면

$$v = -k_3 (\mu_3 + \dot{\psi}_2) - k_2 (\mu_2 + \psi_2) - k_1 (\mu_1 - y_d) \quad (2.3.5)$$

이 되고, 이 식을 (2.3.4)에 대입하여 폐루프(closed-loop)시스템이 만족하는 미분 방정식을 써보면 (2.3.6)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mu \\ \psi \end{bmatrix}$$

여기서 (2.3.6)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_1}{M_1} k_1 & -\frac{M_1}{M_1} k_2 & -(\frac{M_1}{M_2} \frac{C}{M} + k_3) & -\frac{K}{M_1} (\frac{C}{M} - k_3) & \frac{1}{M_1} (K - \frac{C}{M} - M k_3 + C k_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{M_2}{M} & -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}$$

이 행렬이 안정한(stable) 행렬이 되도록 선형 계관 이득 k_i ($i = 1, 2, 3$) 을 선정할 수 있으면 주어진 시스템을 안정화시킬 수 있다.

한편, 이 행렬의 특성 다항식(characteristic polynomial) 은

$$\begin{aligned} a(s) &= \det(sI - A) \\ &= s^5 + (-\frac{C}{M_1} + k_3)s^4 + (\frac{K}{M_1} + k_2 + \frac{C}{M_1} k_3)s^3 \\ &\quad + (\frac{M}{M_1} k_1 + \frac{C}{M_1} k_2 + \frac{K}{M_1} k_3)s^2 \\ &\quad + (\frac{C}{M_1} k_1 + \frac{K}{M_1} k_2)s + \frac{K}{M_1} k_1 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

이 되어 특성 다항식의 계수를 임의로 조정할 수 있으므로 선형 계관 이득을 적당히 선정하면 특성 다항식의 근이 좌반평면(LHP)에 존재하게 되어 시스템을 안정화시킬 수 있음을 알 수 있다.

II.4 선형 계관 이득의 선정

행렬 A의 극점(pole)이 좌반평면(LHP)에 존재하도록 하려면 선형 계관 이득 k_i ($i = 1, 2, 3$) 는 다음의 조건을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} k_1 &> 0, \quad k_3 > 0, \quad k_2 > \frac{k_1}{k_3} \\ (\frac{C}{M_1})^2 k_3 &> \frac{M_2}{M_1} k_1 \\ k_3^2 &> 2k_2 \quad \text{or} \quad k_2 > 2\frac{K}{M_1} \\ k_1 &< \frac{KC}{M_1^2} (1 + \frac{M}{M_1}) \\ \frac{C}{M_1} k_1 k_2 &< k_1 k_2 k_3 + \frac{1}{M} \frac{K^2}{M_1} k_3 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

조건(2.4.1)을 만족하도록 k_i ($i = 1, 2, 3$) 를 정하면 시스템이 안정하게 된다.

III. 모의 실험 (Simulation)

자기 부상 시스템의 물리적인 특성상 상태 변수의 제한이 존재하고, 실제 시스템은 제어 입력의 한계가 존재하여, 요구되는 제어 입력이 제한값을 넘을 때는 포화되어 나타난다.

제어기로는 실제 구현이 용이한 기존의 제어기(II.3절)를 사용하였으며, 모의 실험의 결과도 이 제어기가 레일 진동이 있는 시스템을 안정화시킬 수 있다는 것을 보이고 있다.

실제의 제어기는 디지털 제어기로 실현되므로 제어기의 샘플링 주파수를 실제로 구현 가능한 3 kHz로 정하였고, 자기 부상 시스템에 일어날 수 있는 각종 외란을 인가하였다.

레일의 기계적인 특성을 고려하였다. 일반적으로 탄성 계수(K)는 레일의 재질에 따라 다르며, 감쇠 계수(C)의 크기는 레일의 구조에 달려 있다.

한편, 레일의 파라미터(K, C 등)는 스펀으로부터 동작점까지의 거리에 따라 변하는 값이다. 본 모의 실험에서는 스펀 사이에서 레일의 파라미터를 포물선 형태의 함수로 가정한 결과도 제시하였다.

IV. 결 론

일반적으로 비선형 계관 선형화 기법은 시스템에 관한 정확한 정보-정확한 파라미터와 정확한 상태 변수 -가 있어야만 사용이 가능한 것으로 알려져 왔고, 이러한 요구 조건으로 인해 실제 적용에 있어서 제한을 받아 왔다. 본 논문에서는 시스템에 따라서 이러한 조건이 필수적인 것이 아닐 수도 있음을 보이고 있다. 즉, 레일 진동이 있는 자기 부상 시스템의 경우 개루프 안정(open-loop stable)인 레일의 동특성을 고려하지 않고 비선형 계관 제어기를 구성하여도 이 제어기가 전체 시스템을 안정화(stabilize)시킬 수 있으며, 오히려 이 제어기가 레일 진동을 고려하여 설계된 제어기보다 레일의 특성 변화에 덜 민감한(less sensitive), 보다 우수한 제어기로 생각된다. 모의 실험의 결과도 이러한 사실들을 입증하고 있다. 실제로 자기 부상 시스템의 구현에 있어서 레일에 관한 정보를 자세히 아는 것은 어려운 일

이므로, 이러한 사실은 비선형 계관 제어기의 자기 부상 시스템에 적용 가능성을 시사한다.

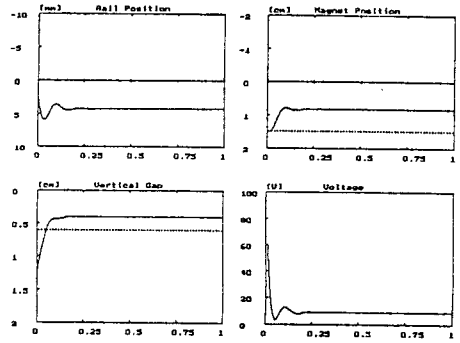


그림 3.1 레일 진동을 고려한 제어기

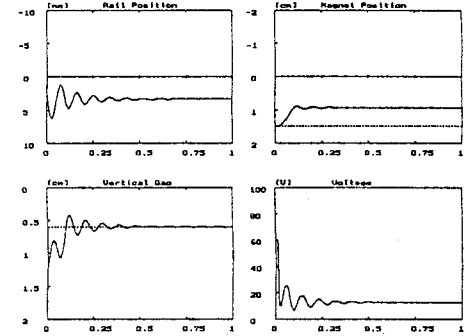


그림 3.2 레일의 진동을 고려한 파형

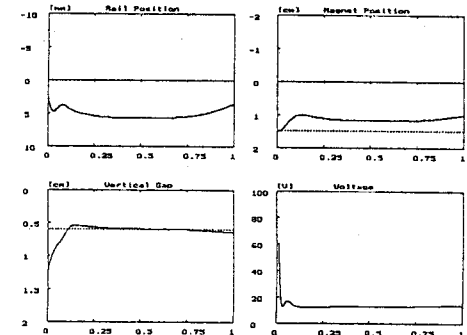


그림 3.3 레일의 파라미터가 시변인 경우의 파형

V. 참 고 문 헌

- [1] 주성준, "비선형 계관 선형화기법을 이용한 자기부상열차의 부상 및 안내 제어기 개발", 서울대학교 대학원 전기공학과 석사학위논문, 1992.
- [2] 진주와, "비선형 계관 선형화기법을 사용한 자기부상열차의 부상제어기 개발", 서울대학교 대학원 전기공학과 석사학위논문, 1991.
- [3] C.T.Chen, Linear Systems, Prentice-hall, 1980.
- [4] A.Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 1989.
- [5] I.Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, and A.Stephen Morse, "Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 36, no. 11, pp. 1241-1253, November, 1991.
- [6] H.K.Khalil, Nonlinear Systems, Mcmillan, 1991.
- [7] R.Marino, I.Kanellakopoulos, and P.V.Kokotovic, "Adaptive tracking for feedback linearizable SISO systems", in Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, FL, Dec., pp. 1002-1007, Dec., 1989.
- [8] P.K.Sinha, Electromagnetic Suspension Dynamics & Control, IEEE Control Engineering Series, 1987.
- [9] J.J.E. Slotine and W.L.I., Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.
- [10] M.W.Spong, "Modeling and Control of Elastic Joint Robots", Trans. ASME, J of Dyn. Sys, Meas., and Cont, Vol 109, pp. 310-319, Dec. 1987.
- [11] M.W.Spong and M.Vidyasagar, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, 1989.