

로봇 매니플레이터의 강인한 제어

이 형기*, 이 문노, 정 명진
한국과학기술원 전기 및 전자공학과

Robust control of robot manipulators

Hyung Kyi Yi, Moon No Yi, and Myung Jin Chung
Department of Electrical Engineering, KAIST

ABSTRACT

In this paper, we derive a simple robust nonlinear control scheme for n-link robot manipulators subject to parameter uncertainty. By using the theory of variable structure system(VSS) and taking advantage of the important property of the robot dynamics, the stability of the derived control scheme is proved. This scheme utilizes the desired trajectory outputs, which can be calculated a priori, instead of the actual joint outputs in the nonlinear compensation controller. So the amount of on-line calculations is largely reduced, and as a result, this scheme can be implemented much more efficiently.

I. 서론

현재 상용화되고 있는 로봇은 PID알고리즘을 적용한 제어방식이 이용되고 있다. 그러나 비선형성, 각 링크간의 coupling, 기계적인 마찰력등 로봇의 동력학적 특성 때문에 이같은 제어방식은 고속 정밀제어가 어렵다. 이런 어려움을 해결하기 위해 로봇 동력학을 이용하는 다이나믹 제어방식이 제안되었다. 대표적인 예로 computed torque method는 로봇 동력학을 풀이 보상함으로써 로봇의 원하는 경로에 따라 토크 명령을 생성한다. 이 방식은 로봇의 동적 모델과 파라미터를 정확히 알아야 제어를 구성할 수 있다. 그러나 기계적인 마찰력, 기어의 backlash등 때문에 로봇의 동적 모델과 로봇 파라미터를 정확히 구하기가 어렵다. 이런 문제를 해결하기 위해 적응 제어방식과 가변구조 제어방식등이 제안되었다. 적응 제어기는 로봇 파라미터를 모델 경우 좋은 특성을 얻을 수 있으나 제어기의 구조가 복잡하여 고속의 CPU를 필요로 한다. 가변구조 제어기는 적응 제어기에 비해 구조가 간단하고 uncertainty의 bound가 작은 경우에 강인한 특성을 가진다. 그리고 외란이나 시스템의 모델링 오차에 대해 강인한 제어를 필요로 하는 환경에서 적응 제어기보다 좋은 특성을 가진다. Young[1]은 로봇 매니플레이터에 가변구조 제어를 처음으로 사용하였고, Yi-Feng chen[2]은 로봇 동력학을 구성하는 행렬 요소들의 불확실성 영역을 이용하여 가변구조 제어를 설계하였다. 그러나 위의 제어기들은 로봇의 uncertainty의 bound를 알아야하는데, 실제로 uncertainty의 bound를 구하기가 어렵다. Song and Gao[3]은 uncertainty가 파라미터에만 존재한다고 가정하여, 파라미터의 uncertainty만을 고려한 가변구조 제어를 설계하였다. 이 방법은 uncertainty의 bound를 쉽게 구할 수 있다. 그러나 Song and Gao에 의해 제안된 제어기는 actual joint position과 velocity로 구성된 비선형 함수를 매 sampling 순간마다 계산해야 하기 때문에 샘플링 주기가 커지고, 고속의

CPU가 필요하다. 본 논문에서는 on-line 계산량을 줄이기 위해 제어기에 desired position, velocity, acceleration을 사용한다. 제어기에 actual 값대신 desired 값을 사용하면 비선형 함수가 desired position, velocity, acceleration만으로 구성되기 때문에 비선형 함수를 off-line으로 미리 계산할 수 있으므로, 실시간 계산량이 많이 줄어든다.

II. 가변구조 제어기의 설계

N개의 축을 가진 로봇 매니플레이터의 Euler-Lagrange 동력학식은 다음과 같다.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad q \in R^n, \tau \in R^n \quad (1)$$

잘 알려진 성질로써, 로봇 동력학식은 passive한 특성을 가진다. 즉, $M(q) - 2 \cdot C(q, \dot{q})$ 이 Skew-Symmetric한 행렬이다. 또 로봇 동력학식은 링크질, 질량, inertia등의 로봇 파라미터에 대하여 선형으로 표현된다. 즉, 로봇 동력학식은 로봇 파라미터로 구성된 벡터(θ)와 비선형 함수를 요소로 가지는 $n \times p$ 행렬(Y)의 곱으로 표현된다.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (2)$$

본 논문에서는 로봇의 동적 모델은 정확히 알고 있고 uncertainty는 파라미터에만 있는 경우만 고려한다. 그리고 각 파라미터의 uncertainty의 upper bound는 측정해서 주어졌다고 가정한다.

$$|\hat{\theta}_i| = |\theta_i - \theta_{0i}| \leq \rho_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3)$$

여기서 θ_{0i} 는 nominal parameter이고 ρ_i 는 각 파라미터 uncertainty의 upper bound이다. 제어입력은 파라미터의 nominal 값을 이용한 보상부분과 가변구조 형태를 가지는 부분으로 구성된다. 다음과 같은 제어입력을 정의한다.

$$\tau = Y(q_a, \dot{q}_a, \ddot{q}_a)(\theta_0 + u) - Ks \quad (4)$$

여기서 $u_i = -\rho_i \text{sgn}(\xi_i)$, $i = 1, \dots, p$

ξ_i 는 $Y^T s$ 행렬의 i 번째 요소이다.

$e = q - q_a$, $s = \dot{e} + \lambda e$, $\lambda > 0$

$K = \sigma I$, $\sigma > 0$, q_a 는 desired position 값이다.

Y 행렬은 actual 값대신 desired 값을 사용한다.

(4)식의 제어 입력을 (1)식의 로봇에 적용하면, 간단한 계산과정을 거쳐 다음과 같은 closed loop error equation을 구할 수 있다.

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Ks + \Delta W(s, e) = W \quad (5)$$

여기서 $W = Y(y_a, \dot{y}_a, \ddot{y}_a)(\hat{\theta} + u)$

$\Delta W(s, e) = (Y(q, \dot{q}, v, a) - Y(q_a, \dot{q}_a, \ddot{q}_a))\theta$

$v = \dot{q} - s$, $a = \dot{v} = \ddot{q} - \dot{s}$

제어기에 actual 값 대신 desired 값을 사용하면 (5)식에 $\Delta W(s, e)$ 라는 추가적인 오차부분이 나타나게 된다.

Lemma 1) 제어기에서 $\Delta W(s, e)$ 를 보상해주기 위해 $-s^T \Delta W(s, e)$ 의 upper bound를 구하여야한다. Sadegh and Horowitz[4]는 $-s^T \Delta W(s, e)$ 의 upper bound를 구하였다.

$$-s^T \Delta W(s, e) \leq s^T (\lambda \cdot M(q) + b_1 I) s + s^T (-\lambda^2 \cdot M(q) + b_2 I) e + b_3 (\|s\|^2 \|e\| + \lambda \cdot \|s\| \|e\|^2) \quad (6)$$

여기서 b_1, b_2, b_3 는 항상 양의 값을 가진다.

Lemma 2) $s^T W$ 는 항상 non-positive 값을 가진다.

$$s^T W = s^T Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) (\hat{\theta} + u) \leq 0 \quad (7)$$

proof)
$$s^T W = s^T Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) (\hat{\theta} + u) = (Y^T s)^T (\hat{\theta} + u) = (Y^T s)^T \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{\theta}_i - \rho_i \operatorname{sgn}(\xi_i) \\ \vdots \end{bmatrix} = [\dots + (\xi_i \hat{\theta}_i - \rho_i |\xi_i|) + \dots] \leq 0$$

Theorem) 4)식의 제어입력을 (1)식의 로봇 동력학식에 적용할 때 closed loop error system(5)은 locally asymptotically stable하다.

Proof) closed loop error system에 대한 Lyapunov function candidate를 다음과 같이 정의한다.

$$V(t, s, e) = \frac{1}{2} s^T M(q) s + \frac{1}{2} e^T K e \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{M}(q) s + \frac{1}{2} s^T \dot{M}(q) s + e^T K \dot{e} \\ &= s^T (-C(q, \dot{q}) s - K s - \Delta W + W) \\ &\quad + \frac{1}{2} s^T \dot{M}(q) s + e^T K s - \lambda \cdot e^T K e \\ &= -\alpha \|s\|^2 - s^T \Delta W + s^T W + e^T K s - \lambda \cdot \alpha \|e\|^2 \end{aligned}$$

Lemma 1과 Lemma 2에 의해 \dot{V} 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -[\alpha - \lambda \cdot \lambda_M - b_1 - \frac{b_3}{4}] \|s\|^2 \\ &\quad - \lambda \cdot [\alpha - \frac{b_3}{4}] \cdot \|e\|^2 - \lambda^2 \cdot s^T M(q) e \\ &\quad + (\alpha + b_2) \|s\| \|e\| - b_3 \|s\|^2 \cdot [\frac{1}{2} - \|e\|]^2 \\ &\quad - \lambda \cdot b_3 \|e\|^2 \cdot [\frac{1}{2} - \|s\|]^2 \\ &\quad + (1 + \lambda) \cdot b_3 \|s\|^2 \|e\|^2 \\ &\leq -[\alpha - \lambda \cdot \lambda_M - b_1 - \frac{b_3}{4}] \|s\|^2 \\ &\quad - \lambda \cdot [\alpha - \frac{b_3}{4}] \cdot \|e\|^2 \\ &\quad + (\lambda^2 \cdot \lambda_M + b_2 + \alpha) \|s\| \|e\| \\ &\quad + (1 + \lambda) \cdot b_3 \|s\|^2 \|e\|^2 \end{aligned}$$

Let $(\lambda^2 \cdot \lambda_M + b_2 + \alpha) = 2\eta$, λ_M 은 $M(q)$ 의 최대 고유치이다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -[\alpha - \lambda \cdot \lambda_M - b_1 - \frac{b_3}{4} - \eta] \|s\|^2 \\ &\quad - \lambda \cdot [\alpha - \frac{b_3}{4} - \eta] \cdot \|e\|^2 + (1 + \lambda) \cdot b_3 \|s\|^2 \|e\|^2 \end{aligned}$$

Let $\alpha = \alpha - \lambda \cdot \lambda_M - b_1 - \frac{b_3}{4} - \eta$, $\beta = \lambda \cdot [\alpha - \frac{b_3}{4} - \eta]$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\alpha - \lambda \cdot \lambda_M - b_1 - \frac{b_3}{4} - \eta) \|s\|^2 - \beta \|e\|^2 + \gamma \|s\|^2 \|e\|^2 \\ &\leq -(\|e\|^2 (\beta - \gamma \|s\|^2) + \alpha \|s\|^2) \end{aligned} \quad (9)$$

만약 $(\beta - \gamma \|s\|^2) \geq 0$ 이면 $V \leq 0$ 이다. 즉, $\|s\| \leq \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ 인 영역에서는 closed loop error system은 asymptotically stable하다. 그리고 K행렬을 크게하면 β 가 커져 stable한 영역을 충분히 크게 할 수 있다.

III. Simulation

한 예로써 2개의 축을 가진 planar arm에 II장에서 제안된 제어기(4)를 적용한다. 그림1은 두개의 축을 가진 planar arm을 나타낸다. 로봇 팔에 부착된 부하(load)로 인해 로봇 파라미터는 변화하게 되고 부하를 모르기 때문에 로봇 파라미터에 uncertainty가 존재하게 된다. 2개의 축을 가진 planar arm에 대하여 로봇 동력학식을 구하고 파라미터에 대하여 선형화하면, 다음과 같은 로봇 파라미터로 구성된 벡터(θ)와 비선형 함수를 요소로 가지는 $n \times p$ 행렬(Y)을 구할 수 있다.

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta = \tau, \quad \theta \in R^6 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 & \theta_2 &= m_2 l_2^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} & \theta_4 &= m_1 l_{c1} \\ \theta_5 &= m_2 l_1 & \theta_6 &= m_2 l_2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y_{11} &= \ddot{q}_1 & y_{12} &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ y_{13} &= \cos(q_2)(2\ddot{q}_1 \cdot \ddot{q}_2) - \sin(q_2)(\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2) \\ y_{14} &= y_{15} = g \cos(q_1) & y_{16} &= g \cos(q_1 + q_2) \\ y_{21} &= 0 & y_{22} &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ y_{23} &= \cos(q_2) \ddot{q}_1 + \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ y_{25} &= y_{24} = 0 & y_{26} &= g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (12)$$

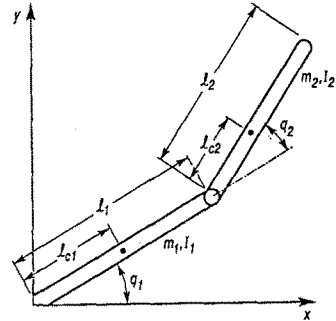


그림 1. 두 개의 축을 가진 planar arm

무부하시 로봇 각축의 inertia, 링크길이, 관성 모멘트 등은 표1과 같은 값을 가진다.

m_1	m_2	l_1	l_2	l_{c1}	l_{c2}	I_1	I_2
10	5	1	1	0.5	0.5	$\frac{10}{12}$	$\frac{5}{12}$

표 1. 무부하시 로봇 파라미터

로봇에 모르는 부하를 부착했을 때 2번째 축의 로봇 파라미터인 $m_2 l_{c2}, I_2$ 는 $m_2 + \Delta m_2, l_{c2} + \Delta l_{c2}, I_2 + \Delta I_2$ 로 변화하게 된다. uncertainty가 다음과 같은 범위에 있는 경우에 대해서 강인한 제어를 설계한다.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta m_2 \leq 10 & 0 &\leq \Delta l_{c2} \leq 0.5 \\ 0 &\leq \Delta I_2 \leq \frac{15}{12} \end{aligned} \quad (13)$$

표2은 모르는 부하를 부착했을 때 θ 의 nominal 값을 나타낸 것이고 표3는 $\hat{\theta}$ 의 uncertainty의 upper bound를 나타낸다.

θ_{10}	θ_{20}	θ_{30}	θ_{40}	θ_{50}	θ_{60}
13.33	9.167	8.75	5	10	8.75

표 2. 모르는 부하를 부착했을 때의 nominal 파라미터

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
5	7.5	6.25	0	5	6.25

표 3. 모르는 부하를 부착했을 때의 $\hat{\theta}$ 의 upper bound

앞 장의 제어입력은 불연속적인 스위칭항을 포함하여 chattering을 유발시킨다. 그래서 simulation에서는 signum 함수를 saturation 함수로 수정하였다. 이 때 (4)식의 u 벡터의 요소들은 다음과 같다.

$$u_i = \begin{cases} -\frac{p_i \xi_i}{|\xi_i|} & \text{if } |\xi_i| > \varepsilon_i \\ -\left(\frac{p_i}{\varepsilon_i}\right)\xi_i & \text{if } |\xi_i| \leq \varepsilon_i \end{cases} \quad (14)$$

simulation에서 사용한 상수는 $\sigma=150$, 모든 i 에 대해 $\varepsilon_i=0.2$, $\lambda=30$ 으로 하였다. Desired trajectory는 cartesian space에서 (0, 1.7)에서 (1.7, 0)까지의 직선운동으로 설정하였다. 그림2는 desired trajectory를 나타내고 그림3은 각 축의 joint position error를 나타낸다. 각 축의 rms error는 0.029, 0.057 degree이다. 그리고 그림3은 각 축의 제어입력을 나타낸다.

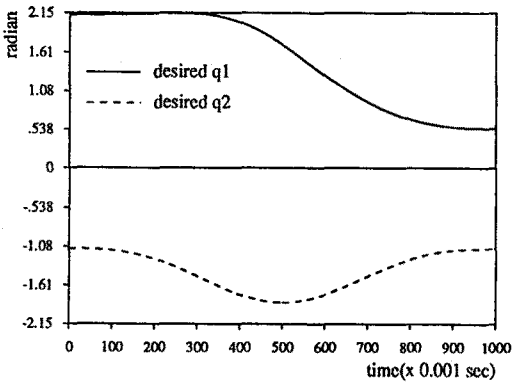


그림 2. desired trajectory

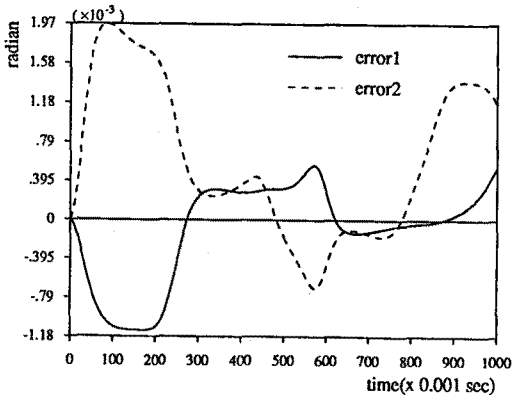


그림 3. 각 축의 position error

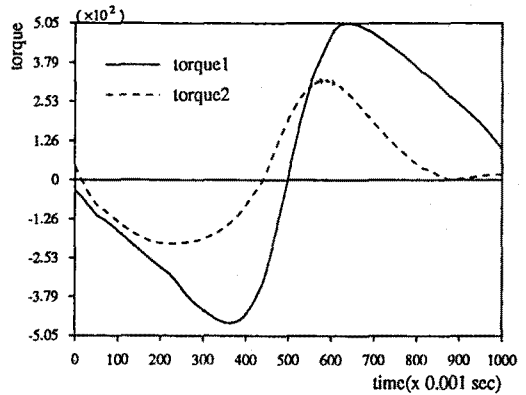


그림 4. 각 축의 제어입력

IV. 결론

로봇 파라미터의 uncertainty를 고려한 가변구조 제어를 설계하고, simulation을 통하여 알고리즘의 유용성을 확인하였다. Song and Gao에 의하여 제안된 제어기는 비선형 보상기의 입력으로 actual 값을 사용하여, 매 샘플링 순간마다 많은 계산시간을 요구한다. 그래서 고속의 CPU가 필요하고 샘플링 주기가 커진다. 본 논문에서는 actual 값대신에 desired 값을 비선형 보상기의 입력으로 사용하여 원하는 경로를 따라 off-line으로 미리 비선형 함수를 계산하여, on-line계산량이 줄어들고 샘플링 주기를 작게할 수 있어 적은 비용으로 쉽게 구현할 수 있다.

참고 문헌

- [1] K-K. D. Young, " Controller design for a manipulator using theory of variable structure systems ", *IEEE Trans on Syst. Man. Cybern.*, vol.8, pp.101-109, 1978
- [2] Yi-Feng Chen et al, " A New and Simple Algorithm for Sliding Mode Trajectory Control of the Robot Arm ", *IEEE Trans. on Automatic Contr.*, vol.35, no. 7, July 1990
- [3] Young-Duan Song and Wei-Bing Gao, " Path tracking control of robot manipulators via the VSS approach ", *INT. J. Systems Sci.*, vol.22, no.1, pp 151-163, 1991
- [4] Nader Sadegh and Roberto Horowitz, " Stability and Robustness Anaysis of a class of Adaptive Controllers for Robotic Manipulators. ", *INT. J. Robotics Res.*, vol.9, no.3,