

# 여유 자유도 로봇의 역기구학에 관한 연구

조동권<sup>o</sup>, 성영휘, 정명진

한국과학기술원 전기및전자공학과

## An Inverse Kinematics of Redundant Manipulators

Dongkwon Cho<sup>o</sup>, Younghwee Sung, Myungjin Chung

Dept. of Electrical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology

**Abstract** - In this paper, an inverse kinematics of redundant manipulators is proposed. Optimality-constraint based inverse kinematic algorithms have some problems because those algorithms are based on necessary conditions for optimality. Among the problems, switching from a maximum value to a minimum value may occur and make an inverse kinematic solution unstable while performing a given task. An inverse kinematic solution for protecting from the switchings is suggested. By sufficient conditions for optimality, the configuration space is defined as a set of regions, potentially good configuration region and potentially bad configuration region. Inverse kinematics solution within potentially good configuration region can provide joint trajectories without both singularities and switchings. Through a simulation of tracing a circle, we show the effectiveness of this inverse kinematics.

### 1. 서론

로봇 시스템에서는 여러 성능 지수들이 원하는 성능 특징의 양을 정하기 위하여 부가적으로 사용된다. 여유 자유도 로봇에 있어서는, 특이점 회피(singularity avoidance), 장애물 회피(obstacle avoidance), 관절 한계 회피(joint limit avoidance), 관절 속도 최소화(joint velocity minimization), 관절 가속도 최소화, 관절 토크 최소화 등을 성능 지수(performance measure)로 선택하고 있다. 특히, 로봇의 능숙한 조작(dexterous manipulation)을 위하여 로봇의 성능 특징을 표현할 수 있는 성능 지수의 선택도 중요하다. 능숙(dexterity)의 개념은 자코비안 행렬의 행렬식(determinant)이나 조건 수(condition number)로 표현되는 선형 시스템의 미분 관계의 좋은 정도, 혹은 관절 각들의 잘 조화된 분포로 인한 자연스러운 로봇 자세로 설명할 수 있다[Klein,87]. 이 정의에 따르면 아마도 특이점에 있을 때 능숙함의 정도가 가장 좋지 않은 자세라 할 수 있다. 이런 관점에서 특이점 회피 성능 지수가 로봇의 능숙한 조작을 위한 지수로 이용되는 경우가 많다.

여유 자유도를 이용하기 위한 방법들에 대해서는 많은 연구자들이 널 공간 투영 연산자(null space projection operator)와 자코비안 의사 역행렬(Jacobian pseudoinverse matrix)을 사용해왔다. 일반적으로 작업 공간(task space)에서 닫힌 경로를 추적하는 작업에 대해서 의사 역행렬을 이용한 방법(pseudoinverse-based scheme)은 보존적 관절 운동(conservative joint motion)을 보장하지 못한다고 알려져 있다[(Bailliu,85), (Baker,88)]. 한편, 최적화 필요 조건을 기반으로 한 접근 방법들은 보존적 관절 운동(conservative joint motion)을 보장하는 것으로 알려져 있다[(Angeles,89), (Chang,86)]. 또한 확장된 자코비안 행렬을 기반으로 하여 적응 기법을 로봇이

운동하는 동안 원하는 궤적의 추적을 수행하기 위하여 로봇의 자세(configuration)를 직접 제어하는데 이용하기도 했다[Seraji,89].

그러나 이런 방법들은 몇가지 단점을 가지고 있다. 먼저 통시적 최적화(global optimality)가 보장이 안된다. 왜냐하면 이런 방법들은 순시적인 경로 정보(local path information)를 이용하기 때문이다. 또한, 여유도(redundancy)를 이용하기 위해 최적화 필요 조건을 기반으로 한 방법들은 필요 조건에 의하여 유도된 궤적이기 때문에 항상 최적의 궤적이라고 할 수 없다. 이 방법들은 최대값 혹은 최소값의 성능 지수를 가진 궤적을 생성할 수가 있고, 또한, 일반적으로 알고리즘 특이점이 존재하게 된다[(Angeles,89), (Baillieu,87)]. 그리고 성능 지수에 따라서는 특이점 자세로 로봇을 인도하는 경우도 있다. 최근에는 3개 관절을 가진 평면 로봇인 경우에 위에서 언급한 문제점들을 해석하고자 성능 지수를 이용하여 최적화 제한 함수에 해당하는 자세를 도식해보으로써 자세 공간과 작업 공간상에서의 특성을 분석한 바 있다[Choi,91]. 일반적으로 최적화 제한 조건( $Z^T \nabla H = 0$ , 여기서  $Z$ 는 자코비안의 널공간 기저 벡터이고,  $\nabla H$ 는 성능 지수의 경사 벡터이다)을 만족하는 평형 상태는 순시적으로 최대 혹은 최소의 값을 갖는 상태이다. 그렇기 때문에 최적화 필요 조건을 만족하는 궤적을 구하는 역기구학 알고리즘일지라도 그 상태가 어떤 상태인지 확인할 필요가 있다. 부가적인 목적을 위한 성능 지수가 주어진 경우, 기구적으로 여유 자유도가 있는 로봇을 위하여 성능 지수의 최적해를 위한 충분 조건을 유도하고, 그 조건에 의하여 최적화 제한 조건을 기반으로 한 방법을 관찰하고, 유도된 조건의 유용성을 보이기도 했다[Cho,92](일반적으로 주어진 일을 주 목적 작업이라 하고 최적화하고 싶은 작업을 부가적인 목적의 작업이라 칭한다). 또한, 자코비안 기법에서 존재하는 알고리즘 특이점이 최대값에서 최소값으로의 스위칭(switching)이 일어나는 자세임이 밝혔다.

본 논문은 여유 자유도 로봇에 대한 충분 조건을 이용하여 최적화 제한 조건을 기반으로 한 방법들에서 일어나는 스위칭을 제한하도록 하는 역기구학을 제안한다. 본 논문에서는 앞서 설명한 능숙한 조작의 관점에서 특이점 회피를 위한 성능 지수 중 가장 널리 쓰이는 조작 성능 지수를 능숙한 조작(dexterous manipulation)을 하게 하는 성능 지수라 생각하고 이 성능 지수를 통하여 로봇의 자세를 결정하도록 하겠다. 이 성능 지수를 통하여 유도된 충분 조건을 만족하는 자세 영역을 좋은 자세 가능 영역으로 정의하고, 이 영역을 역기구학을 위한 해 영역(solution region)으로 제한한다. 그렇게 함으로써 최대 궤적으로부터 최소 궤적으로의 스위칭을 방지하고, 알고리즘 특이점으로 인한 작업 영역이 제한되는 것을 보완한다. 앞으로, 2장에서는 문제를 설정하고, 해결 방법을 제시하려하며, 3장에서는, 시뮬레이션을 통하여 제안한 역기구학의 효용성을 보이도록 하겠다.

## 2. 최적해 조건과 문제 설정

최적화 제한 조건을 기반으로 한 방법들은 알고리즘 특이점이나 가역 작업 공간의 제한을 가져올 수 있다. 이런 문제점들은 여러 역기구학에서 많이 토의되어 왔다[Baillieu,85]. 그러나 최적화 제한 조건을 사용하여 역기구학 알고리즘을 개발할 때에는 작업 공간에서 주 목적 작업에 대한 역기구학 알고리즘을 정의할 수 있는지를 알아야 한다. 3축 평면 로봇에 대하여 자세 공간에서 여유 자유도 로봇에 대한 부가적인 작업의 성능을 특성화하고 순시적 최적화 방법의 해가 통시적 효과를 줄 수 있는 한 방법이 연구되었다[Choi,91]. 이 방법은 순시적 경로 정보를 이용할 때 최적화 제한 조건의 위상적 특성에 근거하며, 조작 성능 지수에 대하여 최적화 제한 조건을 만족하는 모든 해를 그려보고 관찰함으로써 이 자세들의 특징을 분석하려고 노력했다. 일반적으로 제한 조건을 기반으로 하는 역기구학 알고리즘은 단지 최적화 필요 조건만으로 만들어졌기 때문에 극한점(extrema)은 성능 지수의 값이 순시적으로 최대 혹은 최소가 될 수 있다. 그러므로 부가적인 목적 작업에 대해서 성능지수에 따라 평형 상태가 극한점들 중에서 항상 최대 혹은 최소 중 한 가지들만 구성되도록 제한할 필요가 있다.

이 문제를 해결하기 위하여 최적화의 조건을 유도하고, 시물레이션을 통하여 확장된 자코비안 방법이나 닫힌 형태의 해[Chang,86]같은 최적화 제한 조건을 기반으로 한 역기구학 알고리즘들에서 생기는 문제점을 분석하고, 자세 공간을 통하여 가역 공간은 초기 자세에 따라 제한됨을 보인 바가 있다[Cho,92]. 또한, 그 논문에서는 최적화 제한 조건을 기반으로 하는 방법들이 작업을 수행하는 도중에 알고리즘 특이점을 어떻게 만나는지를 밝혔으며, 그런 경우에는 작업 수행을 완수하지 못하거나 최소값을 갖는 자세를 생성함을 보였다.

일반적으로 여유 자유도 로봇 제어 문제는 다음과 같이 생각할 수 있다. 로봇의 자세  $\theta$ 에 대한 부가적인 목적 작업으로 한 성능 지수  $H(\theta)$ 를 최대화한다고 하자. 이때 기구학적으로 다음과 같은 제한 조건식을 만족해야 한다.

$$F_i(\theta) = f_i(\theta) - x_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

본 논문에서  $\nabla$ 는  $\theta \in R^n$ 에 대한 어떤 함수의 경사 벡터를 의미하고,  $\nabla^2$ 는 헤시안 행렬을 나타내도록 하겠다. 그리고 모든 벡터는 열 벡터(column vector)로 표현한다.

최적 자세  $\theta^*$ 는 기구학 방정식  $F_i(\cdot)$ 을 만족하는 자세들( $\theta^*$ 을 지나는 자체 운동 다양체(self-motion manifold)[Burdick,91] 중의 한 자세라고 정의하자. 만약 자체 운동 다양체를 기구식 제한 조건을 만족하는 아크(feasible arc)라 정의한다면, 한 변수  $l$ 을 사용하여 그 아크를 매개 변수화할 수 있다.  $\theta(l)$ 를 아크위에 놓으면  $\theta(0) = \theta^*$ 이다. 이때 아크에 대한 접선 벡터  $Z$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$Z \equiv \frac{d\theta(l)}{dl} \in R^n \quad (2)$$

이때 변수  $l$ 은 자세 공간에서 평형 점(equilibrium point)  $\theta(0) = \theta^*$ 에서  $\theta(l)$ 까지의 길이를 의미한다. 여유 자유도가 하나일 경우의 해는 실행 가능한 곡선으로 정의되고, 둘일 경우는 곡면(surface)이 되고 그 이상일 경우는 하이퍼 곡면(hyperplane)이 된다.

$l$ 에 대하여 기구학 식의 일차 및 이차 미분은 영이므로 체인 규칙(chain rule)에 의하여 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$JZ = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}((\nabla F_i)^T Z) = Z^T \nabla^2 F_i Z + (\nabla F_i)^T \frac{dZ}{dt} = 0, \quad \forall i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

최적 조건을 구하기 위하여 평형 상태  $\theta^* = \theta(l)|_{l=0}$  근처에서 성능 지수  $H$ 에 대한 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)를 하여 조건을 유도할 수 있다. 이때 급수의 전개는 기구식 제한 조건을 만족하는 자체 운동 다양체 상에서 이루어져야만 한다. 기구학 식  $F_i(\theta) = 0, i = 1, \dots, m$ 을 만족하며 성능 지수  $H(\theta)$ 를 최대화하는 최적 상태의 충분 조건은 다음과 같이 정리된다[Cho,92].

$$Z^T \nabla H = 0 \quad (5)$$

$$Z^T B Z < 0 \quad (6)$$

여기서

$$B = \nabla^2 H^* - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 F_i,$$

$$J^* \equiv J^T (JJ^T)^{-1} \in R^{n \times m},$$

$$\lambda^T = (\nabla H^*)^T J^*$$

이며,  $\lambda_i$ 는 벡터  $\lambda$ 의  $i$ 번째 성분이다.

최적화 문제에 대한 충분 조건은 식(5)과 (6)으로 요약될 수 있다. 이 식(5)(6)을 최적 해 조건이라 칭하자. 여유 자유도가 하나일 경우에  $Z$ 는  $n \times 1$ 차원 벡터로 표현된다. 여유 자유도가 하나보다 큰 경우에는 식(6)을 자체 운동 다양체의 유효한 모든 방향(feasible direction)에 검사해야 한다. 이때  $Z$ 는  $n \times (n-m)$ 의 행렬로 표현되며, 식(6)은  $(n-m) \times (n-m)$  차원의 정방 행렬이 되고, 최적 해 조건은 행렬  $Z^T B Z$ 이 음의 유한 행렬(negative definite matrix)일때 원하는 최대값 조건이 된다.

식  $Z^T B Z = 0$ 을 만족하는 자세를 변곡점(inflexion point)이라 정의하고, 이런 점들에 의하여 이루어지는 집합을 변곡 곡선(Inflexion Locus)이라 정의한다. 그리고 자세 공간은  $Z^T B Z < 0$  조건을 만족하는 자세들의 집합과  $Z^T B Z > 0$ 를 만족하는 자세들의 집합을 각각 좋은 자세 가능 영역 PGCR(Potentially Good Configuration Region)과 나쁜 자세 가능 영역 PBCR(Potentially Bad Configuration Region)으로 정의를 한다. 그러면 자세 공간은 변곡 곡선, PGCR, 그리고 PBCR로 구성된다. 3축 평면 로봇에 대하여, 논문 [Cho,92]는 자세 공간상에서 위에서 언급한 PGCR와 PBCR 그리고 최적화 제한식을 만족하는 곡선을 함께 보였다. 또한, 자세 공간에서  $Z^T h = 0$ 인 최적화 제한 조건을 만족하는 곡선과  $Z^T B Z = 0$ 을 만족하는 곡선과의 교점들이 알고리즘 특이점들이다. 이 자세는 최대점 자세에서 최소점 자세로의 스위칭이 일어나는 자세라고도 할 수 있다. 이런 자세들에서는 관절 속도가 갑자기 증가한다. 따라서 로봇의 좋은 자세를 유지하는 관절 제어를 생성하기 위해서는 PGCR을 역 기구학 알고리즘의 해 영역(solution range)으로 제한할 필요가 있다. 역기구학 해를 PGCR로 제한하도록 문제를 설정하면 다음과 같다.

$$\text{Maximize } H(\theta)$$

$$\text{s.t. } f(\theta) = x \quad (7)$$

$$A \equiv Z^T B Z < 0$$

행렬  $A$ 가 음의 유한 행렬일 조건은 대칭행렬

$g = \frac{(A+A^T)}{2}$  이 음의 유한 행렬일 경우이며, 다시  $g$ 가 음의 유한 행렬일 조건은 행렬  $g$ 의 모든 leading principal minor가 음일 경우이다[Nakamura,91]. 즉,

$$\det g_i < 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, r \quad (8)$$

여기서  $r = n - m$  는 여유 자유도의 수이다.

위의 행렬 성질을 이용하여 위 문제를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } H(\theta) \\ &\text{s.t. } f(\theta) = x \\ &G < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 벡터  $G = [\det g_1 \det g_2 \dots \det g_r]^T$ 이다.

부등호에 의하여 구분되는 영역내로 해 영역을 제한하는 방법으로 sigmoid 함수를 생각해 볼 수 있다. 즉,

$$S_i(G_i) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha G_i}}, \quad \text{for } i = 1, \dots, r \quad (10)$$

이 함수는 부등호를 만족하는 영역에 큰 값을 할당함으로써 장벽을 부가하는 기능을 한다.

이 문제를 해결하기 위하여 부등호를 제거한 형태의 문제로 다시 설정할 수 있다. 이 문제를 AP(Augmented Problem)라 칭한다.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } P = H(\theta) + w^T S(\theta) \\ &\text{s.t. } f(\theta) = x \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $w$ 는 가중치 행렬이고, 행렬  $S = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_r]^T$ 로 표현한다.

그러면 문제 AP의 최적화 조건은 다음과 같다.

$$Y = Z^T \nabla P = 0 \in R^{(n-m) \times 1} \quad (12)$$

여기서  $\nabla P = \nabla H + w^T \sum_{i=1}^r \frac{dS}{dG} \nabla G_i$ 이다.

기구학과 최적화 조건을 조합하면  $n$ 개의 변수에 대하여 같은 수의 식으로부터  $n$ 개의 변수를 풀 수 있다. 역기구학은 이 식들로부터 조인트 값을 구하는 일이다. 이 식들을 연립함으로써 해를 구하거나, 확장된 자코비안 방법으로 해를 구할 수도 있다.

### 3. 수치적 예

수치적 예를 보이기 위하여 특이점들을 회피하기 위한 여러 성능지수 중 여러 문헌에서 부가적인 목적으로 널리 사용되는 조작 성능지수 (manipulability measure)를 이용하겠다. 조작 성능지수는 다음과 같이 표현된다[(Baillieu,85,86),(Yoshikawa,84)].

$$H = \sqrt{\det(JJ^T)} \quad (13)$$

3축 평면 로봇을 생각해 보자. 작업 공간  $x \in R^2$ 은 2차원 평면이며 로봇의 관절이 셋이므로 기구적으로 비 특이점에서는 여유 자유도가 하나이다. 그리고 로봇의 각 축의 길이는 다음과 같다고 가정한다.  $l_1 = 3, l_2 = 2.5$  그리고  $l_3 = 2.0$  단위(units)이다. 그리고 로봇의 작업을 손끝(end-effector)이 한 원을 추적하는 것을 주 작업으로 선택하였으며, 다음과 같은 식으로 표현한다.

$$x = \begin{bmatrix} -R \cos(2\pi t) + C \\ -R \sin(2\pi t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

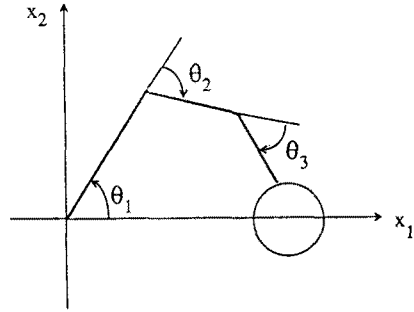


그림 1 3축 평면 로봇

여기서  $R$ 은 반지름의 길이이고  $C$ 는 원의 중심으로  $x_1$ -축의 위치이다. 작업은 시계 반대 방향으로 반경  $R$ 단위이고 중심은  $(C, 0)$ 인 원을 단위 시간내에 추적하는 것으로 선택하였다. 그래서 초기 위치는 시간  $t_0 = 0$ 에서  $(C - R, 0)$ 이고, 시간  $t_1 = 1$ 에서 최종 위치는 초기 위치와 동일하다. 그리고 로봇의 베이스로부터 가장 먼 거리는 시간  $t = 1/2$ 일 때이다. 그러므로 이 위치를 주기 작업의 중간 위치로 표현하고 그 위치는  $(C + R, 0)$ 이다. 그림 1에서 3축 평면 로봇과 작업을 보여주고 있다.

여유 자유도가 1이므로  $l = 1$ 이고, 벡터  $G$ 와  $S$ 는 1차원이 된다. 그러므로 벡터  $\nabla P$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla P = \nabla H + w \frac{dS}{dG} \nabla G \quad (15)$$

로봇의 손끝이 각 자세에서 주어진 성능 지수를 극대화하도록 하는 자세를 통하여 주어진 작업 계획을 추적한다면, 다음과 같은 식을 얻는다[Baillieu,85].

$$\begin{bmatrix} f(\theta) \\ Y(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

약변을 미분하면 손끝의 속도와 관절의 속도사이의 기구적 관계 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{bmatrix}^T \dot{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

확장된 자코비안 기법은 다음과 같이 표현함으로써 역기구학을 해결할 수 있다.

$$\dot{\theta}(t) = J_e^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

반지름  $R$ 이 1이고 원점의  $x$ 축 좌표값  $C$ 는 3 단위(unit)인 원으로 이루어진 작업을 생각해 보자. 작업의 수행은 초기 위치에 해당하는 자세 운동 다양체중의 한 자세에서 중간 위치에 해당하는 다양체상의 한 자세를 왕복하는 것이 된다. 여섯 자세가 작업 공간의 초기 위치에서 초기 자세로서 최적화 필요조건을 만족하는 자세들이다. 이 자세들을 초기 자세로서 선택한 경우에 대해서 최적화 제한 조건을 기반으로 한 역기구학 알고리즘을 가지고 계획을 생성하

는 경우에 대해서 생각해 볼 수 있다. 논문 [Cho,92]에서는 초기 여섯 자세에 따른 각 관절 궤적을 생성했다. 그 자세들 중에서 최적화 조건을 만족하나 작업 수행 도중 스위칭 자세를 만나, 작업이 중지된 경우가 있었다(그림 2(a) 참조). 이 자세를 초기 자세로 선택하여 작업을 수행해 보자.

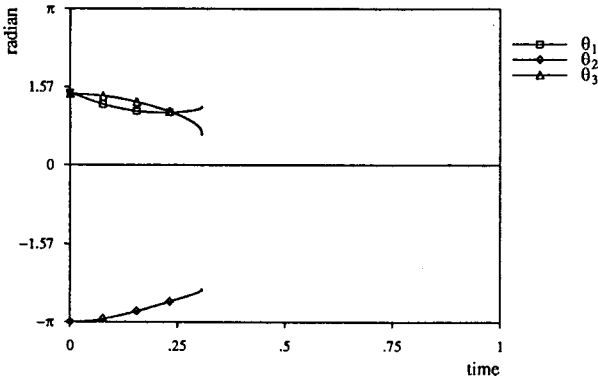
것을 보여주고 있다(여기서, 선택한 상수  $w = 1$ 이고,  $\alpha = 0.01$ ).

#### 4. 결론

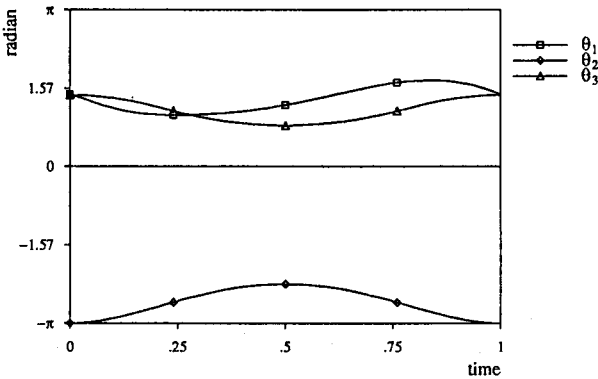
최적화 제한 조건을 기반으로 한 방법들은 원하지 않는 알고리즘 특이점이나 가역 작업 공간의 제한을 가져온다. 본 논문에서는 특이점 회피를 위한 최적해의 충분 조건을 구속 조건으로 하여 문제를 새로 설정하고, 이 문제의 최적해를 구하였다. 최적화 제한 조건에 기반한 방법이 최대값 궤적에서 최소값으로의 스위칭에 의하여 작업 공간이 제한됨을 시뮬레이션으로 보였고, 이 방법을 보완한 새로운 역기구학 해에 의해서 가역 작업 공간이 넓혀짐을 보였다.

#### 참고 문헌

- [Angeles,89] Angeles, J. and Mathur, S. "Resolved-rate control of redundant manipulators with elimination of non-conservative effects", in *Proc. 5th Int. Workshop of robotics research*, 1989, pp. 209 - 216
- [Baillieu,85] Baillieu, J. "Kinematically Programming Alternatives for Redundant Manipulators", in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 722 - 728, 1985
- [Baillieu,87] Baillieu, J. "A Constrained Oriented Approach to Inverse Problems for Kinematically Redundant Manipulators", in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1927 - 1933, 1987
- [Baker,88] Baker, D. R. and Wampler, II, C. W. "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 7, No. 2, pp. 2-21, 1988
- [Burdick,91] Burdick, J. W., Cetin, B. C. and Barhen, J. "Efficient Global Redundant Configuration via Sub-energy Tunneling and Terminal Repelling", in *Proc. Conf. of Robotics and Automation*, pp. 939-944, 1991
- [Chang,86] Chang, P. H. "A Closed-Form Solution for the Control of Manipulators with Kinematically Redundancy", in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 9-14, 1986.
- [Cho,92] Cho, D.K, Choi, B.W., and Chung, M. J. "Singularity-free Condition of Optimal Solution for Kinematical Control of Redundant Manipulators", in *Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS '92)*, pp. 1753-1758, 1993.
- [Choi,91] Choi, B. W., Won, J. H. and Chung, M. J. "Manipulability Constraint Locus for a Redundant Manipulator", in *Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS '90)*, pp. 167-172, 1991.
- [Klein] Klein, C.A., Blaho, B.E., "Dexterity Measures for the Design and Control of Kinematically Redundant Manipulators", *Int. J. Robotics Research*, Vol 6 No. 2, pp 72-73, 1987.
- [Nakamura,91] Nakamura, Y., "Advanced Robotics: Redundance and Optimization", Addison-Wesley Press, pp. 26-28, 1991.
- [Seraji,89] Seraji, H. "Configuration Control of Redundant Manipulators: Theory and Implementation", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, RA-5, No.4, pp. 472-490, 1989.
- [Yoshikawa,84] Yoshikawa, T. "Analysis and Control of Robotic Manipulators with Redundancy", in *Robotics Research: The First International Symposium*, ed. M. Brady and R. Paul, pp. 735-748, 1984.



(a)



(b)

그림 2 관절 궤적

- (a) 최적 제한 조건을 기반으로 한 경우
- (b) 확장된 제한 조건을 기반으로 한 경우

그림 2는 최적 제한 조건을 기반으로 한 경우에 알고리즘 특이점을 만나 작업이 중지된 경우와 AP 문제를 풀 개선된 역기구학 해의 결과를 보여주고 있다. 로봇의 초기 위치에서 최적해 조건을 만족하는 자세는 여럿이 있을 수 있다. 만약, 최적해 조건을 만족하는 한 자세( $\theta = (1.456, 3.143, 1.432)^T$ [radian])를 찾았다고 하자. 이 초기 자세로부터 주어진 원을 추적하는 작업에 대한 역기구학 해를 구하도록 하자. 먼저, 그림 2(a)는 최적 제한 조건인  $Z^T \nabla H$ 인 조건만으로 확장된 자코비안 기법에 의하여 구한 역기구학 해이다. 이 해는 작업을 수행하다가 스위칭 자세를 만나 작업 자체가 제한된 경우이다. 그림 2(b)는 최적해 조건을 역기구학 해의 영역으로 제한하여 구속 조건으로 준 경우의 역기구학 해이다. 이 역기구학 알고리즘은 스위칭 자세 근처에서 완만한 속도로 작업을 완수하는