Fuzzy수의 효율적인 산술연산수법

최 규 형
한국전기연구소

An Effective Fuzzy Number Operation Method

Choi, Kyu-Hyoung
KERI

ABSTRACT - *Many optimization problem or multiple* attribute, multiple alternative decision making problem *may* have fuzzy *evaluation factors. In this* case, fuzzy number operation technique is needed to *evaluate and compare object functions which become* fuzzy sets. Generally, fuzzy number operations can be defined by extension principle of fuzzy set theory, but it is tedious to do fuzzy number operations by using extension principle when the membership functions are defined by complex functions. Many fast methods which approximate the membership functions such as triangle, trapezoidal, or L-R type functions are proposed. In this paper, a fast fuzzy number operation method is proposed which do not simplify the membership functions of fuzzy numbers.

1. 서 론

최적계획문제나 다속성 의사결정문제등에 있어서, 목적함수를 구성하는 요인들이 퍼지집합으로 주어질 경우, 목적함수를 계산하고 비교평가하기 위해서는 퍼지數(fuzzy number)의 산술연산이 필요하다. 일반적으로 퍼지수의 연산은 퍼지집합론에서의 확장원리에 의해 정의되지만, 퍼지수의 소속함수(membership function)가 일반형인 경우 그 계산은 용이하지 않다. 이때문에 소속함수의 형태를 삼각형, 사다리꼴형, L-R함수형등과 같은 간단한 함수로 근사해서 효율적으로 퍼지수의 연산을 수행하는 수법들이 제안되어 왔다.

본논문에서는 소속함수의 형태를 간단한 함수로 근사하지 않고, 소속함수를 그대로 이용하여 퍼지수의 덧셈, 곱셈과 같은 산술연산을 정확하고도 효율적으로 수행하는 수법을 제안한다. 제안 수법에서는, 퍼지수의 소속함수의 증가부분과 감소부분으로 나누어, 구간범위와 소속함수의 역함수를 포함한 6개의 파라메터로 표기하고, 이를 이용하여 퍼지수의 산술연산을 행한다.

2.퍼지數의 연산

2.1 퍼지數의 정의

(1)퍼지수의 정의

퍼지수(Fuzzy Number)는 실수공간R 위에서 정의 되고, 볼록(convex)하며 정규화(normalized)되어 있는 퍼지집합이라고 정의할수 있다. 여기서 볼록집합의 개념은 보통집합에서의 개념을 퍼지집합으로 확장한 것으로, 어느 퍼지집합의 모든 수준집합(α-cut set)이 볼록집합이면, 그 퍼지집합을 볼록하다고 본다. 정규화조건은 다음과 같이 최대소속함수값이 1이 되는 것이다.

$$x \in R,\ \mu_A(x)=1 \tag{1}$$

(2)확장원리

퍼지수의 연산결과는 퍼지집합으로 나타나기 때문에, 연산 결과는 소속함수로 표현되는데, 이와같이 퍼지집합과 대응함수로부터 새로운 퍼지집합을 얻는데 적용되는 원칙을 확장원리(extention principle)라고 한다. 확장원리에서는, 함수 f 가

$$f : X \times Y \rightarrow Z \tag{2}$$

의 경우, X 상의 퍼지A와 Y의 퍼지B의 f에 의해 만들어지는 Z상의 퍼지 f(A,B)는, 각 z∈Z에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_{f(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \{\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\} & \text{if } f^{-1}(z)\neq\phi \\ 0 & \text{if } f^{-1}(z)=\phi \end{cases} \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)퍼지수의 연산

확장원리를 적용한 퍼지수의 연산의 예로서, 퍼지수의 덧셈및 곱셈은 다음과 같이 구할수 있다.

$$\forall x,y,z \in R \tag{4}$$

가.덧셈:A(+)B

$$\mu_{A(+)B}(z)= \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{5}$$

나.곱셈:A(.)B

$$\mu_{A(.)B}(z)= \bigvee_{z=x.y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{6}$$

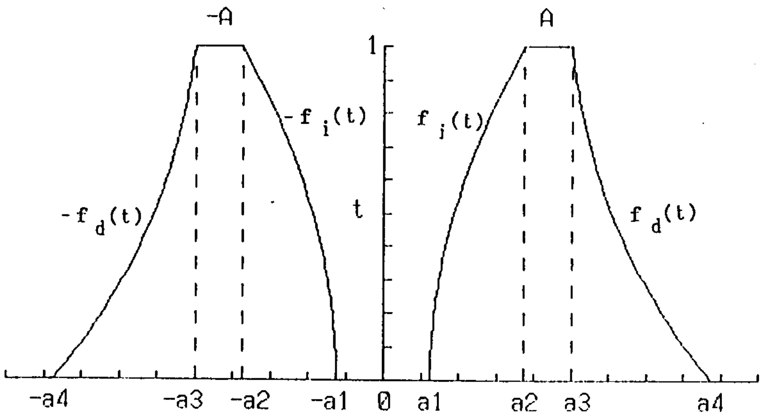

그림1. 퍼지수의 표기

이상과 같이 퍼지수의 연산은 확장원리에 의해 정의될 수 있으나, 퍼지수의 소속함수가 복잡한 형태를 지닌 경우 그 계산은 용이하지 않다. 이때문에 소속함수의 형태를 삼각형함수, 사다리꼴형, 계단함수, 또는 L-R형함수등과 같은 간단한 형태의 특수함수로 근사해서, 효율적으로 퍼지수의 연산을 하는 수법이 제안되어 있다. 다음 절에서는, 소속함수의 형태를 단순한 형태로 근사하지 않고도 효율적으로 퍼지수의 연산을 수행하는 수법에 대해 검토한다.

2.2 제안하는 퍼지數의 연산수법

(1)퍼지수의 표기

퍼지수의 정의에 따르면, 퍼지수의 소속함수는 증가부분(비감소부분), 소속함수치가 1인부분, 감소부분(비증가부분)으로 구성되어 있다. 여기에서는, 그림1과 같은 소속함수로 특징지어지는 퍼지數 A를 다음과 같이 표기한다.

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, f_i, f_d) \quad (7)$$

여기서, a_1, a_2 : A의 소속함수의 증가부분구간의 최소치및 최대치, a_3, a_4 : A의 소속함수의 감소부분구간의 최소치및 최대치, f_i, f_d : A의 소속함수의 증가부분및 감소부분의 역함수

(2)퍼지수의 증가적 2항연산

이상과 같은 퍼지數의 표기법을 이용하면, 퍼지수의 덧셈, 곱셈과 같은 증가적 2항연산(increasing binary operation)의 결과는 다음과 같이 계산된다.

$$Y = A*B = (a_1*b_1, a_2*b_2, a_3*b_3, a_4*b_4, f_i*g_i, f_d*g_d) \quad (8)$$

여기서, $A = (a_1,a_2,a_3,a_4,f_i,f_d)$
$B = (b_1,b_2,b_3,b_4,g_i,g_d)$
* : 증가적 2항연산의 기호

(증명) 퍼지수 A, B의 2항연산의 결과인 퍼지수 Y의 소속함수μ_Y는, A와 B의 소속함수인 $\mu_A(a)$와 $\mu_B(b)$의 각각의 증가부분과 감소부분으로 나누어 계산할수 있으므로[1], 다음과 같이 3부분으로 나누어 계산할수 있다.

(a) $a_1 \le a \le a_2$, $b_1 \le b \le b_2$의 경우;
임의의 $y \in [a_1*b_1, a_2*b_2]$에 대해, Y의 소속함수는,

$$\mu_Y(y) = \max[\mu_A(a) \wedge \mu_B(b)],\ y=a*b \quad (9)$$

로 정의 되므로,

$$\mu_Y(y) = \max[\mu_A(a^*) \wedge \mu_B(b^*)],\ y=a^{*}*b^{*} \quad (10)$$

로 되는 a*와 b*가 반드시 존재한다. 이 영역에서는 $\mu_A(a)$와 $\mu_B(b)$는 비감소의 연속함수이므로, 확장원리의 정의에 따라

$$\mu_A(a^*)=\mu_B(b^*) \quad (11)$$

의 관계가 성립한다. 따라서, 확장원리로부터 얻어진 Y의 소속함수는

$$\mu_Y(y) = \mu_A(a) = \mu_B(b),\ y=a*b \quad (12)$$

의 관계를 만족하게 되므로,

$$\mu_Y(y) = t,\ t \in [0,1] \quad (13)$$

로 놓으면

$$t = \mu_A(a) = \mu_B(b) \quad (14)$$

로부터

$$a = \mu_A^{-1}(t) = f_i(t) \quad (15)$$

$$b = \mu_B^{-1}(t) = g_i(t) \quad (16)$$

가 얻어진다. 따라서, μ_Y의 증가부분은 다음과 같은 역함수로 나타낼수 있다.

$$\mu_Y^{-1}(t) = y = a*b = f_i(t)*g_i(t) \quad (17)$$

(b) $a_2 \le a \le a_3$, $b_2 \le b \le b_3$의 경우;
임의의 $y \in [a_2*b_2, a_3*b_3]$에 대해, Y의 소속함수는,

$$\mu_Y(y) = 1 \quad (18)$$

로 되는 것은 자명하다.

(c) $a_3 \le a \le a_4$, $b_3 \le b \le b_4$의 경우;
임의의 $y \in [a_3*b_3, a_4*b_4]$에 대해,

$$\mu_Y(y) = t,\ t \in [0,1] \quad (19)$$

로 놓으면, (a)에서와 같이, 확장원리에 의해

$$t = \mu_A(a) = \mu_B(b) \quad (20)$$

가 성립하므로,

$$a = \mu_A^{-1}(t) = f_d(t) \quad (21)$$

$$b = \mu_B^{-1}(t) = g_d(t) \quad (22)$$

가 얻어진다. 따라서, μ_Y의 감소부분은 다음과 같은 역함수로 나타낼수 있다.

$$\mu_Y^{-1}(t) = y = a*b = f_d(t)*g_d(t) \quad (23)$$

(증명끝)

(3)퍼지선형함수의 계산

퍼지선형함수

$$Y = \sum_{i=1}^{N} A_i X_i \qquad (24)$$

은, 전절에서 정의한 퍼지수의 2항연산식을 반복적용함으로서, 다음과 같이 계산된다.

$$Y = (\sum a_1^i x_1^i, \sum a_2^i x_2^i, \sum a_3^i x_3^i, \sum a_4^i x_4^i, \sum f_i^i g_i^i, \sum f_d^i g_d^i) \qquad (25)$$

여기서, $A_i = (a_1^i, a_2^i, a_3^i, a_4^i, f_i^i, f_d^i)$

$X_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i, g_i^i, g_d^i)$

(4)퍼지수의 뺄셈

퍼지수 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, f_i, f_d)$,

$B = (b_1, b_2, b_3, b_4, g_i, g_d)$

에 대해, 퍼지수 -A는 그림1에 표시한것 처럼,

$$-A = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1, -f_d, -f_i) \qquad (26)$$

로 표기되므로, 퍼지수의 뺄셈 B-A 는 (8)식에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$Y = B-A = (b_1-a_4, b_2-a_3, b_3-a_2, b_4-a_1, g_i-f_d, g_d-f_i) \qquad (27)$$

3. 결 론

제안한 퍼지수의 연산수법에서는 퍼지수의 산술연산시 소속함수의 역함수가 필요하며, 그 결과도 역함수의 형태로 주어진다는 단점이 있다. 그러나 퍼지수의 소속함수를 근사하지 않고도, 간단하고 정확하게 연산할수 있다는 장점이 있기 때문에, 퍼지수의 일반적인 산술연산수법으로 이용할수 있으리라 기대된다.

참 고 문 헌

[1] D.Dubois, H.Prade : "Fuzzy Stes and Systems : Theory and Applicatios", Academic Press(1980)

[2] 田中:「ファジィ集合による多屬性代替案の評價」, システムと制御, vol.27(1983)

[3] Y.M.Cheng, B.McInnis ;"An Algorithm for Multiple Attribute, Multiple Aternative Deciison Problems based on Fuzzy Sets with Appication to Medical Diagnosis", IEEE Trans. on SMC, vol.SMC-10, no.10(Oct.1980)