

근사화계의 혼돈운동이 원래계의 혼돈운동을 보장하는가?

이 원 경*, 박 해 동**, C. S. Hsu***

(Does chaos in an Approximated System Imply One in the Original System?)

(Won Kyoung Lee, Hae Dong Park and C. S. Hsu)

1. 서론

공학문제의 해석에 있어서 문제의 해를 직접 구하기가 어려운 경우에는 원래문제를 근사화하여 만든 근사화문제의 해로부터 원래문제의 해를 추정하는 방법을 많이 사용하고 있다. 근사화하는 과정을 통하여 정보의 유실이 생겼으므로 근사화문제의 해가 원래문제의 해를 완전히 반영한다고 볼 수는 없다. 따라서 근사화문제의 해로부터 원래문제의 해를 추정할 수 밖에 없는데 이 근사화문제의 해의 타당성을 검증하기 위하여 우리는 실험, 관측 혹은 수치 simulation에 의존하게 된다.

구체적인 문제로서 약 비선형 다자유도계(weakly nonlinear multi-degree-of-freedom system)의 강제진동해석에 대하여 생각해 보자. 이러한 계는 일반적으로 다음과 같은 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

여기서 t 은 시간 t 에 대한 미분을 나타내며 $n = 2N$, $N =$ 자유도 수이며 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ 는 상태벡터를 나타낸다.

이제 이 벡터 \mathbf{x} 를 새로운 상태 벡터 $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^T$ 로 적절히 좌표변환하고 몇몇 근사해법(method of multiple scales, method of averaging, method of harmonic balance 등)중의 어느 하나를 사용하여 비자율계(nonautonomous system)인 원래계(original system) (1)로부터 상대적으로 다루기가 수월한 다음의 자율계(autonomous system)인 근사화계(approximated system)를 얻게 되었다고 하자.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{g}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

이 근사화계의 해와 원래계의 해를 구분하기 위하여 그 이름을 각각 \mathbf{x} 공간에서의 해(solution in \mathbf{x} -space)와 \mathbf{p} 공간에서의 해(solution in \mathbf{p} -space)라고 붙여 두자. 근사해법을 사용함으로써 정보의 유실이 생겼으므로 \mathbf{p} 공간에서의 해가 \mathbf{x} 공간에서의 해를 완전히 반영한다고는 볼 수 없다. 따

라서 \mathbf{p} 공간에서의 해로부터 \mathbf{x} 공간에서의 해를 추정할 수 밖에 없는데 계 (1)을 수치적분함으로써 이 \mathbf{p} 공간에서의 타당성을 반드시 검증해 봐야만 한다. 이해를 돕기 위하여 다음과 같은 변환관계를 가지는 2 자유도계를 생각해 보자.

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 \cos \Omega t + p_2 \sin \Omega t \\ x_2 &= -\Omega p_1 \sin \Omega t + \Omega p_2 \cos \Omega t \\ x_3 &= p_3 \cos k \Omega t + p_4 \sin k \Omega t \\ x_4 &= -k \Omega p_3 \sin k \Omega t + k \Omega p_4 \cos k \Omega t \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 진동수 Ω 는 가진력의 진동수(excitation frequency)이다. 이 변환관계에 의하여 \mathbf{p} 공간에서의 평형해(equilibrium solution)는 \mathbf{x} 공간에서의 주기해(periodic solution)로, 주기해는 진폭 및 위상 변조운동(amplitude-and phase-modulated motion)으로, 혼돈운동은 혼돈운동으로 추정된다. 이제 해당하는 원래계 (1)을 수치적분함으로써 검증하는 일이 남아 있다.

이제 약 비선형 다자유도계의 강제진동해석에 대한 기존의 연구 결과를 살펴보기로 하자. 조화가진력을 받는 약 비선형 다자유도계의 정상상태응답에 대해서는 그 동안 많은 연구가 이루어져 왔다. 특히 내부공진조건이 만족되는 경우에는 계의 거동이 매우 복잡하다는 점이 널리 알려져 있다. 이 분야의 기존 연구를 요약하면 다음과 같다. 원래계로부터 근사화계를 유도한 후에 평형해를 찾아서 이 평형해의 안정성을 검토해서 Hopf 분기를 찾고 근사화계의 주기해가 주기배가분기(period-doubling bifurcation)을 거쳐서 혼돈운동에 이르게 되는 예를 보여주고 있다. 예를 들면 구면진자계[1], 1:2의 내부공진을 가진 2차 비선형계[2], 1:3의 내부공진을 가진 3차 비선형계[3], 정방형 단면을 가진 보를 해석하기 위하여 근사화한 1:1의 내부공진을 가진 2자유도계[4], 매개변수를 통해 가진된 계[5], 무한 길이의 원주형 셀[6, 7], 세 모드 사이의 내부공진을 가진 2차 비선형계[8] 등이 있다. Nayfeh와 그의 동료들은 일련의 실험을 통해 혼돈운동을 발견했다고 보고했으며[9-11] 이러한 종류의 연구에 대한 문헌을 잘 검토해 두었다[12]. 이러한 연구를 통하여, 대부분의 저자들은 이 혼돈운동이 원래계의 혼돈운동을 보장함

* 영남대학교 기계공학과(정회원)

** 영남대학교 공업기술연구소

*** University of California, Berkeley 기계공학과

을 암시하고 있다. 다만 Touse와 Bajaj[13]만이 “근사화계의 주기운동은 명백히 원래계의 진폭변조운동을 보장하지만, 근사화계의 혼돈운동과 원래계의 운동 사이의 관계에 대해선 더 많은 연구가 필요하다” 라고 말함으로써 이러한 암시에 의문을 제기하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 많은 연구자들은 “어떠 어떠한 구체적인 계의 혼돈운동”이라는 제목을 사용함으로써 근사화계에서 혼돈운동이 발견되었으므로 원래계에서도 혼돈운동이 일어날 것이란 점을 암시하였다. 그러나 우리가 알기로는 아무도 원래계를 직접 수치적분함으로써 원래계의 운동이 무엇인지를 확인해 보지 않았으므로 이와 같은 암시는 매우 위험하다고 생각된다. 다시 말하자면 “직접 확인해 보지도 않고 어떻게 이런 말(암시)을 할 수 있느냐?” 하는 말이다. 이제 우리는 이 논문의 제목 “근사화계의 혼돈운동이 원래계의 혼돈운동을 보장하는가?” 라는 질문에 답을 줄 만한 예로써 비선형문제의 전형으로 알려진 탄성진자계(harmonically excited spring-pendulum system)를 제시하고자 한다. 탄성진자계는 2차 비선형계(quadratic nonlinear system) 즉 선체운동[14, 15]을 포함하여 많은 공학적 문제와의 유사성 때문에 비선형문제의 전형으로 인식되어 왔으므로 그 동안 많은 연구자들이 탄성진자계를 연구하였다[16-26]. Lee[27], Lee와 Hsu[28]는 내부공진($\omega_1 \approx 2\omega_2$)과 외부공진($\Omega \approx \omega_1$, 여기서 ω_1 과 ω_2 는 각각 스프링과 진자운동의 고유진동수, Ω 는 가진진동수를 의미한다)을 가진 탄성진자계를 해석하여 두 개의 안정한 정상상태 주기해가 존재할 수 있음을 확인하고 이 경우에 충분히 시간이 지난 후에 각 주기해로 흡인되는 초기조건들의 집합 즉, 흡인영역을 구하였다. 본 연구에서는 적절한 공진조건(내부공진, $\omega_1 \approx 2\omega_2$; 외부공진, $\Omega \approx \omega_1$ 과 $\Omega \approx \omega_2$)을 가정하고 다중시간법(method of multiple scales)을 사용하여 비자율계인 운동방정식을 자율계로 바꾼 후 이 자율계의 평형해를 찾았다. 안정성해석을 통하여 Hopf 분기점을 찾은 후 p 공간에서의 주기해와 혼돈운동을 발견하였다. 또한 원래계 즉 비자율계를 직접 수치적분함으로써 원래계의 거동을 조사하여 서로 비교하였다.

2. 탄성진자계의 운동방정식

Fig.1과 같이 강성이 k 인 스프링에 부착된 질량 m 이 진자운동과 스프링의 변형에 의한 스프링운동을 할 수 있다고 생각해 보자. 이때 질량 m 의 부계에 의해 스프링이 정적으로 변형했을 때의 스프링의 전체 길이 l 은 다음과 같이 주어진다.

$$l = l_0 + \bar{x}_{st} \quad (4)$$

여기서 l_0 는 스프링의 원래 길이이며 $\bar{x}_{st} = mg/k$ 는 m 의

부계에 의한 스프링의 정적 변형량이다. 스프링의 변형운동과 진자운동은 각각 \bar{x} 와 φ 로 나타내기로 하고 평형 위치에서 이들이 0이 되도록 잡았다고 하자. 외력으로서 0점에 대한 모멘트 $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ 와 m 에 \bar{x} 방향으로 힘 $F = F_0 \cos \Omega t$ 가 작용하고 있다고 하자. 이 모멘트는 스프링의 길이 방향으로 놓여 있는(그림에 나타나 있지 않은) 질량 없는 강봉(massless rigid rod)에 의해 전달된다고 간주한다. 점성감쇠력 $\bar{c}_1 d\bar{x}/dt$ 과 점성감쇠모멘트 $\bar{c}_2 d\varphi/dt$ 을 고려하여 운동방정식을 세우고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} + c_1 \dot{\bar{x}} + \omega_1^2 \bar{x} - (1+x)\dot{\varphi}^2 + \omega_2^2(1-\cos\varphi) &= f_1 \cos \Omega t \\ (1+x)^2 \ddot{\varphi} + c_2 \dot{\varphi} + 2(1+x)\dot{\bar{x}}\dot{\varphi} + \omega_2^2(1+x) \sin \varphi &= f_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= k/m, \quad \omega_2^2 = g/l, \quad c_1 = \bar{c}_1/m, \quad c_2 = \bar{c}_2/ml^2, \\ f_1 &= F_0/ml, \quad f_2 = M_0/ml^2, \quad x = \bar{x}/l \end{aligned} \quad (6)$$

ω_1 , ω_2 는 각각 스프링모드와 진자모드의 고유진동수이다. 정적 평형 위치 근방에서의 운동만을 고려하기 위하여 운동의 진폭을 작은 매개변수 ε 의 차수로 가정하고 비선형항, 감쇠력, 가진력의 크기의 차수를 동일하게 맞추기 위하여 감쇠계수와 가진력의 진폭을 다음과 같이 가정하였다.

$$c_n = \varepsilon \hat{c}_n, \quad f_n = \varepsilon^2 \hat{f}_n, \quad n=1,2 \quad (7)$$

여기서 \hat{c}_n , \hat{f}_n , ω_n , Ω 은 $O(1)$ 의 차수이다.

앞에서 언급했다시피 비선형 다자유도계는 어떤 공진조건이 만족될 때 매우 복잡한 운동 양상을 보이는데 이 연구에서는 내부공진조건과 외부공진조건이 동시에 만족되는 경우를 생각하기로 한다. 내부공진조건으로서는 $l_0/l \approx 3/4$ 일 때 구현 가능한 $\omega_1 \approx 2\omega_2$ 를, 외부공진조건으로서는 $\Omega \approx \omega_1$ 과 $\Omega \approx \omega_2$ 인 두 경우를 각각 고려하기로 한다. 편의를 위하여 이러한 공진조건은 이달변수를 사용하여 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$\begin{aligned} 2\omega_2 &= \omega_1 + \sigma_1 \\ \Omega &= \omega_s + \sigma_2, \quad s=1, 2 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\sigma_1 = \varepsilon \hat{\sigma}_1$, $\sigma_2 = \varepsilon \hat{\sigma}_2$ 이며 $\hat{\sigma}_1$ 과 $\hat{\sigma}_2$ 은 $O(1)$ 이다.

3. 해석

식 (5)의 일양하게 타당한 근사해(uniformly valid approximate solution)를 구하기 위하여 다중시간법(method of multiple scales)을 사용하기로 한다. 따라서 해를 다음과 같은 전개로 나타내기로 하자.

$$x(t; \varepsilon) = \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3)$$

$$\varphi(t; \varepsilon) = \varepsilon \varphi_1(T_0, T_1) + \varepsilon^2 \varphi_2(T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \quad (9)$$

1차근사를 위하여 다음과 같은 2개의 시간척도(time scale)를 사용하기로 한다.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t \quad (10)$$

여기서 T_0 는 $\omega_1, \omega_2, \Omega$ 에 따라 변화하는 량을 측정하는 빠른 척도(fast scale)이며 T_1 은 비선형성, 감쇠, 공진조건에 기인한 진폭이나 위상의 변조를 측정하는 늦은 척도(slow scale)이다.

이때 시간도함수는 다음과 같이 변환된다.

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1, \quad d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (11)$$

여기서

$$D_0 = \partial/\partial T_0, \quad D_1 = \partial/\partial T_1 \quad (12)$$

식 (9)~(11)을 식 (5)에 대입하고 ε 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 &= 0 \\ D_0^2 \varphi_1 + \omega_2^2 \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 &= -2D_0 D_1 x_1 + (D_0 \varphi_1)^2 - \widehat{c}_1 D_0 x_1 \\ &\quad - \omega_2^2 \varphi_1^2/2 + \widehat{f}_1 \cos \Omega T_0 \\ D_0^2 \varphi_2 + \omega_2^2 \varphi_2 &= -2D_0 D_1 \varphi_1 - 2D_0 x_1 D_0 \varphi_1 - \widehat{c}_2 D_0 \varphi_1 \\ &\quad - \omega_2^2 x_1 \varphi_1 - 2x_1 D_0^2 \varphi_1 + \widehat{f}_2 \cos \Omega T_0 \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + cc \\ \varphi_1 &= A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + cc \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 cc 는 앞 항의 공액복소수를 나타낸다.

식 (15)를 식 (14)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 &= -i\omega_1(2D_1 A_1 + \widehat{c}_1 A_1) \exp(i\omega_1 T_0) \\ &\quad - \frac{\omega_2^2}{2} (3A_2^2 \exp(i2\omega_2 T_0) - A_2 \overline{A_2}) \\ &\quad + \frac{\widehat{f}_1}{2} \exp(i\Omega T_0) + cc \\ D_0^2 \varphi_2 + \omega_2^2 \varphi_2 &= -i\omega_2(2D_1 A_2 + \widehat{c}_2 A_2) \exp(i\omega_2 T_0) \\ &\quad + \omega_2(2\omega_1 + \omega_2) A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2) T_0] \\ &\quad - \omega_2(2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp[i(\omega_1 - \omega_2) T_0] \\ &\quad + \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\Omega T_0) + cc \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\overline{A_n}$ 는 A_n 의 공액복소수를 나타낸다. 함수 A_1 과 A_2 는 해가 유한해야 한다는 가해조건(solvability condition)을 만족시킴으로써 구할 수 있다. 이 가해조건인 형태는 공진조건에 달려 있는데 식 (16)을 살펴보면 내부공진조건 $2\omega_2 \approx \omega_1$ 과 외부공진조건 $\Omega \approx \omega_s$ ($s=1,2$)을 확인할 수 있다.

식 (8)을 이용하여 가해조건(불멸항이 소거되는 조건)을 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_1 &= -i\omega_1 \widehat{c}_1 A_1 + \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2} \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1) \\ &\quad - \frac{3}{2} \omega_2^2 A_2^2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$2i\omega_2 D_1 A_2 = -\omega_2(2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1)$$

$$-i\omega_2 \widehat{c}_2 A_2 + \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1)$$

여기서 δ_{ns} 는 Kronecker delta이며 식 (11)을 사용하면 복소변위 A_n 의 시간 t 에 대한 변화율을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2i\omega_n \frac{dA_n}{dt} = \varepsilon 2i\omega_n D_1 A_n + O(\varepsilon^2), \quad n=1,2 \quad (18)$$

식 (17)의 비선형항

$$\begin{aligned} &-(3/2) \omega_2^2 A_2^2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \text{과} \\ &-\omega_2(2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1) \end{aligned} \quad (19)$$

은 내부공진에 의한 것이므로 내부공진조건이 만족되지 않으면 비선형항은 가해조건에서 사라지게 된다. 한편 이 비선형항을 무시하고 식 (17)을 곧 결과를 식 (15)와 (9)에 대입하면 일차 근사해는 식 (5)의 선형화계의 해와 본질적으로 같음을 알 수 있다.

식 (1)을 극좌표로 바꿔쓰기 위하여

$$a_1 = \varepsilon \widehat{a}_1, \quad a_2 = \varepsilon \widehat{a}_2 \quad (20)$$

로 두고 복소변위를 다음과 같이 두면

$$A_1 = (\widehat{a}_1/2) \exp(i\beta_1), \quad A_2 = (\widehat{a}_2/2) \exp(i\beta_2) \quad (21)$$

여기서 \widehat{a}_n 은 $O(1)$ 이다. 이제 수정위상변수를 다음과 같이 정의하고

$$\gamma_1 = -\beta_s + \widehat{\sigma}_2 T_1, \quad \gamma_2 = 2\beta_2 - \beta_1 + \widehat{\sigma}_1 T_1, \quad s=1,2 \quad (22)$$

식 (17)을 정리하면 다음과 같다.

$$D_1 \widehat{a}_1 = -\frac{1}{2} \widehat{c}_1 \widehat{a}_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} \widehat{a}_2^2 \sin \gamma_2 + \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1$$

$$\widehat{a}_1 D_1 \beta_1 = \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} \widehat{a}_2^2 \cos \gamma_2 - \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1$$

$$\begin{aligned}
D_1 \hat{a}_2 &= -\frac{1}{2} \hat{c}_2 \hat{a}_2 - \frac{1}{4} (\omega_2 - 2\omega_1) \hat{a}_1 \hat{a}_2 \sin \gamma_2 \\
&\quad + \delta_{2s} \frac{\hat{f}_2}{2\omega_2} \sin \gamma_1 \\
\hat{a}_2 D_1 \beta_2 &= -\frac{1}{4} (\omega_2 - 2\omega_1) \hat{a}_1 \hat{a}_2 \cos \gamma_2 \\
&\quad - \delta_{2s} \frac{\hat{f}_2}{2\omega_2} \cos \gamma_1
\end{aligned} \quad (23)$$

3.1 $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우 ($s=1$)

식 (18)을 상기하여 식 (22)와 (23)에 $s=1$ 을 대입하면 다음의 자율상미분방정식(autonomous ordinary differential equation)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -\frac{1}{2} c_1 a_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 \sin \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 \\
a_1 \dot{\gamma}_1 &= \sigma_2 a_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 \cos \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \\
\dot{a}_2 &= -\frac{1}{2} c_2 a_2 + \frac{1}{4} (2\omega_1 - \omega_2) a_1 a_2 \sin \gamma_2 \\
a_1 a_2 \dot{\gamma}_2 &= a_2 \left[\sigma_1 a_1 - \left\{ \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 - \frac{1}{2} (2\omega_1 - \omega_2) a_1^2 \right\} \cos \gamma_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{f_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \right]
\end{aligned} \quad (24)$$

여기서 \cdot 은 d/dt 이다. 식 (21), (15), (18)을 식 (9)에 대입하고 $O(\varepsilon^2)$ 를 무시하면 다음과 같은 근사해를 얻는다.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_1}{2} \exp[i(\Omega t - \gamma_1)] + cc = a_1 \cos(\Omega t - \gamma_1) \\
\varphi &= \frac{a_2}{2} \exp\left[i\left(\frac{\Omega}{2} t - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)\right] + cc \\
&= a_2 \cos\left(\frac{\Omega}{2} t - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)
\end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)로부터 자율계(24)의 평형점은 비자율계(5)의 정상상태 주기해가 됨을 알 수 있다. 따라서 식 (24)에서 $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$ 인 대수방정식의 해 즉 평형해가 우리가 찾는 정상상태 주기해이다. 식 (24)를 살펴보면 이러한 주기해는 $a_2=0$ 인 해와 $a_2 \neq 0$ 인 해가 있음을 알 수 있다. 식 (25)를 통해 알 수 있듯이 우리는 $a_2=0$ 인 해를 조화해,

$a_2 \neq 0$ 인 해를 부조화해라 부르기로 한다. 이 대수방정식을 풀면 다음과 같은 세 정상상태 주기해가 존재함을 알 수 있다.

조화해

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{f_1}{\sqrt{\omega_1(4\sigma_2^2 + c_1^2)}}, \quad a_{21} = 0, \\
\sin \gamma_{11} &= \frac{c_1}{\sqrt{4\sigma_2^2 + c_1^2}}, \quad \cos \gamma_{11} = -\frac{2\sigma_2}{\sqrt{4\sigma_2^2 + c_1^2}}, \\
\gamma_{21} &= \text{미정}
\end{aligned} \quad (26)$$

두개의 부조화해

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \frac{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + c_2^2}}{(2\omega_1 - \omega_2)/2}, \quad (a_{22}^2)^2 - 2\Lambda_1 a_{22}^2 + \Lambda_0 = 0 \\
\sin \gamma_{12} &= \frac{\omega_1}{f_1} \left\{ c_1 a_{12} + \frac{3\omega_2^2}{4\omega_1} a_{22}^2 \sin \gamma_2 \right\} \\
\cos \gamma_{12} &= \frac{\omega_1}{f_1} \left\{ -2\sigma_2 a_{12} + \frac{3\omega_2^2}{4\omega_1} a_{22}^2 \cos \gamma_2 \right\} \\
\sin \gamma_{22} &= \frac{c_2}{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + c_2^2}}, \\
\cos \gamma_{22} &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + c_2^2}}, \\
\Lambda_1 &= \frac{4(2\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1) - c_1 c_2)}{\{(3\omega_2^2/\omega_1)(2\omega_1 - \omega_2)/2\}}, \\
\Lambda_0 &= \frac{16(4\sigma_2^2 + c_1^2)(a_{12}^2 - a_{11}^2)}{(3\omega_2^2/\omega_1)^2}
\end{aligned} \quad (27)$$

여기서 a 와 γ 의 두번째 첨자중 1은 조화해를 2는 부조화해를 나타낸다. 극좌표 a 와 γ 로 표현된 자율계 (24)를 직각좌표로 변환하기 위하여 우선 식 (22)를 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \hat{\sigma}_2 T_1 - \gamma_1 \\
\beta_2 &= \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1) T_1 - \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)
\end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)을 식 (21)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \hat{a}_1 \exp[i(\hat{\sigma}_2 T_1 - \gamma_1)] \\
&= \frac{1}{2} (\hat{p}_1 - i\hat{p}_2) \exp(i\hat{\sigma}_2 T_1) \\
A_2 &= \frac{1}{2} \hat{a}_2 \exp\left[i\left\{\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1) T_1 - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\right\}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{p}_3 - i\widehat{p}_4) \exp\left[i\frac{1}{2}(\widehat{\sigma}_2 - \widehat{\sigma}_1)T_1\right] \quad (29)$$

여기서

$$\begin{aligned} \widehat{p}_1 &= \widehat{a}_1 \cos \gamma_1, & \widehat{p}_2 &= \widehat{a}_1 \sin \gamma_1 \\ \widehat{p}_3 &= \widehat{a}_2 \cos\left\{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\right\}, \\ \widehat{p}_4 &= \widehat{a}_2 \sin\left\{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\right\} \end{aligned} \quad (30)$$

그리고 $p_n = \varepsilon \widehat{p}_n$ 이며 \widehat{p}_n 은 $O(1)$ 이다. 식 (17)을 (18)에 대입하고 식 (29)를 이용하면 다음과 같은 자율상미분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{1}{2}c_1 p_1 - \sigma_2 p_2 + \frac{3\omega_2^2}{4\omega_1} p_3 p_4 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2}c_1 p_2 + \sigma_2 p_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1}(p_3^2 - p_4^2) + \frac{f_1}{2\omega_1} \\ \dot{p}_3 &= -\frac{1}{2}c_2 p_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)p_4 \\ &\quad - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_4 - p_2 p_3) \\ \dot{p}_4 &= -\frac{1}{2}c_2 p_4 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)p_3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_3 + p_2 p_4) \end{aligned} \quad (31)$$

이 자율계(31)은 자율계(24)와 일치하며 다음의 근사해

$$\begin{aligned} x &= p_1 \cos \Omega t + p_2 \sin \Omega t \\ \varphi &= p_3 \cos \frac{1}{2} \Omega t + p_4 \sin \frac{1}{2} \Omega t \end{aligned} \quad (32)$$

는 식 (25)와 일치하는 것이다.

식 (31)의 평형해를 찾기 위하여 $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = \dot{p}_4 = 0$ 인 대수방정식을 풀면 식 (26)에 해당하는 조화해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{-2\sigma_2 f_1}{\omega_1(c_1^2 + 4\sigma_2^2)}, & p_{21} &= \frac{c_1 f_1}{\omega_1(c_1^2 + 4\sigma_2^2)} \\ p_{31} &= 0, & p_{41} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

한편 부조화해 ($p_3 \neq 0$, $p_4 \neq 0$)는 식 (27)로부터 구하여 식 (30)에 대입하여 구하기로 한다. 이상의 연구결과는 일차 근사해이므로 조화균형법(method of harmonic balance)을 사용하여 구한 결과[27, 28]와 잘 일치한다.

3.2 $\Omega \approx \omega_2$ 인 경우 ($s=2$)

식 (21)과 (22)에 $s=2$ 를 대입하면 다음과 같은 자율상미분방정식(autonomous ordinary differential equation)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{1}{2}c_1 a_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 \sin \gamma_2 \\ a_2 \dot{\gamma}_1 &= \sigma_2 a_2 - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2) a_1 a_2 \cos \gamma_2 + \frac{f_2}{2\omega_2} \cos \gamma_1 \\ \dot{a}_2 &= -\frac{1}{2}c_2 a_2 + \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2) a_1 a_2 \sin \gamma_2 + \frac{f_2}{2\omega_2} \sin \gamma_1 \\ a_1 a_2 \dot{\gamma}_2 &= \sigma_1 a_1 a_2 - \left\{ \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 - \frac{1}{2}(2\omega_1 - \omega_2) a_1^2 \right\} a_2 \cos \gamma_2 \\ &\quad - \frac{f_2}{\omega_2} a_1 \cos \gamma_1 \end{aligned} \quad (34)$$

식 (21), (15), (8)을 식 (9)에 대입하고 $O(\varepsilon^2)$ 을 무시하면 다음과 같은 근사해를 얻는다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{2} \exp[i(2\Omega t - \gamma_2 - 2\gamma_1)] + cc \\ &= a_1 \cos(2\Omega t - \gamma_2 - 2\gamma_1) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\varphi = \frac{a_2}{2} \exp[i(\Omega t - \gamma_2)] + cc = a_2 \cos(\Omega t - \gamma_2)$$

정상상태 주기해를 찾기 위하여 $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$ 으로 두면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} a_1^3 + \Lambda_1 a_1^2 + \Lambda_2 a_1 + \Lambda_3 &= 0, \\ a_2^2 &= \frac{4\omega_1}{3\omega_2^2} \sqrt{4(2\sigma_2 + \sigma_1)^2 + c_1^2} a_1 \\ \sin \gamma_1 &= \frac{1}{f_2} \left\{ \omega_2 c_2 a_2 + \frac{2\omega_1 c_1 a_1^2}{3\omega_2 a_2} (2\omega_1 - \omega_2) \right\} \\ \cos \gamma_1 &= \frac{1}{f_2} \left\{ \frac{4\omega_1 a_1^2}{3\omega_2 a_2} (2\omega_1 - \omega_2) (2\sigma_2 + \sigma_1) - 2\omega_2 \sigma_2 a_2 \right\} \\ \cos \gamma_2 &= \frac{8\omega_1 a_1}{3\omega_2^2 a_2^2} (2\sigma_2 + \sigma_1), & \sin \gamma_2 &= -\frac{4\omega_1 c_1 a_1}{3\omega_2^2 a_2^2} \\ \Lambda_1 &= -\frac{4\{4\sigma_2(2\sigma_2 + \sigma_1) - c_1 c_2\}}{(2\omega_1 - \omega_2) \sqrt{4(2\sigma_2 + \sigma_1)^2 + c_1^2}}, \\ \Lambda_2 &= \frac{4(4\sigma_2^2 + c_2^2)}{(2\omega_1 - \omega_2)^2}, \\ \Lambda_3 &= -\frac{3f_2^2}{\omega_1(2\omega_1 - \omega_2)^2 \sqrt{4(2\sigma_2 + \sigma_1)^2 + c_1^2}} \end{aligned} \quad (36)$$

이 경우에도 최대한 3개의 정상상태해가 존재할 수 있으나 $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우와는 달리 $a_2 = 0$ 인 해가 존재하지 않는다. 자율계 (34)를 직각좌표로 변환하기 위하여 우선 식 (22)를 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (2\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_1)T_1 - (2\gamma_1 + \gamma_2) \\ \beta_2 &= \hat{\sigma}_2 T_1 - \gamma_1\end{aligned}\quad (37)$$

식 (37)을 이용하면 식 (21)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2}(\hat{p}_1 - i\hat{p}_2)\exp[i(2\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_1)T_1] \\ A_2 &= \frac{1}{2}(\hat{p}_3 - i\hat{p}_4)\exp(i\hat{\sigma}_2 T_1)\end{aligned}\quad (38)$$

여기서

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= \hat{a}_1 \cos(2\gamma_1 + \gamma_2), \quad \hat{p}_2 = \hat{a}_1 \sin(2\gamma_1 + \gamma_2) \\ \hat{p}_3 &= \hat{a}_2 \cos \gamma_1, \quad \hat{p}_4 = \hat{a}_2 \sin \gamma_1\end{aligned}\quad (39)$$

이며 $p_n = \varepsilon \hat{p}_n$ 이며 \hat{p}_n 은 $O(1)$ 이다. 식 (17)을 (18)에 대입하고 식 (38)을 이용하면 다음과 같은 자율상미분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{1}{2}c_1 p_1 - (2\sigma_2 + \sigma_1)p_2 + \frac{3\omega_2^2}{4\omega_1}p_3 p_4 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2}c_1 p_2 + (2\sigma_2 + \sigma_1)p_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1}(p_3^2 - p_4^2) \\ \dot{p}_3 &= -\frac{1}{2}c_2 p_3 - \sigma_2 p_4 - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_4 - p_2 p_3) \\ \dot{p}_4 &= -\frac{1}{2}c_2 p_4 + \sigma_2 p_3 - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_3 + p_2 p_4) + \frac{f_2}{2\omega_2}\end{aligned}\quad (40)$$

이 자율계(40)은 자율계(34)와 일치하는 것이며 다음의 근사해

$$\begin{aligned}x &= p_1 \cos 2\Omega t + p_2 \sin 2\Omega t \\ \varphi &= p_3 \cos \Omega t + p_4 \sin \Omega t\end{aligned}\quad (41)$$

는 식 (35)와 일치하는 것이다

3.3 안정성 해석

식 (5)의 정상상태 주기해 즉 식 (31) 혹은 (40)의 평형해의 안정성을 결정하기 위하여 정상상태로부터의 작은 교란에 대한 거동을 조사한다. 편의를 위하여 식 (31) 혹은 (40)을 다음과 같이 쓰자.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{H}(\mathbf{p})\quad (42)$$

위식에서 $\mathbf{H}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$ 인 평형해를 $\mathbf{p}_0 = \{p_{10}, p_{20}, p_{30}, p_{40}\}^T$ 라 두고

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{q}\quad (43)$$

라고 두면 \mathbf{q} 는 평형해에서의 작은 교란을 나타낸다. 식 (43)을 식 (42)에 대입하고 \mathbf{q} 에 대해 전개한 후 선형항만을 취하면 다음을 얻게 된다.

$$\dot{\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \right]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \cdot \mathbf{q}\quad (44)$$

$$\mathbf{J} = [\alpha_{ij}] \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \right]_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}\quad (45)$$

식 (45)의 jacobian행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 정상상태해가 점근적으로 안정하다고 간주한다.

4. 수치결과

4.1 $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우

Fig. 2와 3은 정상상태 주기해의 진폭들이 가진진폭과 위상이탈변수에 따라 각각 어떻게 변화하는 지를 보여 주고 있다. 이 그림들에서 실선은 안정해들, 점선은 불안정해들 나타내고 있으며 안정상태에서 불안정상태로 변천하는 데는 두 가지 방식이 있음을 알 수 있다. 하나는 Poincaré 분기로서 Jacobian행렬의 고유치의 하나가 0이 되는 경우 즉, 이 행렬의 행렬식이 0이 되는 경우이다. 이 때 응답곡선은 기울기가 무한대가 되고, 다중근을 가지는 경우 점프현상이 발생하며 조화해와 부조화해 둘 다 이 분기를 가질 수 있음을 알 수 있다. 다른 하나는 Hopf 분기로서 Jacobian행렬이 순허수인 쌍으로 주어진 고유치를 가지고 다른 고유치의 실수부가 0이 아닌 경우의 분기이다. 이 때는 자율계 (24)혹은 (31)의 평형점이 불안정한 평형점(source)이 되며 안정한 주기해가 생성하게 된다. 즉 비자율계 (5)의 정상상태 주기해는 불안정하게 되고 변조운동(modulated motion)이 생성하게 된다. Lee[27], Lee와 Hsu[28]는 이 분기는 조화해에서는 발생하지 않고 부조화해에서만 발생할 수 있음을 입증하였다. Fig. 2에서 f_{1A} 와 f_{1B} 는 각각 Poincaré 분기점과 Hopf 분기점을 나타내고 있다. 여기서 조화해의 스프링모드는 직접 가진되는 모드이므로 그 진폭이 가진진폭 f_1 에 비해하며 진자모드는 직접 가진되는 모드가 아니므로 그 진폭이 f_1 에 무관하게 0임을 보여 주고 있다. 한편 부조화해의 스프링모드는 직접 가진되는 모드이면서도 그 진폭이 f_1 의 변화에 관계없이 일정함을 보여 주고 있는데 이 현상을 포화현상이라 한다.

Fig. 3은 조화해의 스프링모드가 한 개의 극대치를, 부조화해의 진자모드가 두 개의 극대치를 가짐을 보여 주고 있다. σ_{2A} , σ_{2B} , σ_{2B} , σ_{2A} 에서는 Poincaré 분기가 발생하

며 다중해로 말미암아 점프가 발생하기도 한다. 따라서 $\sigma_{2A} \leq \sigma_{2B} \leq \sigma_{2C}$ 와 $\sigma_{2B'} \leq \sigma_{21} \leq \sigma_{24'}$ 구간에서는 안정한 정상상태응답이 2개이므로 초기조건에 의해 실제의 응답이 정해진다. σ_{2C} 와 $\sigma_{2C'}$ 에서는 Hopf 분기가 발생하여 이 구간내에서는 안정한 정상상태 주기응답이 존재하지 않으므로 변조운동과 혼돈운동이 가능하다[27, 28].

Fig. 2에서 f_1 이 f_{1B} 보다 큰 경우에는 Hopf 분기 이후에 근사화계 (31)의 주기해의 거동이 어떻게 변화하는가를 알아보기 위하여 위상공간(p 공간)내에서의 주기해의 p_1 - p_3 평면에 대한 투영이 Fig. 4에 나타나 있다. 이 그림에서 P_1 의 정수 i 는 근사화계의 특정 안정주기해(stable periodic branch)를 가리킨다. Hopf 분기에 의하여 근사화계의 안정한 평형점으로부터 발생한, 안정한 주기해 P_1 은 $f_1 = 0.000404$ (Table 1참고)에서 불안정해지고 그 대신에 새로운 안정한 주기해 P_2 즉, 그 주기가 주기해 P_1 의 주기의 2배인 주기해가 발생하게 된다. 또한 이 안정한 주기해 P_2 는 $f_1 = 0.000463$ 에서 불안정해지고 그 주기가 P_2 의 주기의 2배인 안정한 주기해 P_4 가 발생하는데 이렇게 반복적으로 발생하는 주기가 2배가 되는 분기를 주기배가 분기(period-doubling bifurcation)이라고 한다. Fig. 4는 P_1 에서부터 P_{32} 까지의 위상궤적(phase trajectory)를 보여주고 있다. 이 결과로부터 f_1 이 증가함에 따라 근사화계 (31)의 주기해는 주기배가 분기를 반복함을 알 수 있다. 결국 $f_1 = 0.000497$ 이 되었을 때 근사화계 (31)의 해는 그 운동이 제한된 위상공간내에서 일어나지만 그 주기는 무한하며 초기 조건에 매우 민감한 운동 즉 혼돈운동에 이르게 됨을 Fig. 5가 말해 주고 있다.

Fig. 6(a)와 (b)는 각각 P_{32} 인 주기해와 혼돈운동의 주파수 특성을 알아보기 위하여 그린 p_1 의 FFT(Fast Fourier Transform)을 보여주고 있다. Fig. 6(a)에서는 극대치(peak)가 불연속적(discrete)이며 규칙적으로 분포하여 운동의 주기성을 나타내는 반면에 Fig. 6(b)의 연속적(continuous)이며 불규칙적으로 분포한 극대치는 혼돈운동을 나타내고 있다.

위상공간(p 공간)내에서의 근사화계의 여러 정상상태해의 Poincaré map을 얻기 위하여 단면을 $p_2 = -0.5p_1 + 0.0004$ 로 구성하였다. 이 map에서의 p_1 좌표와 가진진폭 f_1 과의 관계를 그린 Fig. 7은 분기도(bifurcation diagram)를 나타내고 있다. 이 그림에서도 주기배가 분기에 의하여 혼돈운동이 발생하고 있음을 보여주고 있다. 이 그

림으로부터 얻은 Feigenbaum 수열이 Table 1에 나타나 있다. 이 Table에서 매개변수 λ 는 가진진폭 f_1 이다. 이 표에 의하면 P_1 해는 λ_1 에서 P_2 해로 분기하며 P_2 해는 λ_2 에서 P_4 해로 분기함을 알 수 있다. 또한 이 Table로부터 다음과 같은 Feigenbaum상수(Feigenbaum Universality Constant)가 존재함을 알 수 있다. 즉

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4.669201609\dots$$

이다.

Periodicity of the attractor	λ value at the bifurcation point	δ_n
$2^0 = 1$	$\lambda_1 = 0.000404$	$\delta_2 = 3.4706$ $\delta_3 = 4.2289$ $\delta_4 = 4.8434$ $\delta_5 = 4.7977$
$2^1 = 2$	$\lambda_2 = 0.000463$	
$2^2 = 4$	$\lambda_3 = 0.00048$	
$2^3 = 8$	$\lambda_4 = 0.00048402$	
$2^4 = 16$	$\lambda_5 = 0.00048485$	
$2^5 = 32$	$\lambda_6 = 0.000485023$	
$2^6 = 64$		
.....		
$2^\infty = \infty$	$\lambda_\infty = 0.00048517\dots$	

Table 1 Feigenbaum sequence for the periodic solutions P_i ($\Omega \approx \omega_1$).

이상의 결과로부터 근사화계 (31)에서는 Hopf 분기와 주기배가 분기에 의하여 혼돈운동이 발생함을 확인하였다. 이제 근사화계의 혼돈운동이 발생하는 f_1 값 근방에서 과연 원래계 (5)에서도 혼돈운동이 발생하는지를 확인해 보기로 하자. 원래계 (5)는 주기가 $T = 2\pi/\Omega$ 인 주기계이므로 매 주기마다 ($t = mT$, m 은정수) 상태공간(x 공간)에서의 거동을 조사함으로써 Poincaré map을 구성할 수 있다. 그 결과가 Fig. 8에 나타나 있는데 Fig. 8 (a), (b), (c)는 각각 안정한 부조화해, 불변원(invariant circles), 혼돈운동을 보여 주고 있다. Fig. 9 (a), (b), (c)는 각각 이 Poincaré map에 해당하는 주기해, 준주기해, 혼돈운동을 나타내고 있다. Fig. 8(c)와 Fig. 9(c)가 혼돈운동인지를 확인하기 위하여 근사화계와 원래계의 경우에 가장 큰 Lyapunov지수[29-32]를 계산하였는데 그 결과를 Table 2에 나타내었다.

이론상 가장 큰 Lyapunov지수가 양이면 혼돈운동이라고 판정할 수 있으나 Table 2의 이 지수값들이 너무 작게 나타나 있으므로 이것을 근거로 혼돈운동이라는 판정을 내리기는 다소 어려움이 있다. 다만 $f_1 = 0.00055$ 인 경우에는 근사화계나 원래계의 지수값이 상대적으로 큰 값을 가지므로 Fig. 8(c)와 Fig. 9(c)가 혼돈운동을 나타냄을 짐작할 수 있다. f_1 의 변화에 따라 Lyapunov지수가 어떻게 변하는지를

f_1	largest Lyapunov exponents	
	approximated system	original system
0.000364	-0.6760×10^{-6}	0.3675×10^{-5}
0.0004	-0.2794×10^{-5}	0.5221×10^{-6}
0.00044	-0.4873×10^{-5}	0.1624×10^{-4}
0.00047	-0.4427×10^{-5}	0.2093×10^{-4}
0.000483	0.9452×10^{-5}	-0.7670×10^{-5}
0.0004846	-0.6528×10^{-6}	0.2132×10^{-4}
0.0004849	0.6818×10^{-7}	0.3321×10^{-4}
0.000497	0.2831×10^{-3}	0.3137×10^{-3}
0.00055	0.7423×10^{-3}	0.7210×10^{-3}

Table 2 Values of Lyapunov exponents for the approximated and original system ($\Omega \approx \omega_1$).

더 자세히 알아보기 위하여 Fig. 10과 11에서는 각각 근사화계와 원래계의 경우에 이 Lyapunov지수를 f_1 의 함수로 나타내었다. 이 Lyapunov지수의 거동이 매우 흡사한 것으로 보아 근사화계에서와 마찬가지로 원래계에서도 혼돈운동이 발생함을 확인할 수 있었다.

4.2 $\Omega \approx \omega_2$ 인 경우

Fig. 12와 Fig. 13은 주기해의 진폭들이 가진진폭 f_2 와 외부이탈변수 σ_2 에 따라 각각 어떻게 변화하는가를 보여주고 있다. Fig. 12에서는 Fig. 2에서와 달리 Poincaré 분기와 포화현상은 발견되지 않지만, $f_2=f_{2A}$ 에서 Hopf 분기가 발생하고 있다. Fig. 13에서는 Fig. 3에서와 마찬가지로 $\sigma_{2A}, \sigma_{2B}, \sigma_{2B'}, \sigma_{2A'}$ 에서는 Poincaré 분기가 발생하며 다중해로 말미암아 점프가 발생하기도 한다.

따라서 $\sigma_{2A} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{2B}$ 와 $\sigma_{2B'} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{2A'}$ 구간에서는 안정한 정상상태응답이 2개이므로 초기조건에 의해 실제의 응답이 정해진다. σ_{2C} 와 $\sigma_{2C'}$ 에서는 Hopf 분기가 발생하므로 이 구간내에서는 안정한 정상상태 주기응답이 존재하지 않으므로 변조운동과 혼돈운동이 가능하다.

Fig. 13에서 f_2 이 f_{2A} 보다 큰 경우에는 Hopf 분기 이후에 근사화계 (34) 혹은 (40)의 주기해의 거동이 어떻게 변화하는가를 알아보기 위하여 위상공간(p 공간)내에서의 주기해의 p_1 - p_3 평면에 대한 투영이 Fig. 14에 나타나 있다. 이 그림에서 P_i 의 정수 i 는 근사화계의 특정 안정주기해(stable periodic branch)를 가리킨다. Hopf 분기에 의하여 근사화계의 안정한 평형점으로부터 발생한, 안정한 주기해 P_1 은 $f_2=0.0006621$ (Table 3참고)에서 불안정해지고 그 대신에 새로운 안정한 주기해 P_2 즉, 그 주기가 주기해 P_1

의 주기의 2 배인 주기해가 발생하게 된다. 또한 이 안정한 주기해 P_2 는 $f_2=0.0008081$ 에서 불안정해지고 그 주기가 P_2 의 주기의 2 배인 안정한 주기해 P_4 가 발생하는데 Fig. 14는 P_1 에서부터 P_{32} 까지 보여주고 있다.

이 결과로부터 f_2 이 증가함에 따라 근사화계 (40)의 주기해는 주기배가 분기를 반복함을 알 수 있다. 결국 $f_2=0.00087$ 이 되었을 때 근사화계 (40)의 해는 그 운동이 혼돈운동에 이르게 됨을 Fig. 15가 말해 주고 있다.

Fig. 16(a)와 (b)는 각각 P_{32} 인 주기해와 혼돈운동의 주파수 특성을 알아보기 위하여 그린 p_1 의 FFT (Fast Fourier Transform)을 보여주고 있다.

위상공간(p 공간)내에서의 근사화계의 여러 정상상태해의 Poincaré map을 얻기 위하여 단면을 $p_2 = -0.2p_1 + 0.037$ 로 구성하였다. 이 map에서의 p_1 좌표와 가진진폭 f_2 와의 관계를 그린 Fig. 17은 분기도(bifurcation diagram)를 나타내고 있다. 이 그림에서도 주기배가 분기에 의하여 혼돈운동이 발생하고 있음을 보여주고 있다. 이 그림으로부터 얻은 Feigenbaum수열이 Table 3에 나타나 있다. 이 Table에서 매개변수 λ 는 가진주기 f_2 이다. 이 표에 의하면 P_1 해는 λ_1 에서 P_2 해로 분기하며 P_2 해는 λ_2 에서 P_4 해로 분기함을 알 수 있다. 또한 이 Table로부터도 Feigenbaum상수(Feigenbaum Universality Constant)가 존재함을 알 수 있다.

Periodicity of the attractor	λ value at the bifurcation point	δ_n
$2^0 = 1$	$\lambda_1 = 0.0006621$	—
$2^1 = 2$	$\lambda_2 = 0.0008081$	$\delta_2 = 2.7916$
$2^2 = 4$	$\lambda_3 = 0.0008604$	$\delta_3 = 4.7330$
$2^3 = 8$	$\lambda_4 = 0.00087145$	$\delta_4 = 4.6624$
$2^4 = 16$	$\lambda_5 = 0.00087382$	$\delta_5 = 4.7400$
$2^5 = 32$	$\lambda_6 = 0.00087432$	
$2^6 = 64$		
.....		
$2^\infty = \infty$	$\lambda_\infty = 0.0008754\dots$	

Table 3 Feigenbaum sequence for the periodic solutions P_i ($\Omega \approx \omega_2$).

이상의 결과로부터 근사화계 (40)에서는 Hopf 분기와 주기배가 분기에 의하여 혼돈운동이 발생함을 확인하였다. 이제 근사화계의 혼돈운동이 발생하는 f_2 값 근방에서 과연 원래계 (5)에서도 혼돈운동이 발생하는지를 확인해 보기가 하자.

원래계 (5)는 주기가 $T=2\pi/\Omega$ 인 주기계이므로 매 주기마다 ($t=mT$, m 은정수) 상상공간(x 공간)에서의 거동을 조사함으로써 Poincaré map을 구성할 수 있다. 그 결과가 Fig. 18에 나타나 있는데 Fig. 18 (a), (b), (c)는 각각 안정한 주기해해, 불변원(invariant circles), 혼돈운동을 보여주고 있다. Fig. 19 (a), (b), (c)는 각각 이 Poincaré map에 해당하는 주기해, 준주기해, 혼돈운동을 나타내고 있다. Fig. 18(c)와 Fig. 19(c)가 혼돈운동인 지를 확인하기 위하여 근사화계와 원래계의 경우에 가장 큰 Lyapunov지수를 계산하였는데 그 결과를 Table 4에 나타내었다.

f_2	largest Lyapunov exponents	
	approximated system	original system
0.0006	0.2335×10^{-4}	0.3514×10^{-4}
0.0007	0.1058×10^{-4}	0.4514×10^{-4}
0.00083	0.3696×10^{-4}	0.6977×10^{-4}
0.00087	0.2099×10^{-5}	0.5196×10^{-3}
0.000873	-0.2879×10^{-5}	0.5913×10^{-3}
0.000874	0.1629×10^{-4}	0.6589×10^{-3}
0.000886	0.2194×10^{-3}	0.5824×10^{-3}
0.001	0.1131×10^{-4}	0.2398×10^{-4}

Table 4 Values of Lyapunov exponents for the approximated and original system ($\Omega \approx \omega_2$).

이 Table의 지수값들이 너무 작게 나타나 있으므로 이것을 근거로 혼돈운동이라는 판정을 내리기는 다소 어려움이 있지만 $f_2=0.00083$ 인 경우에는 근사화계나 원래계의 지수값이 상대적으로 큰 값을 가지므로 Fig. 18(c)와 Fig. 19(c)가 혼돈운동을 나타낼을 추정할 수 있다. f_2 의 변화에 따라 Lyapunov지수가 어떻게 변하는 지를 더 자세히 알아보기 위하여 Fig. 20과 21에서는 각각 근사화계와 원래계의 경우에 이 Lyapunov지수를 f_2 의 함수로 나타내었다. $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우와는 달리 이 Lyapunov지수의 거동이 매우 잘 일치한다고 볼 수는 없지만, 원래계의 경우(Fig. 21)에 Lyapunov 지수의 값이 명백하게 양인 구간이 존재하는 것으로 보아 근사화계에서와 마찬가지로 원래계에서도 혼돈운동이 발생함을 확인할 수 있었다. 원래계와 Lyapunov지수의 거동이 잘 일치하는 근사화계를 얻기 위해서는 2차근사가 필요하다 고 생각된다.

5. 결론

이 논문의 제목에 제시한 질문에 답하기 위하여 비선형문제의 전형인 탄성진자계를 집중적으로 조사하였다. 조화가 진력을 가진 탄성진자계는 비자유계(원래계)로 나타나는데 다중시간범을 사용하여 이 계를 자유계(근사화계)로 변환하여 조사하였다. 이 두 계의 해의 Lyapunov지수를 비교한

결과, 근사화계의 해가 혼돈운동인 매개변수(가진진폭)의 값 근방에서 원래계의 해도 혼돈운동이 된다는 사실을 확인하였다. 이 결과가 애초의 질문에 일반적인 해답이 될 수는 없겠지만 약 비선형 다자유도 진동계의 혼돈운동 해석에 매우 중요한 참고자료가 될 것으로 판단된다.

후기

본 연구의 일부는 미국과학재단의 연구비지원(NSF grant No. MSM-8519950)에 의한 것임.

참고문헌

- [1] Miles, J., 1984, "Resonant Motion of a Spherical Pendulum", *Physica* 11D, 309-323.
- [2] Miles, J., 1984, "Resonantly Forced Motion of Two Quadratically Coupled Oscillators", *Physica* 13D, 247-260.
- [3] Tousi, S. and Bajaj, A. K., 1985, "Period-Doubling Bifurcations and Modulated Motions in Forced Mechanical Systems", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 52, 1985, 446-452.
- [4] Maewal, A., 1986, "Chaos in a Harmonically Excited Elastic Beam", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53, 625-632.
- [5] Nayfeh, A. H., 1987, "Parametric Excitation of Two Internally Resonant Oscillators", *Journal of Sound and Vibration*, 119(1), 95-109
- [6] Nayfeh, A. H. and Raouf, R. A., 1987, "Nonlinear Forced Response of Infinitely Long Circular Cylindrical Shells", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 54, 571-577.
- [7] Nayfeh, A. H. and Raouf, R. A. and Nayfeh, J. F., 1991, "Nonlinear Response of Infinitely Long Circular Cylindrical Shells to Subharmonic Radial Loads", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 58, 1033-1041.
- [8] Nayfeh, T. A., Asrar, W. and Nayfeh, A. H., 1992, "Three-Mode Interactions in Harmonically Excited Systems with Quadratic Nonlinearities", *Nonlinear Dynamics* 3, 1992, 385-401.
- [9] Nayfeh, A. H., Balachandran, B., Colbert, M. A. and Nayfeh, M. A., 1989, "An Experimental Investigation of Complicated Responses of a Two-degree-of Freedom Structure", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56, 960-967.

- [10] Nayfeh, A. H. and Zavodney, L. D., 1988, "Experimental Observation of Amplitude- and Phase-Modulated Responses of Two Internally Coupled Oscillators to a Harmonic Excitation", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 55, 706-710.
- [11] Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., 1990, "Experimental Investigation of Resonantly Forced Oscillations of a Two-Degree-of-Freedom Structure", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 25(2/3), 199-209.
- [12] Nayfeh, A. H., Balachandran, B., 1989, "Modal Interactions in Dynamical and Structural System", *Applied Mechanics Review*, 42(11), part 2, s175-s210.
- [13] Tousi, S. and Bajaj, A. K., 1985, "Period-Doubling Bifurcations and Modulated Motions in Forced Mechanical Systems", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, 1985, 446-452.
- [14] A. H. Nayfeh, D. T. Mook and L. R. Marshall, 1973, *Journal of Hydronautics* 7(4), October, 145-152. Nonlinear Coupling of Pitch and Roll Modes in Ship Motions.
- [15] Lee, W. K., 1988, *A Global Analysis of a Forced Spring-Pendulum System*, Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley.
- [16] N. Minorsky, 1962, *Nonlinear Oscillations*. Robert E. Krieger Publishing Company.
- [17] T. R. Kane and M. E. Kahn, 1968, *ASME Journal of Applied Mechanics* 35, 547-552. On a Class of Two-Degree-of-Freedom Oscillations.
- [18] R. Broucke and P. A. Baxa, 1973, *Celestial Mechanics* 8, 261-267. Periodic Solutions of a Spring Pendulum System.
- [19] A. H. Nayfeh, 1973, *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons.
- [20] P. Srinivasan and T. S. Sankar, 1974, *Journal of Sound and Vibration* 35(4), 549-557. Autoparametric Self-Excitation of a Pendulum Type Elastic Oscillator.
- [21] A. H. P. van der Burgh, 1976, *Journal of Sound and Vibration* 49(1), 93-103. On the Asymptotic Approximations of the Solutions of a System of Two Non-Linearly Coupled Harmonic Oscillators.
- [22] M. G. Olsson, 1976, *American Journal of Physics* 44(12), 1211-1212. Why does a Mass on a Spring Sometimes Misbehave?.
- [23] E. Breitenberger and R. D. Mueller, 1981, *Journal of Mathematical Physics* 22(6), 1196-1210. The Elastic Pendulum: A Nonlinear Paradigm.
- [24] M. Augusteijn and E. Breitenberger, 1981, *Journal of Mathematical Physics* 22(1), 51-66. Stability of Constant Amplitude Motions in Slow-Fluctuation Approximation.
- [25] H. Sprysl, 1987, *Journal of Sound and Vibration* 112(1), 63-67. Internal Resonance of Non-Linear Autonomous Vibrating Systems with Two Degrees of Freedom.
- [26] P. R. Sethna, 1965, *ASME Journal of Applied Mechanics* 32, 576-582. Vibrations of Dynamical Systems with Quadratic Nonlinearities.
- [27] Lee, W. K., 1992, "Domains of Attraction of System of Nonlinearly Coupled Ship Motions by Simple Cell Mapping", *ASME Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 114, pp 22-27.
- [28] Lee, W. K. and C. S. Hsu, 1993, "A Global Analysis of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 1, in press.
- [29] Lichtenberg, A. J. and Lieberman, M. A., 1983, *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag New York.
- [30] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastono, J. a., 1985, "Deterministic Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica* 16D, pp285-317.
- [31] Kim, M. C. and Hsu, C. S., 1986, "Computation of the Largest Lyapunov Exponent by the Generalized Cell Mapping", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 45, pp 49-61.
- [32] Moon, F. C., 1987, *Chaotic Vibrations-An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons.

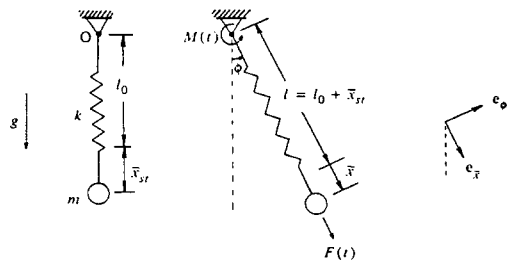


Fig. 1 A harmonically excited spring-pendulum system.

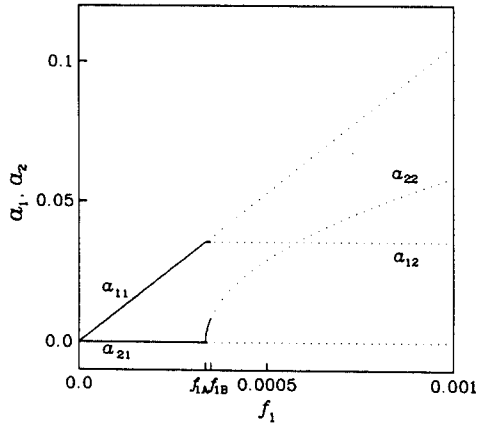


Fig. 2 Modal amplitudes as functions of the amplitude of the excitation, f_1 , for $(\omega_1, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2, f_1, f_2) = (1.0, 0.03, 0.004, 0.005, 0.005, 0.0)$, —, stable; ---, unstable.

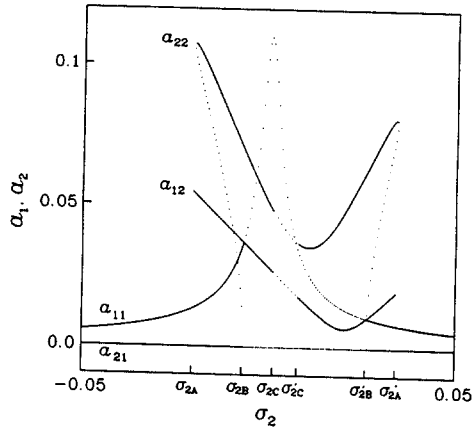


Fig. 3 Modal amplitudes as functions of external detuning parameter, σ_2 , for $(\omega_1, \sigma_1, c_1, c_2, f_1, f_2) = (1.0, 0.02, 0.005, 0.005, 0.00055, 0.0)$, —, stable; ---, unstable.

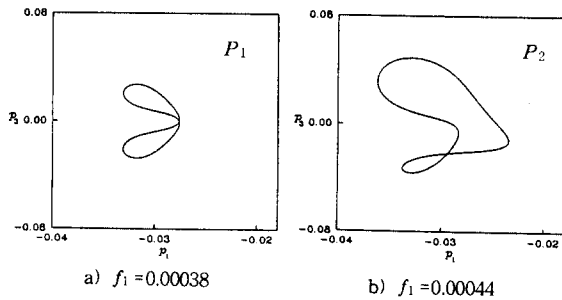


Fig. 4 Phase plots for some stable solutions in a period-doubling sequence ($\Omega \approx \omega_1$).

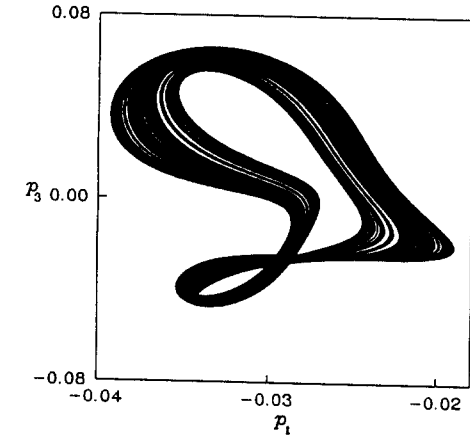
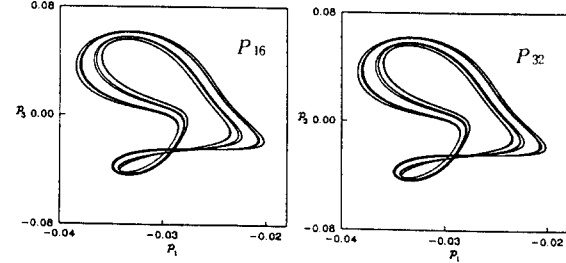
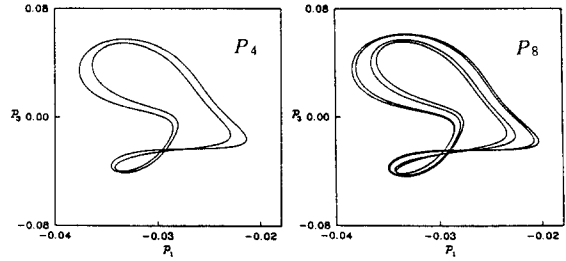


Fig. 5 Phase plots for chaotic motion at $f_1 = 0.000497$

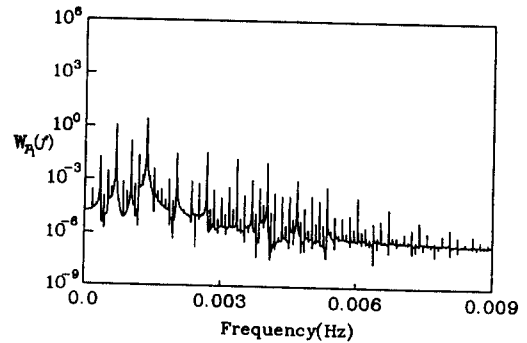


Fig. 6 The FFT of p_1 for (a) the P_{32} solution at $f_1 = 0.0004846$ and (b) the chaotic motion at $f_1 = 0.000497$

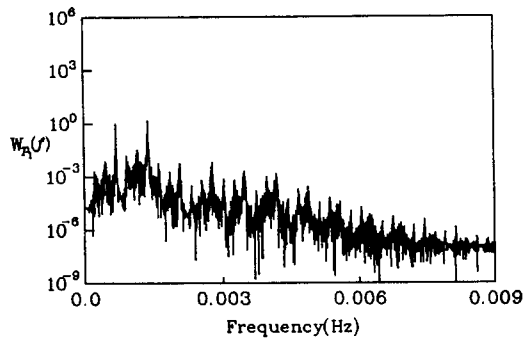
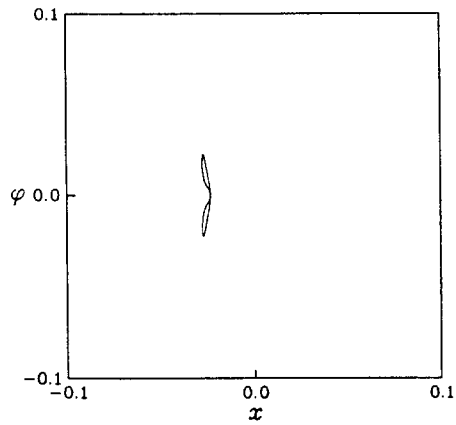


Fig. 6 (b) the chaotic motion at $f_1=0.000497$



(b) a quasi-periodic solution at $f_1=0.000364$;

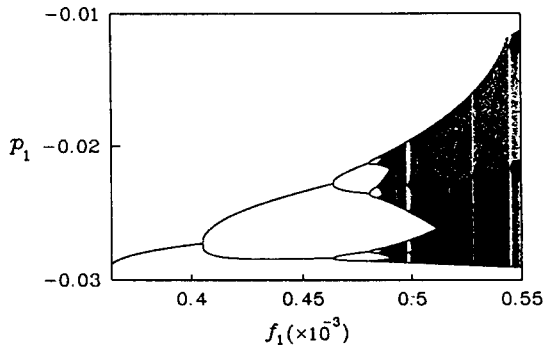
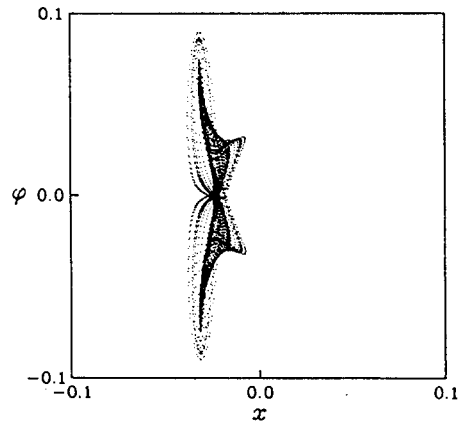
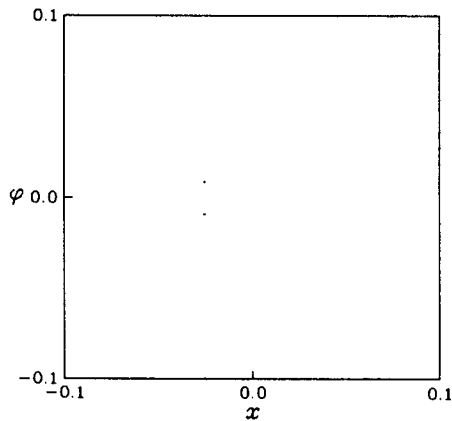


Fig. 7 Bifurcation diagram for the Poincaré map of a solution of the approximated system (31). Steady-state behavior as a function of f_1 showing period-doubling bifurcation.

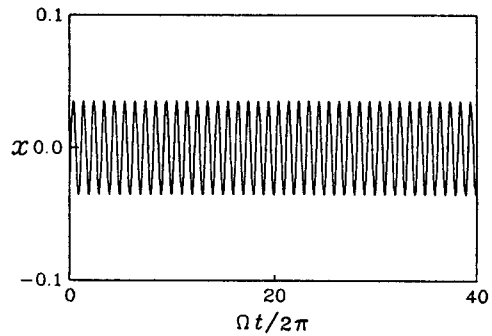


(c) a chaotic motion at $f_1=0.00055$.



(a) a periodic solution at $f_1=0.000348$;

Fig. 8 Projections of Poincaré map of the solution of the original system (5) for $\{\omega_1, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2\} = \{1.0, 0.03, 0.004, 0.0005, 0.0005\}$ and three different values of f_1 .



(a) a periodic solution at $f_1=0.000348$;

Fig. 9 Time histories of spring motions for $\{\omega_1, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2\} = \{1.0, 0.03, 0.004, 0.0005, 0.0005\}$ and three different values of f_1 .

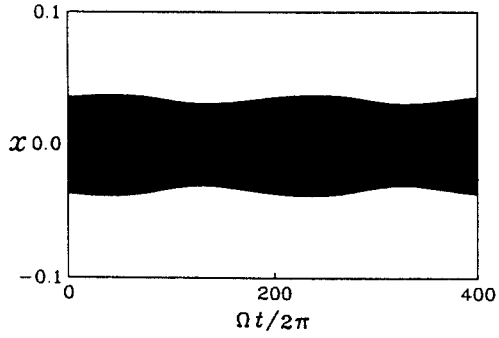
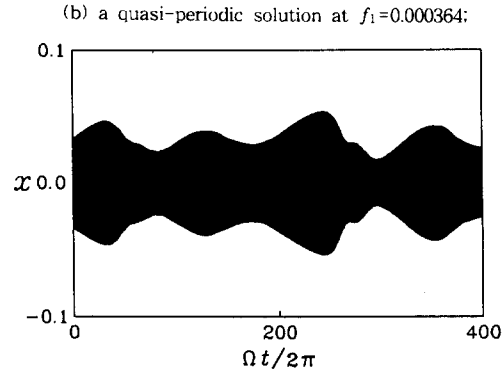


Fig. 10 Lyapunov exponent versus f_1 for the solutions of the approximated system (31).



(b) a quasi-periodic solution at $f_1=0.000364$;
 (c) a chaotic motion at $f_1=0.00055$.

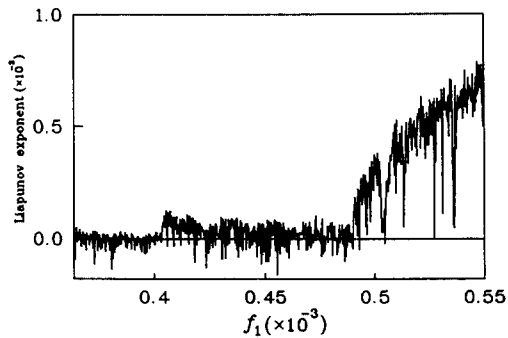


Fig. 11 Lyapunov exponent versus f_1 for the solutions of the original system (5).

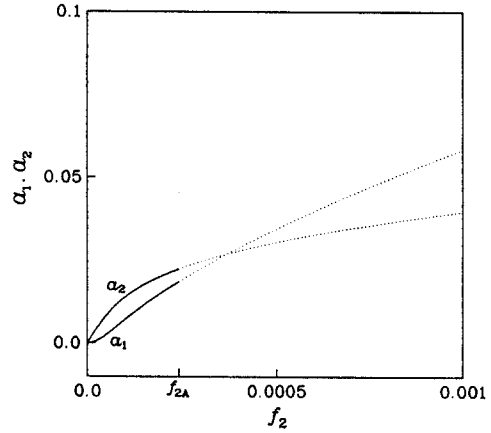


Fig. 12 Modal amplitudes as functions of the amplitude of the excitation, f_2 , for $(\omega_2, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2, f_2) = (0.5, -0.01, 0.005, 0.005, 0.005, 0.0)$, —, stable; ---, unstable.

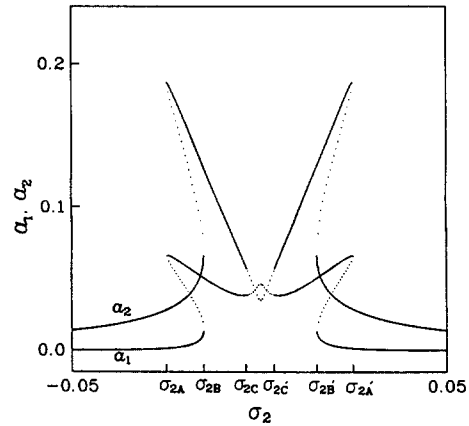


Fig. 13 Modal amplitudes as functions of external detuning parameter, σ_2 , for $(\omega_2, \sigma_1, c_1, c_2, f_1, f_2) = (0.5, 0.0, 0.0005, 0.0005, 0.0, 0.0007)$, —, stable; ---, unstable.

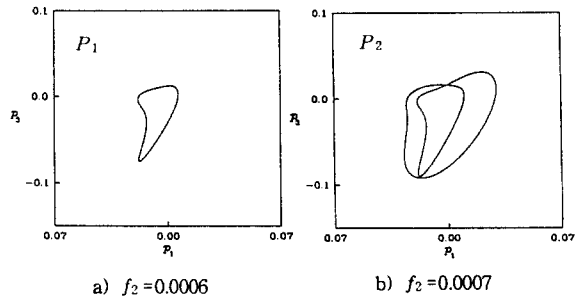


Fig. 14 Phase plots for some stable solutions in a period-doubling sequence ($\Omega \approx \omega_2$).

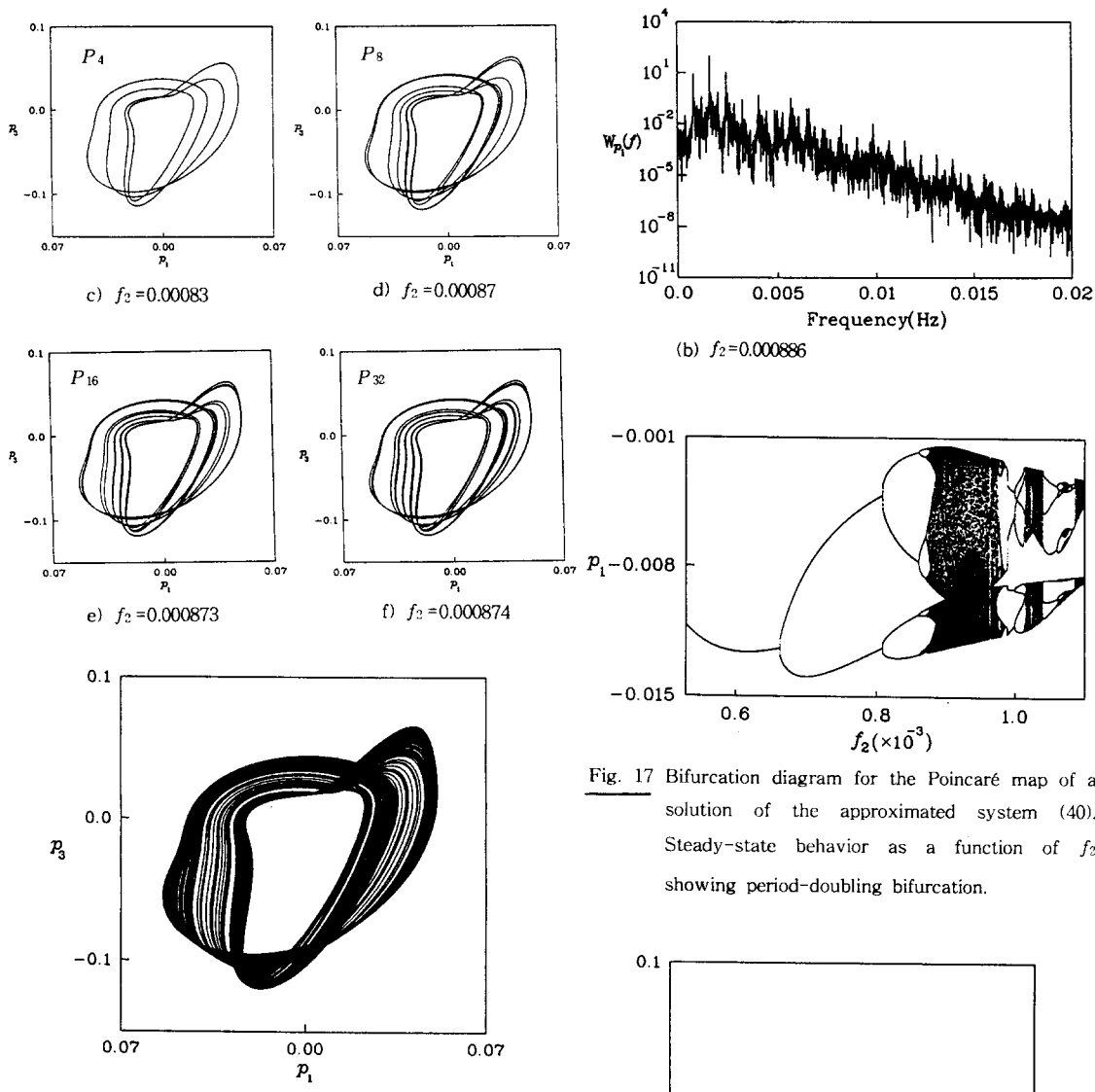


Fig. 15 Phase plots for chaotic motion at $f_2=0.000886$

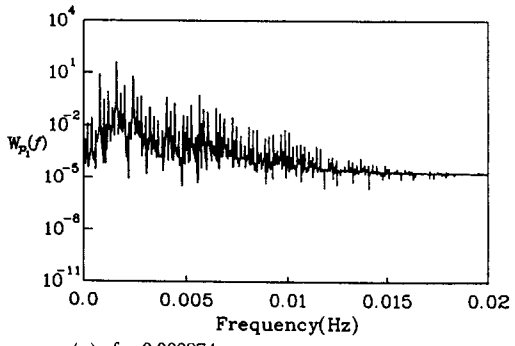


Fig. 16 The FFT of p_1 for (a) the P_{32} solution at $f_2=0.000874$ and (b) the chaotic motion at $f_2=0.000886$

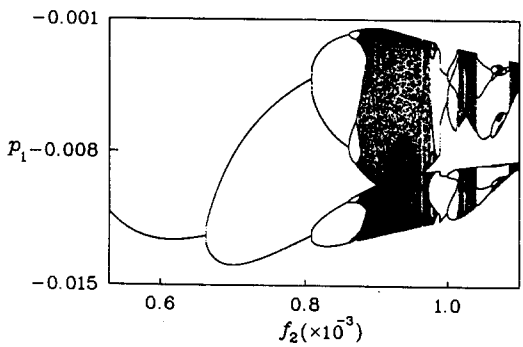


Fig. 17 Bifurcation diagram for the Poincaré map of a solution of the approximated system (40). Steady-state behavior as a function of f_2 showing period-doubling bifurcation.

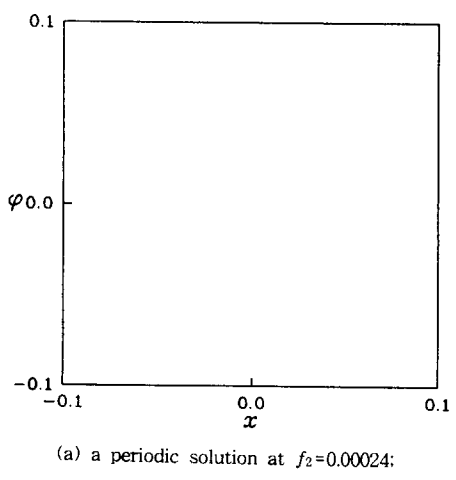
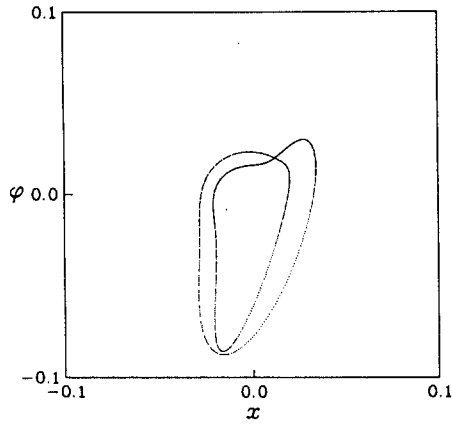
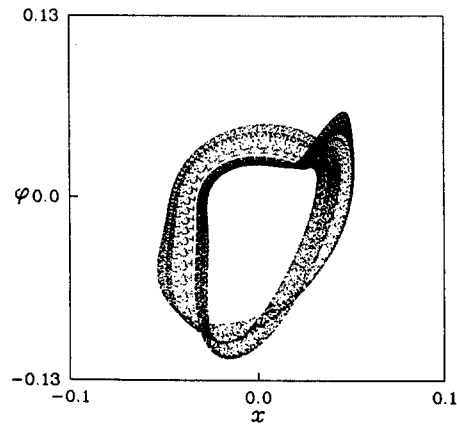


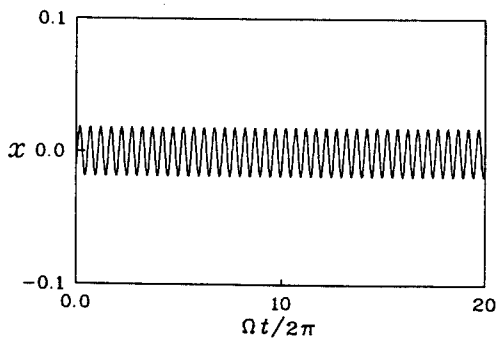
Fig. 18 Projections of Poincaré map of the solution of the original system (5) for $(\omega_2, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2) = \{0.5, -0.01, 0.005, 0.005, 0.005\}$ and three different values of f_2 .



(b) a quasi-periodic solution at $f_2=0.0007$;

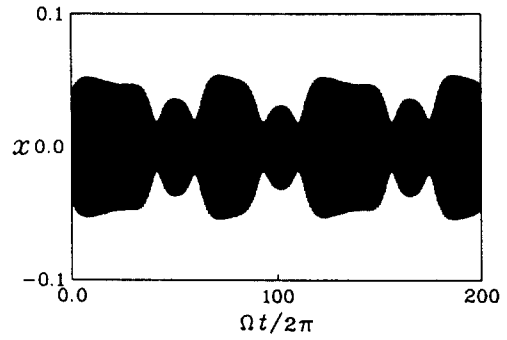


(c) a chaotic motion at $f_2=0.000873$.

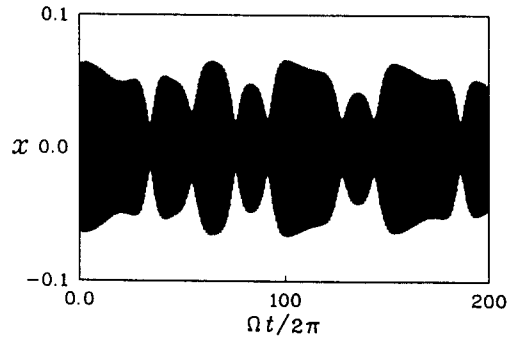


(a) a periodic solution at $f_2=0.00024$;

Fig. 19 Time history of spring motions for $(\omega_2, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2) = (0.5, -0.01, 0.005, 0.005, 0.005)$ and three different values of f_2 .



(b) a quasi-periodic solution at $f_2=0.0007$;



(c) a chaotic motion at $f_2=0.000873$.

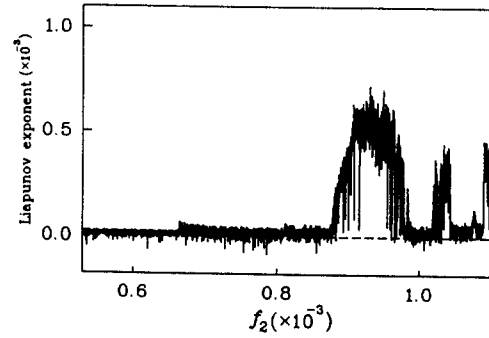


Fig. 20 Lyapunov exponent versus f_2 for the solutions of the approximated system (40).

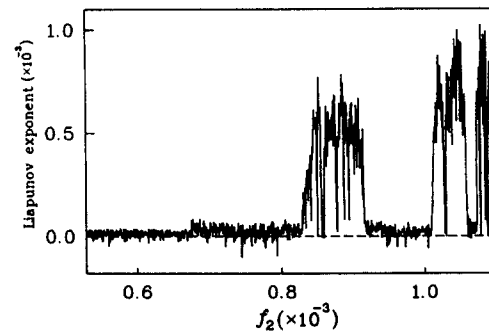


Fig. 21 Lyapunov exponent versus f_2 for the solutions of the original system (5).