

완난류 개수로 마찰계수

유 동 훈*

1. 서론

모든 開水路 설계에 있어 필히 고려되는 단면 평균유속의 산정은 아직까지도 Manning식 또는 Bazin식과 같은 경험식에 많이 의존하고 있는데, 이론에 근거한 Chezy식과의 차이점의 원인을 뚜렷이 규명하지 못하였기 때문에 여러 경험식의 선택은 상당히 설계자의 선호도에 따랐다. Manning(1889, 1895)은 그 당시까지 연구발표된 거의 모든 경험식들과 관측자료들을 총정리하여 상당한 분량의 논문을 두편 발표하였으며, 개수로 흐름에 대한 그의 이해는 현재까지도 많은 시사를 던져주고 있다. 최대 유속의 위치가 수면에 위치하지 않는다는 점, 단면의 형태에 따라 지수함수식의 지수치가 달라진다는 점 등은 앞으로의 수식 수정에 일조를 기할 수 있을 것으로 판단된다. 그가 면면히 다룬 경험식의 가지수, 관측자료의 포괄성과 수식의 단순성 등으로 인하여 Manning식은 아직까지도 가장 널리 이용되고 있는 경험식이다. 그러나 Manning의 논문 발표시키는 Prandtl(1925) 이론과 같은 정교한 경계층이론이 개발되기 직전이며, Nikuradse의 실험으로서 난류조건외의 복잡성과 완난류, 천이난류, 전난류 등으로의 분류가 밝혀지기 한세대 전이었던 점을 감안할 때 Manning 식과 같은 형태의 경험식의 개선 여지는 다분히 있을 것으로 사료된다.

Nikuradse(1932, 1933)의 관로실험은 난류경계층흐름에 대한 깊고도 폭넓은 이해를 가져다 주었다. 그는 Prandtl의 혼합거리이론을 확장하여 緩亂流(매끄러운 관) 조건과 全亂流(거칠은 관) 조건에 대한 마찰계수를 산정하는 이론식을 개발하였다. 완난류와 전난류 뿐만 아니라 이들의 변이부에 해당하는 천이난류 조건에 대하여도 적용할 목적으로 Colebrook(1938)은 두 이론식을 조합하여 모든 조건에 사용할 수 있는 범용식을 개발하였다. 그러나 Colebrook식 또는 Colebrook-White식은 천이난류조건에도 부적합할뿐 아니라 완난류조건에서도 상당한 오차를 유발하기 때문에 대부분의 설계자들이 이의 이용을 꺼려왔으며, 아직까지 Manning식 또는 Hazen-Williams식과 같은 경험식에 의존하고 있는 근본 원인은 이에 있는 것으로 사료된다.

* 정회원. 아주대학교 공과대학 토목공학과 부교수

緩亂流와 全亂流의 변이부에 해당하는 遷移亂流 조건에 대한 마찰계수 산정식은 최근의 연구에 의하여 이루어졌다 (유, 1993). 이로써 원형관의 마찰계수 산정은 조고비와 관경 Reynolds수만 주어지면 상당히 정교하게 계산할 수 있게 되었으며, 개수로 마찰계수도 모든 난류조건에 대하여 정확히 산정할 수 있는 가능성을 도모할 수 있게 되었다.

개수로에서의 경계층흐름에 대한 정교한 실험연구는 1960년대 이후 상당한 진전을 이루어 왔다. Tracey & Lester(1961)는 경사수로를 사용하여 구형개수로에 대한 실험을 시행하였으며, Nikuradse의 원형관 마찰계수 산정식의 형태에 관경 대신에 동수반경을 대입하여 관계식을 추출하였다. 그들의 실험조건은 모두 緩亂流(smooth turbulent flow or smooth wall) 조건이었는데, 전대수지상에 마찰계수를 Reynolds수와의 상관으로 도시하였을 때 원형관에서의 마찰계수 분포와 유사한 분포를 보였으나 상관계수는 40 % 이상 상당한 증가를 보였다. Kazemipour(1979)는 Reynolds수에 사용되는 동수반경의 계산에 형상효과를 고려하여 마찰계수를 산정하였을 때 원형관에 사용된 수식을 그대로 사용할 수 있음을 알 수 있었다. 즉 이는 형상효과를 적절히 고려함으로써 개수로의 천이난류 및 전난류 조건에 대하여도 원형관에 사용된 마찰계수 산정식을 사용할 수 있는 가능성을 보여준 것이다.

본고는 우선 이상의 연구자들에 의하여 개발된 개수로 마찰계수 산정식들을 보다 면밀히 검토하고 이론식개발 가능성을 타진한다. 원형관에 대하여 이론적으로 개발된 마찰계수 산정식을 수정하거나 원형을 그대로 유지하고 摩擦半徑(frictional radius)라는 새로운 개념을 도입하여 개수로 마찰계수 산정식을 개발하였다. 본고에서 Manning식과 같은 경험식은 논의에서 제외하며 Tracey-Lester 방법과 Kazemipour 방법을 수정 개선한 후, Kazemipour 방법보다 더 단순한 형태의 산정식을 제시하고 각 방법들을 관측자료에 적용하여 비교고찰한다.

2. 본 론

단면평균유속 U 를 사용하여 마찰계수 C_f 를

$$\sqrt{C_f} = u_* / U \quad (1)$$

로 정의할 때, Darcey-Weisbach 마찰계수 f 는 $8C_f$ 이다. 여기서 u_* 는 마찰속도이며 U 는 단면 평균유속이다. 수로 형태와 경사가 일정한 개수로에서의 평균유속산정은 200여년전 수행된 Chezy의 연구에 그 이론적 근거를 두고 있으며 다음과 같다.

$$U = (gRS/C_f)^{1/2} \quad (2)$$

여기서 g 는 중력가속도, R 는 동수반경, S 는 수로의 경사이며, $(g/C_f)^{1/2}$ 를 보통 단일 계수로 취급하여 Chezy 마찰계수 C_h 라 칭한다.

개수로에서의 유속분포는 원형관로에서의 유속분포와 달리 분포양상이 매우 복잡하기 때문에 이론식의 개발에 아직 성공적이지 못하였으나 원형관 마찰계수 산정식과 유사한 형태의 식을 취하여 관측자료와의 회귀분석으로 계수들을 구하였다. 즉 개수로 마찰계수 f ($= 8C_f$) 에 대하여

$$\frac{1}{vf} = A \log 4R_hvf + B \quad (3)$$

여기서 R_h 는 동수반경 Reynolds수로서 $R_h = UH/\nu$ 이며, ν 는 점성계수, H 는 동수반경이고 원형관일 때 $H = d/4$ 이며 구형개수로일 때 $H = bh/(b+2h)$ 이고, d 는 관경, b 는 폭, h 는 수심이다. 관로마찰인 경우 $A = 2.036$, $B = -0.913$ 또는 $A = 2.0$, $B = -0.8$ 이다.

수로벽이 매끄러운 완난류조건에 대하여 여러 연구자들이 실험수로 관측으로 구형 개수로에 대한 상관계수 A 와 B 를 구하였는데 그들의 관측범위와 산정된 계수치들이 표 1에 제시되어 있다. 각 결과들은 서로 상당한 차이를 보이는 것 같으나 경사율 A 를 Von Karman 상수 k 를 0.4로 취하였을 때 얻어지는 값 2.036로 대치하면 절편 B 의 변이는 별로 크지 않음을 알 수 있다. 여기서 절편 B 의 조정은 각 관측범위의 중간값에 대하여 행하여 새로운 절편 B' 을 구하였다. Rao의 실험자료를 예외적인 것으로 취급하여 절편 B 는 -1.29에서 -1.33까지의 범위이며, Rao의 자료를 포함하여도 -1.46까지 변이의 폭이 크지 않다. Rao의 자료를 제외하여 구형개수로 마찰계수 산정식의 절편은 약 -1.31을 취하면 될 것이다. 이는 원형관 마찰계수 산정식의 절편 -0.913과 비교하여 상당한 추가 감소를 보이고 있다.

표 1. Tracey-Lester 방법에 따른 완난류조건에서의 구형개수로 마찰계수 상관계수치

연구자	관측범위 ($4R_h$)	A	B	B'	α
Tracey & Lester	35000 - 700000	2.03	-1.30	-1.33	-0.47
Rao	80000 - 350000	2.12	-1.83	-1.46	-0.61
Myers	6064 - 168284	2.10	-1.56	-1.30	-0.44
Kazemipour	50000 - 357000	2.00	-1.13	-1.29	-0.43

이상의 결과는 원형관의 마찰계수 산정기본식에 추가계수를 포함하여 표현할 수 있을 것이다. 즉 개수로 마찰계수 산정식은 다음과 같이 표기된다.

$$\frac{1}{VC_f} = \frac{1}{k} \left(\ln \frac{2H}{z_0} - 1.5 + \alpha \right) \quad (4)$$

여기서 z_0 는 유속의 영점높이로서 완난류인 경우 $z_0 = \exp(-5.5k)/u_*'$ 이며, α 는 수로의 형태에 따라 달리 결정되는 계수로서 $\alpha = 0$ 을 취하면 원형관에 대한 마찰계수 산정식이 된다 (유, 1993). $k = 0.4$, $f = 8C_f$, $2.303 \log x = \ln x$ 의 관계를 고려했을 때, 계수 B' 의 실험치로부터 표 1에 제시된 바와 같이 -0.43 에서 -0.61 까지의 범위에 든다. Rao의 자료를 예외적인 것으로 취급하였을 때 구형개수로에 대한 α 는 약 -0.45 으로 산정된다. 완난류조건에 대한 개수로 마찰계수 산정에 상기 기본식의 형태로 환원한 이유는 완난류뿐만 아니라 전난류 및 천이난류조건에 대한 개수로 마찰계수를 산정하기 위한 도대를 마련하고자 함이다. 구형개수로 상관계수 $\alpha = -0.45$ 를 대입하여 다른 난류조건에서의 구형개수로 마찰계수를 산정할 수 있을 것으로 예상되는데 이는 실험자료의 보완으로 검증되어야 할 것이다. 즉 α 의 수치가 난류조건 변화 또는 조고의 변화에 따라 변할 가능성도 있는 것으로 사료된다.

식 (4)로 표현되는 개수로 마찰계수 산정방법은 절편의 수치를 조정하여 관로 마찰계수 산정식을 수정한 것으로서 이 방법 최초의 연구자명을 따라 Tracey-Lester Method 라 칭한다. 한편 Kazemipour(1979)는 형상계수와 실험자료의 상관관계로부터 구해지는 변이계수와 의 비로써 관로 마찰계수로부터 개수로 마찰계수를 바로 구할 수 있음을 발견하였는데 다음과 같이 표기된다.

$$C_f = \varphi C_p \quad (5)$$

여기서 C_p 는 관로 마찰계수로서 식 (3)에서 $A=2.036$, $B=-0.913$ 을 취하거나, 식 (4)에서 $\alpha=0$ 을 취하여 구해지며, φ 는 비례계수로서

$$\varphi = \varphi_1 / \varphi_2 \quad (6)$$

φ_1 는 형상계수로서 구형개수로인 경우 $\varphi_1 = \sqrt{P/b}$ 이며 P 는 윤변, b 는 폭이고, φ_2 는 개수로 특성을 나타내는 변이계수로서 Kazemipour & Apelt(1979)는 여러 실험관측자료를 이용하여 그들은문의 그림 4 에 제시된 바와 같은 상관관계를 구하였다. 이는 수식으로 표현될 수 있으며 다음과 같다.

$$\varphi_2 = \text{EXP} (0.794 (b/h)^{-0.835} - 0.116) \quad (7)$$

여기서 b/h 는 흔히 형상비(aspect ratio)라 칭한다.

식 (5) 로 표현되는 Kazemipour Method 는 관로 마찰계수로부터 개수로 마찰계수를 바로 산정할 수 있는 이점이 있으나 식 (6)과 (7) 등으로 표현되는 형상계수와 변이계수의 산정식이 의외로 복잡하여 다른 형상의 수로에 대한 일반화가 어려울 것으로 사료된다. 다음은 본 저자의 산정 방법으로 마찰반경이라는 개념의 도입으로 산정식의 단순화를 기하였다.

개수로 마찰계수 산정에 관로 마찰계수 산정식을 이용할 때 동등한 동수반경을 대입하는데 관측된 개수로 마찰계수는 산정된 관로 마찰계수보다 30 - 40 % 이상 크게 나타난다. 이는 개수로에서의 자유수면이 마찰로부터 완전히 자유롭지는 못하는데 그 원인이 있는 것으로 판단된다. 즉 자유수면도 벽마찰에 일부는 기여할 것으로 고려하여 동수반경(hydraulic radius) 대신에 다음과 같은 마찰반경(frictional radius)을 대입할 것을 제의한다. 즉 구형개수로인 경우 마찰반경 H_f 는

$$H_f = bh / (2h + (1+\beta)b) \quad (8)$$

여기서 β 는 상수로서 자유수면이 벽마찰에 영향을 주는 기여도를 나타낸다. 관로 마찰인 경우 $\beta = 1$ 이며 $H_f = H$ 가 되고 개수로 마찰인 경우 β 는 0 과 1 사이에 있을 것이다.

개수로 마찰계수를 산정하려면, 식 (3)에서 상관계수 B 는 관로 마찰계수 산정치 $B = - 0.913$ 를 그대로 사용하거나 식 (4)에서 $\alpha = 0$ 을 취하고 동수반경 H 대신에 마찰반경 H_f 를 취한다. 즉 동수반경 Reynolds수 $R_h = UH/\nu$ 대신에 마찰반경 Reynolds수 $R_f = UH_f/\nu$ 를 대입하면 기존 관로마찰계수 산정식을 사용하여 관로나 개수로나 모든 경우의 마찰계수를 산정할 수 있을 것이다. 여기서 자유수면의 마찰에 대한 기여도 β 는 실험자료와의 검증으로부터 구해진다.

3. 비 교 고 찰

완난류 개수로 마찰에 대한 정밀한 실험은 1960년대 이후 여러 연구자들에 의하여 수행되어 왔으나, 본저자가 입수한 자료중 자세한 정보를 제공한 것은 Tracey & Lester (1961) 실험결과만이며 추후 자세한 정보가 확보되는대로 다른 연구자들의 실험자료도 이용하여 본 방법을 검증할 예정이다. Tracey & Lester 는 폭 3.5 feet, 깊이 1.5 feet, 길이 80 feet 인 철제수로를 사용하여 실험하였으며, 바닥과 측면 등 모든 면은 에나멜을 삼겹으로 칠하였다. 실험중 계속해서 온도를 측정하여 점성계수를 정확히 구하고자 하였으며, 수로 바닥의 높이는 0.002 feet 내에, 측벽의 위치는 0.005 feet 내에 들도록 정치하였다. 수로의 경사는 0.0001 이하부터 0.03 이상까지,

유량은 0.4 cfs 이하부터 7 cfs 이상까지 매우 넓은 범위에 걸쳐 총 49가지 경우에 대하여 실험하였으며, 각 경사에 대하여 등류수심(normal depth)이 나오도록 유량을 조정하였다.

SI 단위로 표시된 Tracey-Lester 실험자료와 각 경우에 대한 Tracey-Lester Method, Kazemipour Method 와 본 방법으로 구한 Darcy-Weisbach 마찰계수 f 의 값이 표 2 에 제시되어 있다. Tracey-Lester Method 에서 α 는 - 0.47 을 사용하였으며 본 방법에서 β 는 0.72 를 사용하였다. 비교된 바와 같이 Tracey-Lester Method 와 Kazemipour Method 는 최대오차가 -4.4 %, 본 방법의 최대오차는 3.6 % 이다. 평균오차는 Tracey-Lester Method가 -0.38 %, Kazemipour Method 가 -0.42 %, 본 방법이 0.06 % 이며, 표준편차도 본 방법이 가장 작은 0.0023 이다.

세 방법의 조정계수는 모두 적용된 실험자료인 Tracey & Lester의 실험자료를 이용하여 구한 것들이기 때문에 산정된 마찰계수의 오차가 대체적으로 작다. 따라서 세 방법 모두 신뢰도가 높은 것으로 나타나는데 추후 여타 실험자료에 적용하여 각 방법의 일반성을 확인하여야 할 것이다. 여기서 본 저자가 특히 강조하고 싶은 점은 본 방법을 Kazemipour Method 와 비교하였을 때, 수식이 훨씬 단순함에도 불구하고 오히려 신뢰성이 높게 나타난다는 점이다. 개수로의 단면형상이나 조도의 변화에 대한 영향을 수식으로 표현하는데 단순한 형태의 산정식이 유리하기 때문에 본 방법의 적용가능성이 높을 것이다. 즉 Kazemipour Method 에서 구해야하는 비례계수 ϕ 의 일반화보다 본 방법에서 도입하는 자유수면의 기여도 β 의 일반화가 쉬울 것으로 예상된다.

4. 결 론

마찰반경의 도입으로 관로 마찰계수 산정식을 이용하여 개수로 마찰계수를 산정할 수 있음을 제시하였다. 본 방법은 Tracey-Lester Method 나 Kazemipour Method 와 비교하여 단순하기 때문에 여러 조건에 대한 일반화가 용이할 것으로 믿는다. 마찰반경의 산정에는 자유수면의 마찰에 대한 기여도 β 를 결정하여야 하는데 Tracey-Lester의 실험에서와 같이 측면과 저면의 조건이 같을 때 0.72 가 적합한 수치였다. 측면과 저면의 조건이 다를 때, 즉 조도(wall roughness)가 다를 때, 그리고 단면의 형태에 따라 수면기여도 β 는 약간의 변이가 있을 것으로 예상되며 이의 일반화는 더 많은 실험자료의 확보가 이루어진 후 가능할 것이다. 또한 완난류 뿐만아니라 천이 난류와 전난류에 대한 개수로 마찰계수도 마찰반경의 도입으로 기존 관로 마찰계수 산정식을 이용하여 산정할 수 있을 것으로 믿는다.

표 2. 마찰계수 산정식의 비교 (실험자료: Tracey & Lester (1979))

NO	U cm	h mm	b/h	S E4	ν E6	R _h E-3	Darcy-Weisbach Friction Factor f						
							Meas. E2	Tracey-Lester		Kazemipour		Yoo	
								E2	%	E2	%	E2	%
1	35	91	11.7	3.8	0.93	34	1.88	1.91	1.5	1.89	0.8	1.91	1.7
2	52	153	7.0	4.7	0.95	84	1.63	1.62	-0.9	1.60	-1.7	1.61	-1.4
3	65	81	13.1	13.2	1.03	52	1.72	1.74	1.4	1.74	1.2	1.75	1.8
4	58	92	11.6	9.2	1.03	52	1.69	1.75	3.4	1.74	3.0	1.75	3.6
5	49	108	9.9	6.1	1.05	50	1.72	1.77	2.7	1.76	2.2	1.77	2.8
6	43	122	8.8	4.3	1.05	50	1.76	1.78	1.0	1.76	0.2	1.77	0.8
7	14	95	11.2	0.7	0.90	15	2.35	2.32	-1.4	2.28	-3.0	2.32	-1.2
8	32	124	8.6	2.4	0.96	42	1.84	1.85	0.6	1.83	-0.4	1.85	0.4
9	43	122	8.7	4.2	1.00	53	1.72	1.76	2.1	1.74	1.3	1.75	1.9
10	54	123	8.7	6.3	1.00	67	1.66	1.68	1.0	1.67	0.4	1.67	0.8
11	75	126	8.5	11.1	0.98	96	1.57	1.56	-0.6	1.56	-0.9	1.56	-0.8
12	84	127	8.4	13.2	0.98	108	1.51	1.52	0.8	1.52	0.6	1.52	0.6
24	21	131	8.2	1.1	0.98	28	2.06	2.03	-1.6	2.00	-3.1	2.02	-1.9
30	107	138	7.7	19.2	0.89	167	1.42	1.40	-1.1	1.40	-1.2	1.40	-1.4
34	61	151	7.1	6.5	0.89	105	1.58	1.54	-2.3	1.53	-2.9	1.54	-2.8
40	34	153	7.0	2.1	0.88	60	1.70	1.73	1.7	1.71	0.6	1.72	1.2
41	62	63	17.0	15.6	0.88	44	1.80	1.79	-0.6	1.79	-0.6	1.80	0.0
42	60	45	24.0	21.1	0.88	30	1.91	1.93	0.9	1.93	0.9	1.94	1.8
43	41	66	16.3	6.9	0.88	30	1.92	1.94	1.2	1.93	0.8	1.95	1.8
45	30	33	32.7	9.5	0.96	10	2.51	2.47	-1.8	2.44	-2.7	2.49	-0.6
46	15	68	15.7	1.2	0.98	10	2.57	2.51	-2.1	2.47	-3.8	2.53	-1.6
47	35	30	35.0	12.9	0.92	12	2.42	2.39	-1.1	2.37	-1.9	2.42	0.1
48	41	45	23.6	11.0	0.90	21	2.08	2.10	0.9	2.09	0.5	2.12	1.9
50	23	45	23.6	4.1	0.90	12	2.42	2.40	-1.0	2.37	-2.0	2.42	0.0
13	187	104	10.3	66.1	0.90	217	1.28	1.32	3.5	1.33	4.2	1.33	3.5
14	210	29	36.8	330.5	0.90	68	1.60	1.62	1.1	1.63	2.1	1.63	2.2
15	179	26	40.4	276.5	0.90	53	1.69	1.70	0.8	1.72	1.7	1.72	1.9
19	70	30	35.2	46.8	0.93	23	2.14	2.05	-4.4	2.05	-4.4	2.07	-3.3
20	56	28	37.4	33.0	0.93	17	2.23	2.18	-2.1	2.18	-2.4	2.21	-0.9
21	234	57	18.8	195.6	0.85	155	1.41	1.39	-1.4	1.40	-0.4	1.40	-0.9
22	204	59	18.2	148.7	0.95	126	1.46	1.45	-0.9	1.46	0.0	1.45	-0.4
23	178	59	17.9	115.6	0.93	113	1.51	1.48	-2.1	1.49	-1.3	1.49	-1.6
26	137	139	7.7	29.8	0.93	204	1.36	1.35	-0.5	1.35	-0.4	1.35	-0.8
27	177	108	9.9	59.5	0.93	204	1.33	1.34	0.8	1.35	1.4	1.34	0.8
28	235	79	13.5	141.6	0.91	205	1.37	1.33	-2.9	1.34	-2.1	1.33	-2.7
29	138	109	9.7	38.3	0.91	166	1.42	1.39	-1.8	1.40	-1.4	1.39	-1.8
31	185	79	13.6	90.3	0.88	166	1.41	1.38	-2.0	1.39	-1.2	1.39	-1.7
33	141	85	12.5	51.0	0.86	139	1.46	1.43	-1.9	1.44	-1.3	1.44	-1.6
35	225	41	25.7	261.1	0.89	105	1.53	1.49	-2.6	1.51	-1.5	1.50	-1.8
36	152	52	20.3	95.8	0.88	91	1.53	1.54	0.5	1.55	1.3	1.55	1.2
37	193	41	25.7	190.5	0.86	92	1.54	1.53	-0.8	1.54	0.2	1.54	0.1
38	130	61	17.4	62.5	0.88	91	1.57	1.54	-1.8	1.55	-1.2	1.55	-1.2
39	190	28	38.1	298.0	0.88	61	1.70	1.65	-2.7	1.67	-1.8	1.67	-1.7
44	91	29	36.5	74.3	0.88	30	1.95	1.92	-1.7	1.92	-1.4	1.94	-0.6
51	64	38	28.2	29.4	0.83	29	1.97	1.94	-1.6	1.94	-1.5	1.96	-0.6
52	102	31	34.0	82.7	0.85	38	1.82	1.83	0.6	1.84	1.1	1.85	1.7
53	115	38	28.2	82.7	0.85	51	1.71	1.72	0.6	1.73	1.2	1.74	1.6
54	82	32	33.7	55.1	0.85	30	1.91	1.92	0.5	1.92	0.7	1.94	1.6
55	79	31	34.7	53.5	0.83	29	1.94	1.93	-0.4	1.94	-0.1	1.95	0.8
Average Error								-0.38		-0.42		0.06	
Standard Deviation								0.0025		0.0029		0.0023	

5. 참고 문헌

- 유 동 훈, 천이류에서의 관마찰, 대한토목학회 논문집, 1993 (제출 심사중)
- Bazin, H.E., Etude d'Une Nouvelle Formule pour Calculer le Debit des Canaux De'couverts, Memoire No.41, Annales des Ponts et Chaussées, 14, pp.20-70, 1897.
- Colebrook, C.F., Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws, J. Inst. Civil Eng. London, Vol.11, pp.133-156, 1938.
- Kazemipour, A.K., Cross-sectional shape effects on resistance to uniform flow in open channels and non-circular closed conduits, Ph.D. Thesis, University of Queensland, Australia, 1979.
- Kazemipour, A.K. and Apelt, C.J., Shape effects on resistance to uniform flow in open channels, J. Hydraulic Research, I.A.H.R., Vol.17, No.2, pp. 129 - 147, 1979.
- Manning, R., On the flow of water in open channels and pipes, Trans. Inst. Civil Eng. Ireland, 20, pp. 161-195, 1889.
- Manning, R., On the flow of water in open channels and pipes, Supplement to 1889 paper, Trans. Inst. Civil Eng. Ireland, 24, pp. 179-207, 1895.
- Nikuradse, J., Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Rogen, Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh., Vol.356, 1932.
- Nikuradse, J., Stromungsgesetze in rauhen Rohren, Ver. Dtsch. Ing. Forsch., Vol.361, 1933.
- Prandtl, L., Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Z. Angew. Math. Mech., Vol.5, No.2, p.136, 1925.
- Tracey, H.J. and Lester, C.M., Resistance coefficient and velocity distribution: smooth rectangular channel, U.S. Geological Survey, Water-Supply Paper 1592-A, 1961, 18 p.