

# 개수로내 Kinematic 모델과 Diffusion 모델의 적용실패 범위

최 계 운\* 강 관 원\*

## 1. 서론

개수로내 흐름을 해석하기 위하여는 질량의 보존을 나타내는 연속방정식과 운동량의 보존을 나타내는 운동량 방정식이 함께 이용되는데 이중에서 운동량 방정식은 완전운동량 방정식인 full dynamic 방정식으로 사용되거나 이를 간략화한 간략방정식들로 사용된다. 여러 경우에 있어서 흐름해석을 실시할때 완전운동량 방정식에는 방정식속에 비선형항등이 포함되어 있기때문에 full dynamic 방정식을 이용하기보다는 보다 간략화된 kinematic 방정식이나 diffusion 방정식 등이 종종 사용되고 있다. 그러나, 이와같이 간략화된 방정식들이 지난 수십년간 개수로내 흐름해석을 위하여 사용되어져 왔지만 적절하지 못한 범위에 사용되어진다면 상당히 바람직하지 않은 결과를 초래하게 되므로 그동안 여러 연구자들이 이와같은 간략화된 이론이나 모델의 적용범위등에 대하여 연구하여 왔었다. Henderson(1966)은 급경사를 가진 강에서 홍수로 인한 수위가 아주 빠르게 상승될때 full dynamic 방정식에 나타난 다섯개항에 대한 상대적인 크기를 비교하였는데, 구체적으로는 시간가속도항(local acceleration term), 공간가속도항(convective acceleration term), 압력항(pressure term), 중력항(gravity term) 및 마찰항(friction term)들의 상대적인 크기가 얼마나 차이가 있는가를 조사하였다. 그는 조사를 통하여 중력항이 압력 및 가속도항을 합한것보다 25배나 더큰 값을 가졌다고 밝히고 있다. 따라서, 이와같은 경우에 가속도항은 상대적으로 적고 또한 압력항도 상대적으로 적기때문에 중력항과 마찰항이 같다는 가정을 가진 kinematic 모델을 적용하여 개수로내 유출해석을 하여도 무방할 것이다. 그러나, Schaaque (1965)는 지표면유출과 하수도내 유출에서 Henderson과 다른 실험결과를 제시하고 있는바, 그의 결과는 Henderson 결과에 비하여 가속도항과 압력항의 상대적인 크기가 상당히 크게 나타나 있다.

---

\* 한국수자원공사 수자원연구소 책임연구원

\*\* 인하대학교 토목공학과 교수

Harder와 Armacost(1966)는 Missouri강에서 유량이 24,000ft<sup>3</sup>/sec에서 104,000ft<sup>3</sup>/sec로 순식간에 상승하는 홍수시에 가속도항의 상대크기를 측정한 결과 마찰항의 5%에 이른다는 결론을 도출하였다. 또한, 일본내에서는 Iwasaki(1967)가 경사가 급하고 강의 폭이 좁은 편인 Kitakami 강에서 상당히 큰 홍수시에 가속도항의 크기를 조사하였으며 이때 가속도항의 크기는 압력항의 크기에 비하여 1.5%에 지나지 않는다는 결론을 도출하였다.

한편, Ragan(1965)은 하천내 흐름을 해석할때 하천내 총 유입량중에서 측면유입량이 차지하는 비중이 클때 공간적인 가속도항을 무시한 계산은 상당히 신뢰하기 어려운 결과를 가져올 수 있다고 주장하였으며, 최근에 Richardson(1989)은 이동강우에 의한 지표면 유출해석에서 수치해석을 통한 각각의 항의 크기를 비교하였는데, 그의 결과는 기존의 전형적으로 알려진 크기와는 다른 결과를 나타내고 있으며 특히 수면상승시에는 시간가속도항의 상대크기가 상당히 크다고 주장하였다. 이와같은 full dynamic 방정식내 각 항의 크기를 통한 연구와 병행하여 몇몇 연구자들은 diffusion 및 kinematic 모델의 적용범위를 구체적으로 제시하기 위한 연구를 실시하였는데 Henderson (1963)은 하천경사를 주로 이용하여 이들 모델의 적용한계에 대하여 연구하였으며, 급경사에서의 홍수파는 kinematic 모델에 의하여 잘 해석되며 완경사에서의 홍수파는 diffusion 모델에 의하여 잘 해석된다고 밝히고 있다. 또한, 그는 완경사나 급경사가 아닌 중간정도의 경사에서는 full dynamic 방정식에 의하여만 잘 해석된다고 밝히고 있다. 그러나, 그의 결과중 급경사, 완경사, 중간경사에 대한 정확한 구분이 모호한 상태이며 이 기준을 실제 해석에 적용하기 위하여는 사용자의 주관에 따라 판단할 수 밖에 없어 사용자에 따라 다른 결과를 초래하게 된다. Ponce(1978)등은 시간이 경과함에 따라 침투유량이 줄어드는 정도에 따라 kinematic 모델과 diffusion 모델의 적용범위를 연구하였으며 그들은 완만한 경사에서 kinematic 모델을 적용하기 위하여는 홍수파의 주기 T가 상당히 길어야 하며 급경사에서는 홍수파의 주기 T가 짧아도 가능한 것으로 발표하였다. 또한, 그들은 diffusion 모델의 적용범위가 kinematic 모델의 적용범위에 비하여 상당히 넓은 범위의 하상경사 및 홍수파 주기에 적합하다고 주장하였다. 현재 이와같은 적용범위가 비교적 많이 이용되고 있지만, 제안된 적용범위 결정인자인 홍수파의 주기 T나, 참고하천폭 b등이 실제 홍수중에는 미리 예측할 수 없기 때문에 실시간 개수로 흐름계산에는 적용에 상당한 난점이 있다. 그러므로, 기왕에 도래되었던 홍수에 대한 흐름계산 뿐만아니라 실시간 개수로 흐름계산에도 사용될수 있는 kinematic 및 diffusion 모델의 적용범위에 관한 연구가 절실한 실정이다.

## 2. 무차원 방정식과 무차원 결정인자

Diffusion 모델과 kinematic 모델의 적용범위를 결정하기 위하여 full dynamic 방정식내 각각의 항의 상대적인 크기를 비교하여 가속도항과 중력항이 갖는 상대적인 중요도를 판단하

는 것이 필요하다. 이와같은 판단을 위하여는 각각의 항을 무차원화하는 것이 우선적으로 필요하다. 이를 위한 개수로내 흐름을 나타내는 full dynamic 방정식은 식 2.1과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{Q^2}{A} \right)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gAS_o + gAS_f = 0 \quad (2.1)$$

위의 방정식에서 시간 및 공간 가속도항의 상대적 크기가 다른항에 비하여 상당히 적어 무시할 수 있다는 가정하에 제안된 방정식이 diffusion 방정식이며 가속도 및 압력항이 다른항에 비하여 상당히 적다는 가정하에 제안된 방정식이 kinematic 방정식이고 이와같은 방정식을 이용한 수치해석 모델을 diffusion 모델 및 kinematic 모델이라 한다. 위의 방정식 2.1을 수치해석 모델로 계산할 때에는 마찰경사  $S_f$ 를 Chezy나 Manning 등의 마찰방정식으로 치환하여 계산하는데, 본 논문에서는 Manning의 마찰방정식이 사용되었다.

이와같은 full dynamic 방정식에서 각각의 항의 상대적인 크기비교를 위하여 식 2.2와 같이 무차원화 하였다.

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1 \quad (2.2)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{gAS_o} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \phi_2 = \frac{1}{gAS_o} \frac{\partial \left( \frac{\phi^2}{A} \right)}{\partial x}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{S_o} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \phi_4 = \frac{S_f}{S_o}$$

식 2.2에서  $\phi_1$ 은 중력항에 대한 시간가속도 항의 상대적인 크기를 나타내며,  $\phi_2, \phi_3$  및  $\phi_4$ 는 각각 중력항에 대한 공간가속도항, 압력항 및 마찰항의 상대적인 크기를 나타낸다. 따라서,  $\phi_1 + \phi_2$ 의 크기가 적을때의 적용범위는 diffusion 모델의 적용범위,  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ 의 크기가 적을때의 적용범위를 kinematic 모델의 적용범위로 할 수 있다. 이와같이 무차원화된 방정식의 상대적인 크기는 여러형태의 인자에 따라 달라질 수 있는데, 본 논문에서 무차원화된 3개의 결정인자를 선정하였는바 하나는 식 2.3으로 표현되는 상류측 경계에서의 무차원 수심증가  $G_w$ 이며 나머지는 Froude 수(Fr 수) 및 하상의 경사  $S_o$ 이다.

$$G_w = \frac{1}{C} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.3)$$

여기에서  $C$ 는 개수로내 흐름의 전파속도이고  $\frac{\partial h}{\partial t}$ 는 개수로 상류부에서의 수심의 변화를 나타낸다. 즉, 개수로 상류측에서 순간적인 시간변화에서 수심의 변화를 나타내는바, 흐름해석시간 간격에 따른 수심상승이나 하강을 나타내고 있어 실시간에서의 흐름해석에 적용이 가능하며 또한  $S_0$ 나  $Fr$  수도 쉽게 얻을수 있어 실시간 홍수파 측정등에 쉽게 적용될 수 있다.

이와같은 diffusion 및 kinematic 모델의 적용범위를 결정하기 위하여, 필자에 의하여 개발된 full dynamic 모델이 이용되었다. 이 모델은 4점의 유한차분법이 이용되었으며 계산 방법으로는 음해법(implicit method)이 이용되었다.

### 3. 경계조건의 설정 및 모델의 모의

Kinematic 모델과 diffusion 모델의 적용범위 결정을 위하여 위에서 제안된 모델을 이용하여 full dynamic 방정식의 각각의 항의 상대크기를 비교하는 모의실험을 실시하였는바, kinematic 모델에 대하여는 시간 및 공간가속도 항의 크기를, diffusion 모델에 대하여는 가속도항과 압력항의 크기를 다른항과 비교하여 이들항이 전체 full dynamic 방정식에 미치는 영향이 미미함을 입증하고 이들항을 생략하므로써 신뢰성 있는 적용범위를 결정하게 된다. 앞장에서 언급된 바와같이 적용범위는 상류경계에서의 무차원 수심증가  $G_w$ 와 개수로의 하상경사  $S_0$ 에 의하여 나타냈는데 이와같은 값들은  $Fr$  수에 따라 다른 값을 가지므로 여러  $Fr$  수에 따라 적용범위를 나타내었다. 본문에서 적용범위에 관한 것은 그림으로 나타냈으며 이때 그림은 log-log 그림을 이용하였다. 모의실험에 사용된 단면들은 총 31개의 단면들이 이용되었으며 상류측에서 사용된  $Cr$  수(Courant 수)는  $\frac{\Delta t}{\Delta x} (V + C)$ 로써 정의되었다.

모의실험에서는 경계조건으로  $Cr$  수와 Manning의  $n$ 값은 각각 0.5와 0.04가 사용되었다. 상류경계에서의 무차원 수심증가  $G_w$ 는 최상류측 수심증가로 나타냈으며 각각의 모의시  $Fr$  수에 따라 평균수심  $H_0$ 를 결정한후 최대 수심을 평균 수심의 1.5배에 이르도록 결정하였으며 최소 수심을 평균수심  $H_0$ 의 0.5배에 이르도록 결정하였다. 실험모의는 50번의 연속적인 계산으로 이루어졌으며 이와같은 상류경계조건은 그림 3.1과 같다. 또한, 하상경사는 0.00001부터 0.05까지 이루어졌으며  $Fr$  수로는 0.1, 0.5 및 0.9의  $Fr$  수가 이용되었다.

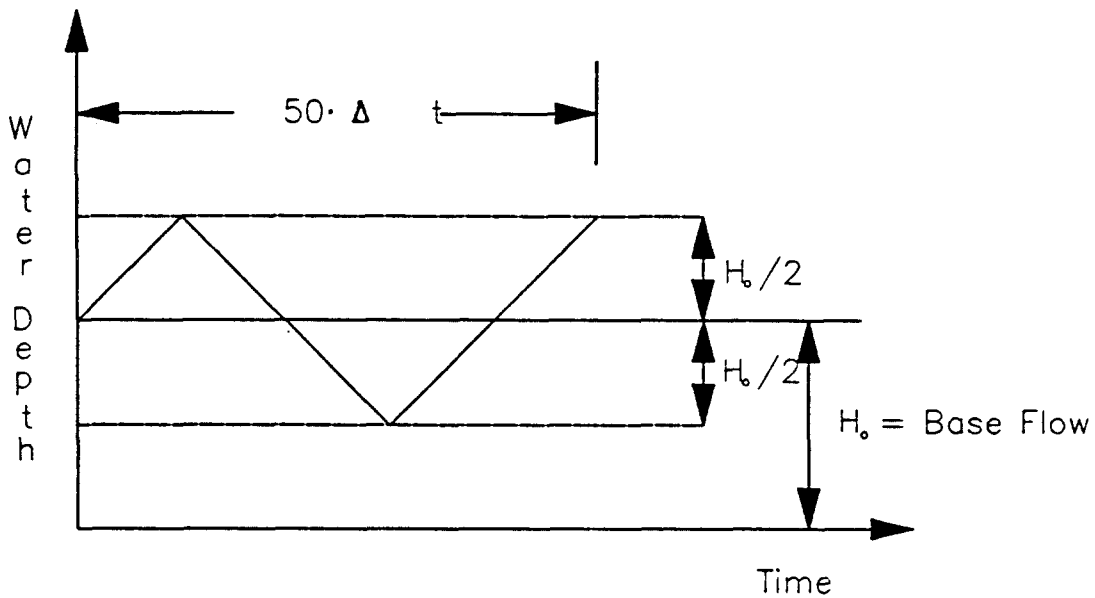


그림 3.1 상류 경계조건의 설정

#### 4. Kinematic 및 Diffusion 모델의 적용범위

위에서 제안된 모델을 이용하여 kinematic 및 diffusion 모델의 적용신뢰범위를 결정하였다. 그림 4.1은 Fr 수가 0.1, 0.5 및 0.9인 경우에 full dynamic 방정식으로부터 최대 1%의 편차를 나타내는 점을 한계로하여 계산된 kinematic 모델의 적용신뢰범위이며 이는 실험모의에서  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ 의 절대값이 0.01이하가 되는 점을 나타낸 것이다. 그림에서 보는바와 같이 kinematic 모델의 적용신뢰범위는 급경사에서 점차 증가하고 있으며 동일한 하상경사에서의 kinematic 모델의 적용신뢰범위는 Fr 수가 증가함에 따라 증가하고 있다. 그림 4.2는 Fr 수가 0.1, 0.5 및 0.9인 경우에 full dynamic 방정식으로부터 최대 1%의 편차를 나타내는 점을 한계로 하여 계산된 diffusion 모델의 적용신뢰범위이며, 이는 실험모의에서  $\phi_1 + \phi_2$ 의 절대값이 0.01이하가 되는 점을 나타낸 것이다. 그림에서 보는바와 같이 diffusion 모델의 적용신뢰범위는 경사가 급할수록 증가하고 있으나 Fr 수가 증가할수록 적용신뢰범위는 감소하고 있다. 즉, kinematic 모델과 diffusion 모델은 경사에 대하여는 적용신뢰범위가 동일하게 늘어나는 특성을 가지고 있지만, Fr 수에 대하여는 정반대로 한쪽은 늘어나지만 다른 한쪽은 줄어드는 경향을 나타내고 있다. 이와같은 특성을 감안하여 그림 4.3은 Fr 수가 0.5에서 1%의 편차를 가진 kinematic 및 diffusion 모델의 적용신뢰한계를 나타내주고 있는바, 그림에서 보는바와 같이 하상경사가 작고 Gw가 작은 경우에 있어서나 급경사에 Gw수가 큰 경우에 있어서는 kinematic 모델의 적용범위가 diffusion 모델의 적용범위보다 큰 경우도 발생한다.

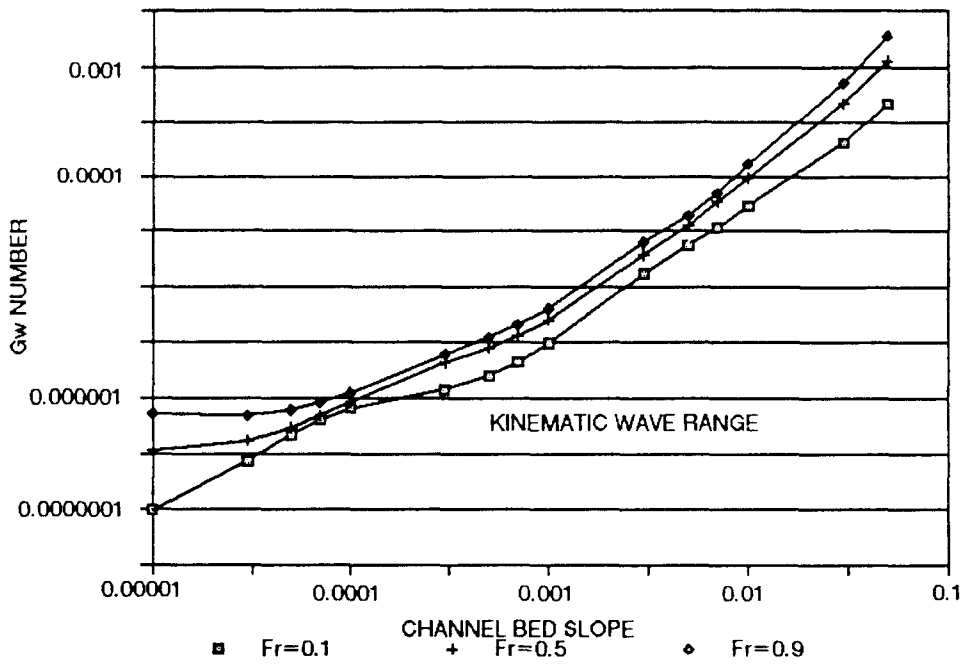


그림 4.1 최대 편차 1%에서 kinematic 모델의 적용신뢰범위

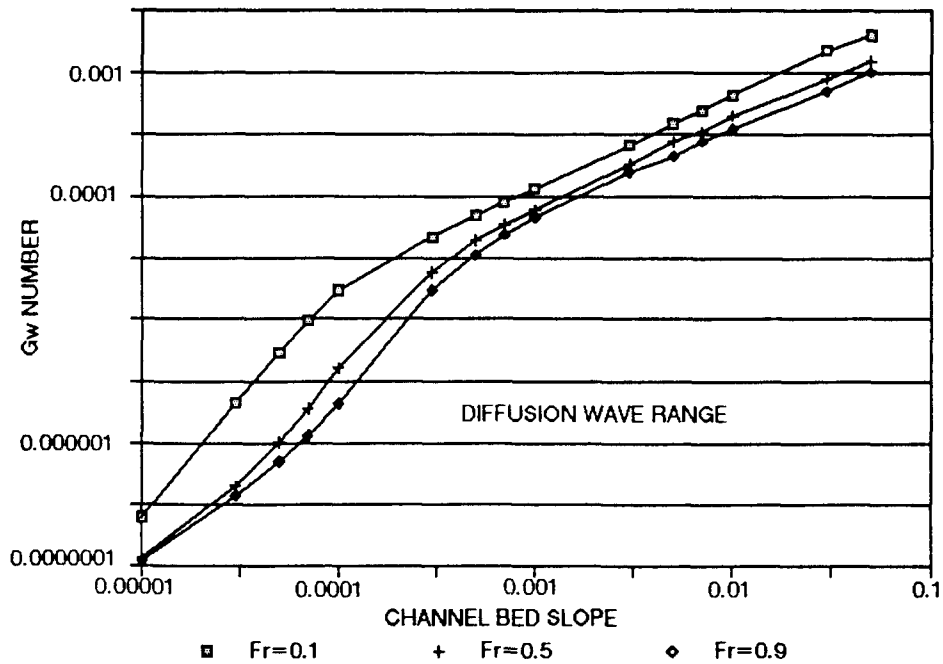


그림 4.2 최대 편차 1%에서 diffusion 모델의 적용신뢰범위

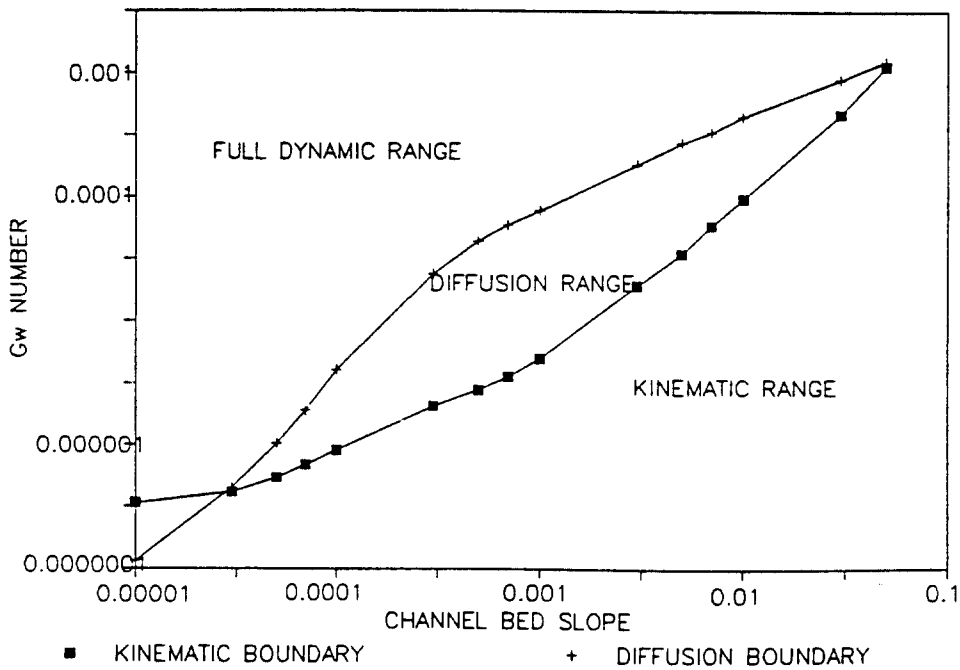


그림 4.3 Fr 수 0.5와 최대 편차 1%에서 모델의 적용신뢰범위

## 5. 결론

본 논문에서 kinematic 및 diffusion 모델의 적용신뢰범위에 대하여 수치 모의실험을 통하여 연구하였는바, 적용신뢰범위 산정을 위하여 full dynamic 방정식을 무차원화 하였으며, 구체적인 적용신뢰범위는 하상경사  $S_0$ , 상류경계에서의 무차원 수심증가  $Gw$  및  $Fr$  수에 따라 나타내었다. 특히 미소시간동안의 상류경계에서의 무차원 수심증가  $Gw$ 를 이용하여 적용신뢰범위를 나타내어 실시간 홍수파 해석등에 상당히 유효하게 이용하도록 하였다. 모의실험을 통한 결과, 완경사에서는 압력항의 크기가 상당히 크게 나타났으며 이때 kinematic 모델을 적용하는 것이 바람직하지 않은 것으로 판명되었다. 전반적으로, kinematic 모델은  $Fr$  수가 증가함에 따라 증가하나 diffusion 모델에서는  $Fr$  수가 증가함에 따라 적용범위가 줄어드는 경향이 있다. Diffusion 모델의 적용범위는 kinematic 모델에 비하여 상당히 넓은 형편이며 이와같은 결론은 이전 연구자들과 일치하나, 몇몇 범위에 대하여는 이와 일치하지 않았다. 즉, 홍수시 상승곡선에서는  $\phi_1 + \phi_2$ 의 값은 +를 나타내나  $\phi_3$ 의 값은 -값을 나타내어  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ 의 값은  $\phi_1 + \phi_2$ 의 값보다 오히려 적은 값을 나타내게 되어 kinematic 모델의 적용신뢰범위가 diffusion 모델의 적용신뢰범위 보다 큰 경우가 있었다. 따라서, 실제 모델의 적용신뢰범위를 선정하여 간략화 모델을 적용할 때에는 각각의 무차원 항의 상대적 크기에 따라 여러개의 그래프로 제안된 그림을 이용하는 것이 바람직하다.

## 참고문헌

1. Harder, J. A. and Armacost, L. V., 1966, "Wave propagation in Rivers", Hydraulic Engineering Laboratory Report No. 1, Ser. 8, University of California, Berkeley, Ca.
2. Henderson, F. M., 1963, "Flood Waves in Prismatic Channels", Journal of the Hydraulics Division, ASCE., Vol. 89, No. Hy4, July, 1963, pp.39-67.
3. Henderson, F. A., 1966, "Open Channel Flow", Mac Millan Company, New York.
4. Iwasaki, T., 1967, "Flood Forecasting in the River Kitakami", Proceedings., International Hydrology Symposium, Fort Collins, Co. pp.103-112.
5. Ponce, V. M., Li, R. M. and Simons, D. B., 1978, "Applicability of Kinematic and Diffusion Models", Journal of Hydraulics, No. 3, pp.353-360.
6. Ragan, R. M., 1965, "Synthesis of Hydrographs and Water Surface Profiles for Unsteady Open Channel Flow with Lateral Inflows", Ph. D. Dissertation, Cornell University Water Resources Center, Ithaca, New York.
7. Schaake, J. C., Jr., 1965, "synthesis of the Inlet Hydrograph", Storm Drainage Res. Proj. Tech. Rep. 3, Johns Hopkins University, pp 25-26.
8. Richardson, J. R., 1989, "The Effect of Moving Rainstorms on Overland Flow Using One-Dimensional Finite Elements", Dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Co.