

1차원 이류·확산 방정식에 대한 유한차분법과 유한해석법의 비교연구

A Comparative Study on Finite Difference Method and Finite Analytic Method to one dimensional Convective-Diffusion Equation

이 원 환 * 조 원 철 ** 최 성 열 ***

Lee, Won Hwan Cho, Won Cheol Choi, Song Yeol

1. 서론

수공학 분야에서 뿐만 아니라 모든 공학문제의 해석에서 자주 이용되는 방법중 하나는 편미분방정식(PDE)들로 구성되는 지배방정식(governing equation)을 사용하여, 자연현상을 수학적 모형으로 나타내는 것이다. 그러나 이류항(convective terms)들에 의한 비선형성(nonlinearity), 복잡한 경계조건과 적용영역, 그리고 종속변수들 사이의 결합(coupling)문제 등으로 인하여, 이러한 편미분방정식계의 해를 해석적인 수단으로 구한다는 것은 매우 어려우므로, 연속방정식과 운동량방정식 등으로 구성되는 지배방정식의 연속흐름장에서의 해는 유한차분법(FDM), 또는 유한요소법(FEM) 등의 이산화된 수치기법을 통해서 얻고 있는 실정이다. 뿐만아니라 Navier-Stokes 방정식이나 이와 유사한 수학적 특성을 갖는 이류·확산(convective-diffusion) 방정식을 풀어야 하는 유체흐름 문제에 있어서는 간혹 수치불안정(numerical instability)과 수치점성(numerical viscosity) 등이 발생하거나, 수렴이 잘 되지 않는 등의 문제에 직면하게 된다. 따라서 기존의 수치기법이 갖는 오차발생 요인을 근본적으로 배제시킨 안정된 수치기법을 위한 많은 시도가 이루어져 왔으며, 그 중 하나가 Chen 등(1)-(5)에 의해 개발된 유한해석법(Finite Analytic Method:FAM)이다. 본 연구에서 취급하고자 하는 유한해석법(finite analytic method:FAM)을 포함한 대부분의 수치기법들은 대체로 다음과 같은 유사성을 가지고 있다. 첫째는 전흐름영역을 소영역(subdomain)으로 나누고, 둘째는 격자점 사이나 혹은 국부요소 전체에 대해 적절한 차분근사(difference approximation)나 형상함수(shape function)를 사용하여 편미분방정식계에 대한 대수방정식(algebraic equation)을 유도하고, 마지막으로 주어진 경계조건과 초기조건을 사용하여 대수방정식으로부터 수치해를 얻는다.

* 연세대학교 토목공학과 교수

** 연세대학교 토목공학과 부교수

*** 연세대학교 토목공학과 박사과정

따라서 임의의 편미분방정식계에 대응하는 대수적 표현식을 어떻게 유도하는가에 따라 수치기법의 종류를 구별할 수 있으며, 현재까지 수공학 분야에서는 유한차분법과 유한요소법이 가장 보편적으로 사용되고 있는 실정이다. 이와같이 수치기법에서는 대수적 표현식을 유도하기 위해 여러 근사법을 사용함으로써 이에 따른 오차가 어쩔 수 없이 발생되고 있는 실정이다. 특히 유한차분법에 있어서는 절단된(truncated) Taylor 급수전개식을 사용하여 지배방정식을 근사화시켜 유한차분화된 대수방정식을 구성하므로, 절단되는 급수의 형식과 크기(order) 그리고 사용되는 급수전개의 형식에 따라 차분방정식의 안정성과 수렴성에 영향을 미치게 된다. 뿐만아니라 유한차분법이 갖는 또 하나의 문제점은 편미분방정식 각각의 항을 Taylor 급수로서 차분근사시키는 방법으로 차분방정식을 유도하기 때문에 편미분방정식의 전체적인 물리적 특성에 대한 고려가 없다는 것이다. 즉, 편미분방정식의 각각의 항들을 정확하게 차분근사시켰다 하더라도, 이것이 원래의 편미분방정식에 대해 반드시 높은 물리적 정확성을 갖는 것은 아니라는 사실이다(6). 따라서 본 연구에서는 Navier-Stokes 방정식의 모형방정식으로 볼 수 있는 1 차원 Burgers 방정식의 선형화된 식 및 비선형 형태의 식을 사용하여, 유한차분법과 유한해석법의 안정성과 해석해로의 정확한 근사정도에 대해 살펴봄으로써, 유한해석법의 응용성에 대해 살펴보고자 한다.

2. 유한해석법

유한해석법의 기본원리는 상미분방정식이나 편미분방정식의 수치해를 푸는 과정에서 원방정식의 국부적인 해석해(local analytic solution)를 이용하는 것이다. 단순한 흐름경계 영역에서는 적용영역, 지배방정식, 그리고 경계조건 등을 국부적으로 단순화 시킬 수 있다는 사실에 착안하여, 유한해석법에서는 방정식의 해석해(analytic solution)를 국부적으로 얻을 수 있도록 전흐름영역을 기타 수치기법과 유사하게 소영역(subdomain)으로 분할한다. 임의 한 내부 격자점 $P(i, j)$ 에서의 국부해석해가 구해지면, 내부점에서의 값과 이 점을 둘러싼 인접 격자점에서의 값들이 서로 연관된 대수방정식을 구할 수 있다. 상술한 바와 같은 유한해석법의 기본원리는 국부요소 상에서 대수방정식을 결정하는 점에서는 기타의 수치기법과 유사하나, 지배방정식의 대수방정식을 유도하는 과정에서 근사법인 차분근사나 형상함수가 아닌 국부해석해를 이용한다는 점이 다른 수치기법과는 상이한 점이다. 기본원리를 제시하기 위해서 식(1) 과 같은 타원형방정식(elliptic P.D.E.)을 고려하기로 한다.

$$L(\phi) = g \quad (1)$$

여기서 ϕ 는 종속변수, L 은 편미분연산자(예로서, $L = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$), g 는 독립변수 x, y 에만 의존하는 비균질항(inhomogeneous term) 이다. 2 차원 흐름문제에 있어서 편미분방정식은 적용영역 D 내에서 정의되며, 이 적용영역은 유한개의 소영역으로 나누어진다. 그림 1. (a) 에서와 같이 내부격자점 $P(i, j)$ 를 포함하는 소영역은 $(i-1, j-1), (i, j-1), (i+1, j-1), (i-1, j), (i+1, j), (i-1, j+1), (i, j+1), (i+1, j+1)$ 에 각각 해당하는 SW, SC, SE, WC, EC, NW, NC, NE 의 8 개의 이웃하는 격자점으로 둘러싸인다. 지금 $(2\Delta x \times 2\Delta y)$ 의

소영역에서의 선형방정식 또는 선형화된 방정식을 $L(\phi) = g$ 라 하면, 소영역에 대한 해석해를 경계조건의 함수로서 다음과 같이 얻을 수 있다(그림 1.(b)참조).

$$\phi = f(\phi_N(x), \phi_S(x), \phi_E(y), \phi_W(y), \Delta x, \Delta y, x, y, g) \quad (2)$$

여기서 $\phi_N, \phi_S, \phi_E, \phi_W$ 는 소영역에서의 각각 북쪽, 남쪽, 동쪽 및 서쪽 경계조건에 관한 함수로서, 수치기법상 각 변의 격자점에서의 값을 사용하여 근사적으로 나타낼 수 있다. 따라서 식 (2) 는 궁극적으로 식 (3) 과 같이 나타낼 수 있으며, 이것은 국부경계조건에 의존하게 되는 국부요소 상에서의 해석해를 의미하게 되는 것이다.

$$\phi = f(\phi_{NW}, \phi_{NC}, \phi_{NE}, \phi_{WC}, \phi_{EC}, \phi_{SW}, \phi_{SC}, \phi_{SE}, \Delta x, \Delta y, x, y, g) \quad (3)$$

식 (3) 을 $P(i, j)$ 점에서 계산할 경우, 변수들의 종속성을 양해적으로 추출하여 정리하면 ϕ_P 에 관한 9-점 유한해석공식(9-Point FA Formula)을 식 (4) 와 같이 얻을 수 있다.

$$\phi_P = C_{NW}\phi_{NW} + C_{NC}\phi_{NC} + C_{NE}\phi_{NE} + C_{WC}\phi_{WC} + C_{EC}\phi_{EC} + C_{SW}\phi_{SW} + C_{SC}\phi_{SC} + C_{SE}\phi_{SE} \quad (4)$$

일반적으로 식 (4) 와 같은 수식은 흐름영역에 위치한 모든 격자점에 대해 계산하게되며, 내부점과 그 주변의 격자점에 관련된 대수방정식계를 형성하게 된다. 이러한 대수방정식계를 주어진 경계조건과 함께 풀므로써 유한해석법에 의한 수치해를 구할 수 있다.

3. 유한해석법의 안정성과 정확성에 대한 비교·고찰

1 차원 이류·확산 방정식을 사용하여, 기존의 유한차분법의 수치해와 유한해석법에 의한 수치해를 표 1 의 3 가지 경우에 대해 비교하여 봄으로써, 유한해석법에 의한 수치해가 발산하지 않는지(안정성)에 관한 사항과 해석해로 근사하는지(정확성)에 대해 살펴보았다. 본 연구에서 채택한 유한차분법으로는 포물선형 편미분방정식의 수치기법에 널리 사용되는 FTCS(Forward-Time & Centered-Space Explicit)법 및 MacCormack 양적차분법의 2 개의 양해법과 BTCS(Backward-Time & Centered-Space Implicit)법 및 Crank-Nicolson 음적차분법의 2 개의 음해법을 선택하였다.

● 정상상태의 해석해와의 비교

표 2 는 선형화된 Burgers 방정식을 계단형상의 경계 및 초기조건을 사용하여 유한차분법과 유한해석법으로 각각 풀었을 경우, 각각의 수치기법에 따른 수치해가 해의 발산없이 정상상태로 수렴하는지의 여부(안정성)와 수렴된 수치해가 해석해로 어는 정도 근사하는지의 여부(정확성)를 정상상태의 해석해를 사용하여 비교한 것이다. 또한 표 3 은 비선형 형태의 Burgers 방정식에 대한 안정성과 정확성을 비교·제시한 것이다. 여기서 표 2 및 표 3 에서의 정상상태로의 수렴여부와 해석해와의 정확한 일치 여부는 각각 식 (5) 및 식 (6) 의 기준(본 연구에서는 $\epsilon_1=10^{-5}$, $\epsilon_2=10^{-7}$ 로 취함)에 따라 행해졌으며, 표에서 알수 있듯이 유한차분법에 의한 수치해는 정상상태로의 수렴이 되었다 하더라도 여기서의 기준에 따른 정상상태의 해석해로의 근사는 이루어지지 않는 사실을 확인할 수 있는 반면, 유한해석법에서는 하나의 경우(비선형 방정식의 경우, $\Delta t = 0.000125$)를 제외하고는 모두 정상상태의 해석해로의

수렴이 이루어 짐으로서, 유한해석법이 유한차분법에 비해 정상상태의 해석해로 보다 정확하게 근사한다는 사실을 확인할 수 있었다.

$$\text{Max}|\text{abs}[U_i^n - U_i^{n-1}]| < \epsilon_1 \quad i=1,2,\dots,I \quad n=1,2,\dots,N \quad (5)$$

$$\text{Max}|\text{abs}[U_i^n - \text{exact}U_i^n]| < \epsilon_2 \quad i=1,2,\dots,I \quad n=1,2,\dots,N \quad (6)$$

● 비정상상태의 해석해와의 비교

Burgers 방정식에 대한 비정상 상태의 해석해와 유한차분법 및 유한해석법에 의한 수치해와의 정확성을 비교해 보기위해서, Burgers 방정식과 계단형 초기조건을 사용하여 수치모의한 결과, 계산후 0.4 시간에서의 비정상 상태에서의 수치해와 해석해를 나타낸 것이 그림 2 이다. 이 그림은 전형적인 선형방정식의 해를 나타내고 있는데, 이는 어느 정도의 계산 후에는 이류속도가 거의 0.5(상류 및 하류경계단의 값, 1 과 0 의 중간값)로 고정되어 마치 선형방정식과 동일하게 되기 때문이다. 그림 2 중의 확대부에서 볼 수 있듯이 해석해와 유한해석법에 의한 수치해가 거의 일치하는 반면, 유한차분법에서는 BTCS 기법만이 근사한 것으로 나타났다.

● wiggles 발생여부의 비교

유한해석법에서는 국부요소 상에서 편미분방정식을 해석적으로 풀므로써 다른 수치기법에서 발생할 수 있는 오차의 원인을 근본적으로 배제하기 때문에, 유한차분법에서 볼 수 있는 dissipation(amplitude) 오차나 dispersion(phase) 오차가 발생하지 않는 큰 특징이 있다. 즉, 선형형태의 방정식을 풀기위해서 FTCS 의 양해법을 사용하려고 할 때, 반드시 Von Neumann 의 안정해석에 따른 식 (7) 과 같은 안정조건(stability condition)을 만족하여야 한다. 그러나 식 (7) 에는 또하나의 조건($Co \leq 1$)이 있어야 하므로 국부레이놀드수(Rec)가 식 (8) 과 같이 2 를 넘어서게 되면 선형화된 Burgers 방정식의 수치해에 있어서 oscillation(wiggles)이 발생하게 된다(7).

$$2 \cdot Co \leq Rec \leq 2/Co \quad (7)$$

$$2 \leq Rec \leq 2/Co \quad (8)$$

여기서 c : 선형화된 Burgers 방정식에서의 이류속도

Co : Courant 수 ($= c\Delta t/\Delta x$)

Di : Diffusion 수 ($= \alpha\Delta t/\Delta x^2$)

Rec : 국부 Reynolds 수 ($= Co/Di$)

본 논문에서는 이러한 예를 제시하기 위해서, 비선형 형태의 Burgers 방정식을 사용하여 유한차분법과 유한해석법의 수치해 상의 wiggles 발생여부를 비교하여 보았다. 물론 Von Neumann 의 안정해석은 선형방정식에 대한 이론이므로 비선형 방정식의 안정해석에는 원칙적으로는 적용할 수 없으나, 경계조건으로 계단형 초기조건을 갖는 이류·확산 문제에 있어서는 wiggles 현상이 대체로 상부단락부분(상류 경계단 값, $u=1$)에서 발생하기 시작한다는 사실로 미루어 진동현상이 발생하기 시작할 때의 이곳에서의 이류속도가 1 정도를 취한다고 보

있을 때, $\Delta t = 0.04$, $\Delta x = 0.04$, $\alpha = 0.01$ 인 경우 국부레이놀드수는 4 정도가 되어 wiggles 현상이 발생할 가능성이 있음을 예상할 수 있고, 또한 본 논문은 궁극적으로 두가지 수치기법의 차이점에 대한 고찰이 주요 관점이라는 생각하에 비선형 형태의 식을 채택하여 wiggle의 발생여부를 확인해 본 결과 그림 3 에서 그림 7 를 얻을 수 있었다.

그림 3 은 계산을 시작한 후 0.48 시간이 경과한 때의 여러 해석기법별 수치해를 나타낸 것으로서, 점선 (...)으로 표시한 해석해와 십자모양(+)으로 표시한 유한해석해가 거의 일치하는 반면에, 나머지 유한차분법에 따른 수치해는 Di 값이 1/2 보다 작아서 안정조건을 만족함에도 불구하고, 양해법은 물론, BTCS 음해법에서도 조차 비록 발산현상은 보이지 않으나 wiggles 현상을 확인할 수 있다. 그림 4 ~ 그림 7 은 해석해, 유한해석법, FTCS 양해법, 그리고 Crank-Nicolson 법에 따른 수치해를 이용하여 방정식의 초기값이 이루하는 모습을 나타낸 것으로서, 유한해석법에 따른 그림 5 는 수치적 불안정 없이 해석해와 일치하면서 이루어 하지만, 나머지 해석법에서는 수치적 진동현상이 나타나는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구는 Navier-Stokes 식의 모형방정식으로 이류 및 확산거동을 갖는 선형화된 Burgers 방정식과 비선형 형태의 Burgers 방정식을 선택하여, 이에 대한 유한차분법과 유한해석법의 수치해를 해석해와 비교하여 봄으로써, 유한해석법의 응용성에 대해 고찰한 것이다. 본 연구를 통하여 얻어진 성과를 요약하면 다음과 같다.

1. Burgers 방정식 및 선형화된 Burgers 방정식의 정상상태의 해석해를 사용하여 두 수치기법에 따른 수치해를 비교해 본 결과, 해석해와의 근사정도를 동일 기준 하에서 살펴볼 때, 유한해석법이 유한차분법보다 우수한 것으로 나타났다.
2. Burgers 방정식의 비정상상태의 해석해에 대한 정확성 또한 유한해석법이 보다 잘 일치하는 것으로 나타났다.
3. 유한해석법은 유한차분법의 사용시 격자 크기의 선택에 따라 해의 수렴과정에서 발생할 수 있는 위상오차에 기인한 진동현상이 전혀 발생하지 않는다는 것을 확인할 수 있었으며, 따라서 유한해석법은 수치기법상 위상오차로부터 자유로운 안정된 해석기법이라고 판단된다.

5. 참고문헌

1. Chen, C.J., et. al., *The Finite Analytic Method, Vol.4*, IHR Report No. 232-IV, The University of Iowa, pp.289-296, 1982.
2. Chen, C.J., et. al., *The Finite Analytic Method, Vol.5*, IHR Report No. 232-V, The University of Iowa, 1982.

3. Chen, C.J., et. al., The Finite Analytic Method, Vol.7, IIHR Report No. 232-VII, The University of Iowa, 1984.
4. Chen, C.J., et. al., The Finite Analytic Numerical Solutions of Incompressible Flow Past Inclined Axisymmetric Bodies, IIHR Report No. 308, The University of Iowa, 1987.
5. Chen, C.J., et. al., The Finite Analytic Method and Its Applications, IIHR Report No. 344-II, The University of Iowa, 1990.
6. Roche, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Pub., p.21, 1976.
7. Anderson, D.A., et. al., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill Book Comp., p.157, 1984.

표 1. FAM 과 FDM의 적용일람표

구분	방정식 형태	수치기법	비 교
경우 1	선형화된 Burgers 방정식	FAM, FDM	정상상태의 해석해와 수치해
경우 2	Burgers 방정식	"	정상상태의 해석해와 수치해
경우 3	Burgers 방정식	"	비정상상태의 해석해와 수치해

표 2. 선형화된 Burgers 방정식에 대한 안정성과 정확성

항 목	수치 해법	시 간 간 격 : ΔT				
		0.000125	0.000625	0.00125	0.00625	0.0125
안 정 성	FTCS	9316	2114	1108	DI	DI
	MC	9321	2120	1115	DI	DI
	BTCS	9327	2126	1122	257	138
	C-N	9321	2260	1115	249	131
	FAM	9314	2117	1114	254	137
정 확 성	FTCS	NE	NE	NE	DI	DI
	MC	NE	NE	NE	DI	DI
	BTCS	NE	NE	NE	NE	NE
	C-N	NE	NE	NE	NE	NE
	FAM	14598	2917	1460	298	154
비고	$\Delta x = 0.05, c = 1, a = 1$					

주)NE : 수렴은 되나 임의 기준하에서 해석해로의 접근이 안됨.

DI : 발산함.

표안의 숫자는 시간중분에 따른 계산횟수를 나타냄.

표 3. Burgers 방정식에 대한 안정성과 정확성

항 목	수치 해법	시 간 간 격 : ΔT				
		0.000125	0.000625	0.00125	0.00625	0.0125
안 정 성	FTCS	4713	1203	656	DI	DI
	MC	4991	1272	695	DI	DI
	BTCS	5000	1278	701	173	96
	C-N	4997	1274	697	168	91
	FAM	4994	1272	696	171	91
정 확 성	FTCS	NE	NE	NE	DI	DI
	MC	NE	NE	NE	DI	DI
	BTCS	NE	NE	NE	NE	NE
	C-N	NE	NE	NE	NE	NE
	FAM	NE	1706	854	175	91
비고	$\Delta x = 0.05, a = 1$					

주)NE : 수렴은 되나 임의 기준하에서 해석해로의 접근이 안됨.

DI : 발산함.

표안의 숫자는 시간중분에 따른 계산횟수를 나타냄.

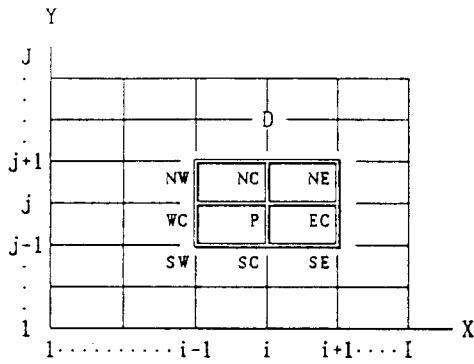


그림 1.(a) 유한해석법에서의 계산영역

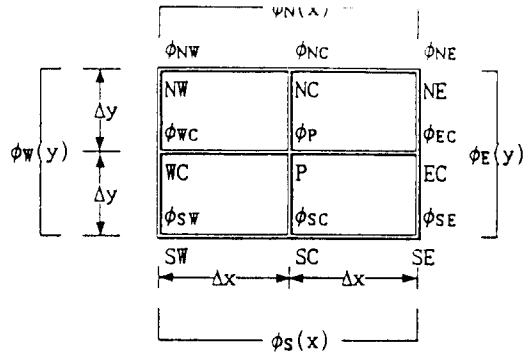


그림 1.(b) 유한해석법에서의 격부영역

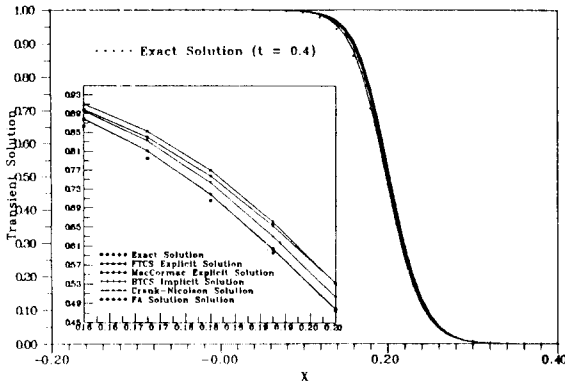


그림 2. Burgers 방정식에 대한 수치해와 해석해의 비교

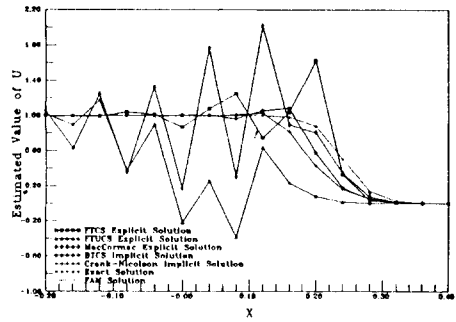


그림 3. 수치적 불안정에 따른 진동현상

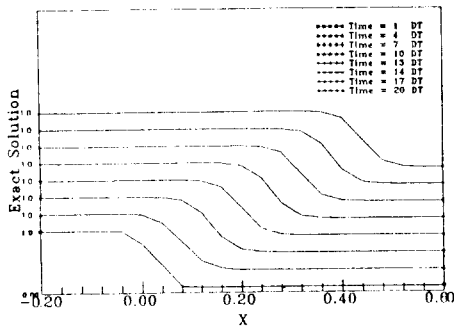


그림 4 1-차원 Burgers 방정식의 해석해

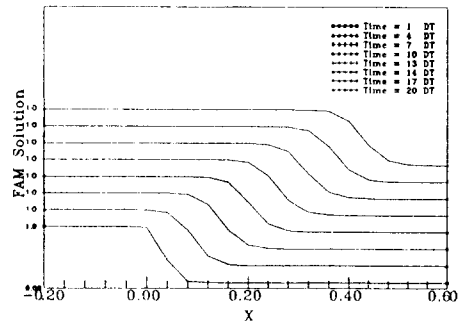


그림 5 유한해석법에 따른 수치해

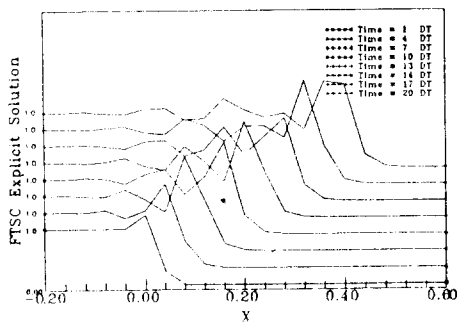


그림 6 FTCS 양해법에 따른 수치해

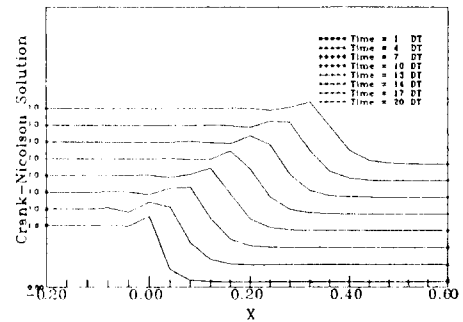


그림 7 Crank-Nicolson 법에 따른 수치해