

상류-사류의 천이구간에 대한 1 차원 부정류 해석

한건연*, 이종태**, 박재홍***

1. 서론

자연 하천에서의 부정류 해석에 있어 대상하도 구간이 상류 또는 사류가 나타나는 경우에는 기존의 Preissmann 기법을 이용하여 안정해를 얻을 수 있다. 그러나 흐름이 사류에서 상류 혹은 그 반대로 변화할 때에는 계산이 발산되어 어려움을 겪게 된다. Preissmann 기법에서 해가 발산되는 주요 원인은 하도 경사와 조도계수, 하도 단면의 급확대·급축소, 홍수터의 영향등에 기인하며 이는 혼합류의 발생과 큰 연관이 있다. 따라서, 본 연구에서는 혼합류 모형의 필요성을 검토하고 기본 방정식에 대한 matrix stability analysis를 통하여 모형의 안정성을 해석하였고, 상류-사류 및 사류-상류가 혼합하여 나타나는 하도구간에 대하여 적절한 경계 조건의 도입과 도수부의 처리등을 통한 해석 기법을 제시하였으며, 수치 실험을 통하여 Preissmann 기법의 혼합류에 대한 적용성을 검토하였다.

2. 혼합류에 대한 수치 안정성 해석

하천에서의 부정류해석을 위한 Saint-Venant 의 1 차원 부정류 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U \\ UH \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (gH - U^2) & 2U \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U \\ UH \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ gH(S_f - S_o) \end{bmatrix} = \{0\} \quad (1)$$

(1)식에서 수심 H 와 유량 UH 는 각각 (2), (3)식과 같이 표시된다.

$$H = H' + \Delta H \quad (2)$$

$$UH = U'H' + \Delta q \quad (3)$$

* 경북대학교 공과대학 부교수, 토목공학과

** 경기대학교 공과대학 교수, 토목공학과

*** 경북대학교 대학원 토목공학과 박사과정

여기서, $\Delta H, \Delta q$: 동류 상태에 대한 변동치

H' : 동류 수심 $U'H'$: 동류 유량

(2)(3) 식을 (1)식에 대입하고 유량 및 수심에 대한 무차원 변수 q^*, y^* 를 도입하면 (4) 식과 같이 matrix 식으로 나타낼수 있다.

$$\frac{\partial \{\Phi\}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - Fr^2 & 2Fr \end{bmatrix} \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial x} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Fr^2 - K Fr & 2 \end{bmatrix} \{\Phi\} = \{0\} \quad (4)$$

여기서

$$T = \frac{L}{\sqrt{gH'}} \quad \beta = \frac{L}{H' C_*^2}$$

$$q^* = \frac{\Delta q}{\sqrt{gH'} H'} \quad y^* = \frac{\Delta H}{H'}$$

$$\{\Phi\}^t = \{y^*, q^*\} \quad K = \frac{y^*}{2y^* + 1}$$

(4) 식을 Preissmann 기법에 의하여 차분하고 정리하면 (5)식과 같이 나타난다.

$$a_{i1}y_{j,n+1} + a_{i2}y_{j+1,n+1} + a_{i3}q_{j,n+1} + a_{i4}q_{j+1,n+1} \\ = a_{i5}y_{j,n} + a_{i6}y_{j+1,n} + a_{i7}q_{j,n} + a_{i8}q_{j+1,n} \quad (5)$$

여기서, $i = 1, 2$ 로서 $i=1$ 일때 연속 방정식, $i=2$ 일때 운동 방정식을 각각 나타낸다.

(5) 식에 대한 안정도 해석에 관한식은 (6) 식과 같이 표시된다.

$$\{\xi\}^{n+1} = [G]\{\xi\}^n \quad (6)$$

여기서, $[G]$: amplification matrix

이제 matrix의 eigenvalue 를 $\gamma_i (i=1, 2)$ 라 할때 γ_i 의 허수부를 $\text{Im}[\gamma_i]$, 실수부를 $\text{Re}[\gamma_i]$ 라 하면 algorithmic damping 과 celerity ratio는 각각 (7), (8)식과 같이 표시되어 수치해의 안정해석을 실시할 수 있겠다

$$D_i = \{ \text{Re}(\gamma_i)^2 + \text{Im}(\gamma_i)^2 \}^{1/2} \quad (7)$$

$$R_i = \frac{-1}{Cr \alpha} \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(\gamma_i)}{\text{Re}(\gamma_i)} \right] \quad (8)$$

여기서, D_i 는 algorithmic damping, R_i 는 celerity ratio 를 각각 나타내고 있다.

앞에서 유도된 안정조건식을 기초로 하여 Preissmann 기법이 한계류 상태에 접근함에 따라 나타나는 수치 안정 특성을 분석하기 위해 Fr수에 대한 amplitude portraits 와 Phase portraits 를 도시하였다. 일반적으로는 progressive wave 에 대하여 수치해석적 특성을 도시하고 있으나 progressive wave 는 Fr 수에 관계없이 수치적 특성이 일정하게 나타나기 때문에 한계류에 대한 수치적 특성을 regressive wave를 중심으로 검토하였다.

먼저 progressive wave 의 특성을 알기위해 regressive wave 와 progressive wave 특성이 동일하게 나타나는 Fr 수가 0 일 경우 $\theta = 0.6$, $Cr = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$, 에 대해 그림 1 에서 도시하였다. 그림에서 나타난 바와 같이 Fr = 0 인 경우 Cr 수가 증가되고 θ 가 증가됨에 따라 감쇠효과가 크게 나타났으며 Cr=1 일때는 phase error 는 zero 로 나타났고 Cr 수가 1 보다 작은 경우는 numerical celerity 가 빠르게 전파되고 있으며 Cr 수가 1 보다 클때는 반대 현상을 나타내고 있었다. 그림 2 은 $\theta = 0.6$, Fr = 0.5, 2.0 일때 regressive wave 에 대하여 도시하였다. Cr 수가 0.5, 1.0, 2.0 에서는 numerical celerity 가 짧은 파장에서는 빠르게 전파되고 Cr 수가 5 일 경우에는 반대로 나타났다. 그림 3 은 한계류에 가까운 Fr 수가 0.99 인 경우에 대해 $\theta = 0.6$, $Cr = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ 에 대해 나타내었는데 amplification 은 비감쇠 특성을 보였으며 파장이 길고 Cr 수가 작을수록 phase error 가 커져감을 보여주어 모형이 불안정해짐을 알 수 있었다.

θ 값의 영향검토에 있어 한계류에서는 θ 의 증가가 불안정성을 극복하는데 큰 효과는 발휘하지 못하였고 Cr 수에 대하여서는 Cr가 증가할수록 수치감쇠 현상이 잘 나타났으며 한계류에서의 상대파속에 있어서도 수치동요 현상이 적게 나타나는 것을 볼 수 있었다. 그러나 θ 값의 증가만으로 한계류의 문제를 처리하는데 제한이 있음을 알 수 있었고 이를 위해서 한계류 발생 지점에 내부 경계조건을 도입하여 흐름을 해석하는 혼합류 모형의 필요성이 대두되었다.

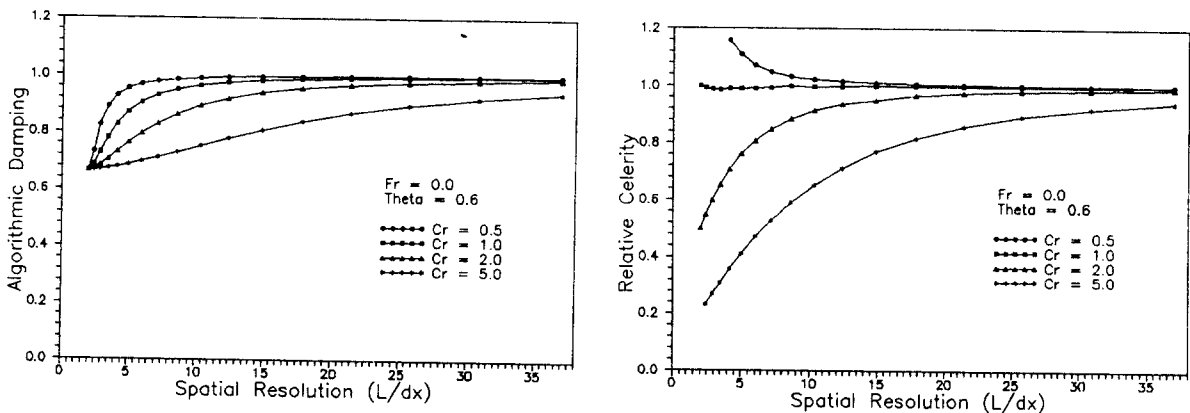


그림 1 수치 안정성 해석 결과 (Fr = 0.0 , $\theta = 0.6$)

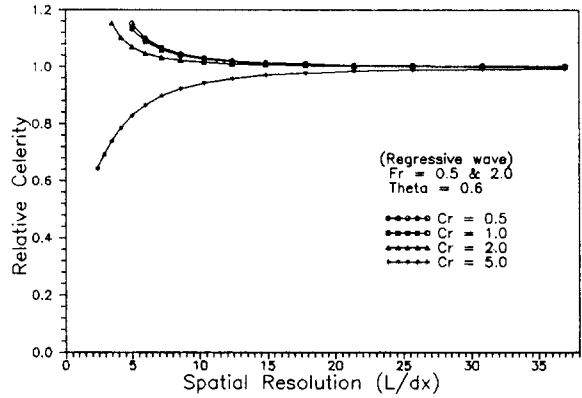
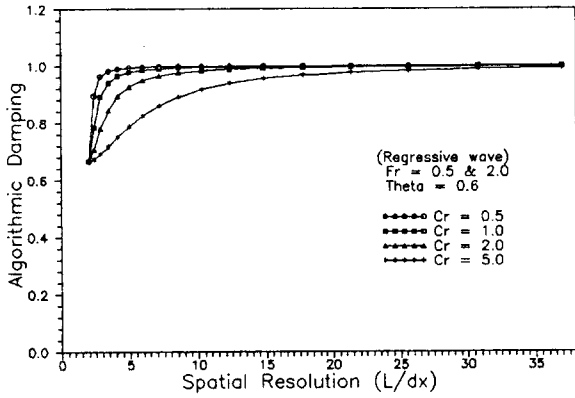


그림 2 수치 안정성 해석 결과 ($Fr = 0.5, 2.0, \theta = 0.6$)

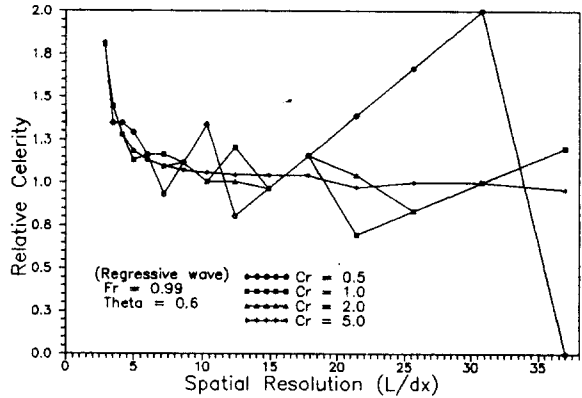
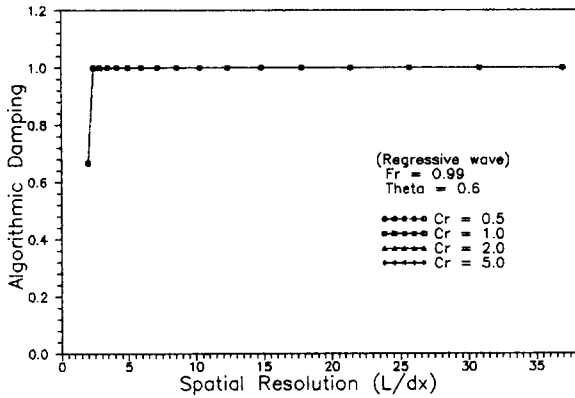


그림 3 수치 안정성 해석 결과 ($Fr = 0.99, \theta = 0.6$)

3. 혼합류 모형의 계산 알고리즘

혼합류에 대한 계산 알고리즘은 초기 조건에 관한 과정과 부정류에 관한 과정으로 구성된다. 초기 조건의 수위와 유량을 구하기 위해서 먼저 각 단면에 대하여 등류 수심과 한계수심을 구하고 등류 수심이 한계 수심보다 큰 단면에서의 흐름은 상류 구간으로 구분하고 한계수위보다 작은 경우에 하류 구간으로 구분한다. 하류단 경계의 기지의 수위로 부터 부정류 배수 곡선의

계산이 시작되어 그 계산은 上流 방향으로 사류가 발생하는 영역까지 진행된다. 만약 下流端 경계에서 사류가 발생하면 사류 흐름을 가지는 인접하는 모든 단면의 최상류단의 등류 수심으로부터 下流 방향으로 계산한다.

시간이 증가함에 따른 부정류에 관한 계산은 우선 각 단면에서 계산된 Fr 수를 사용하여 상류단면과 사류단면으로 구분한다. 즉, 그림 4 에서와 같이 Fr수가 0.95 이하인 이웃하는 상류 단면들을 상류 구간으로 구분하고 Fr수가 1.05 이상인 이웃하는 단면들은 사류 구간으로 구분하며 그 사이의 Fr수의 단면들을 한계 구간으로 구분한다. 그러나 상류 구간사이의 한계 단면은 상류 구간으로 고려하며 사류 구간사이의 한계 단면은 사류 구간으로 분류하여 고려한다. 상류 및 사류 구간의 上流와 下流端 경계는 Saint-Venant 방정식을 적용하는 영역을 결정하는데 사용되어진다

사류 구간의 하류단 단면과 상류 구간의 상류단 단면사이에는 跳水 가 발생하게 되는데 도수의 이동을 포함한 그 계산 과정은 다음과 같이 고려할수 있겠다

$$\frac{Q^2}{gA_1} + h_{g1}A_1 - \left(\frac{Q^2}{gA_2} + h_{g2}A_2 \right) = 0 \quad (9)$$

여기서, h_g 는 수면에서 단면의 무게 중심까지의 거리

첨자 1 은 사류구간 단면 첨자 2 는 상류구간 단면을 나타낸다

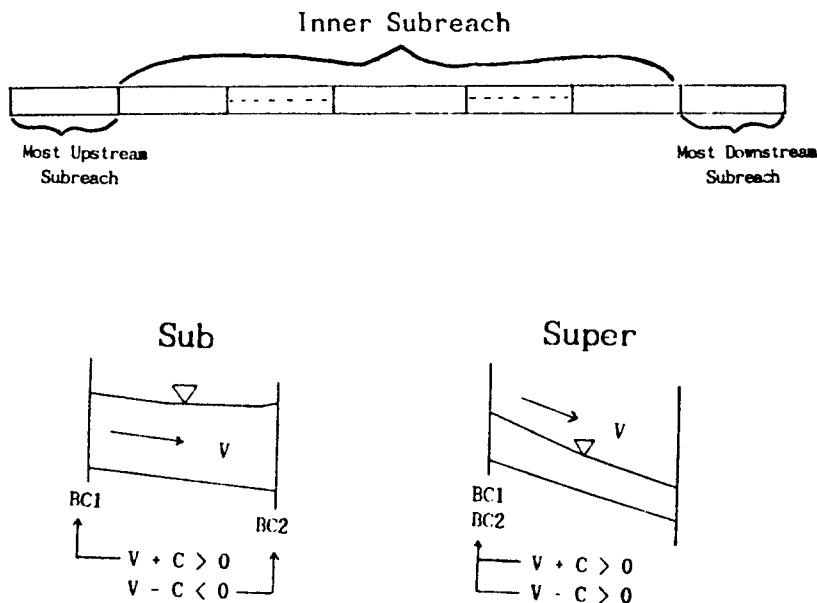


그림 4 혼합류에 관한 경계 조건의 위치 설정

(9)식은 Newton-Raphson 방법등에 의하여 그 해를 구할 수 있다. 도수구간에 대한 해석에 해석에 있어서는 계산상의 어려움을 피하고 정확한 도수의 위치를 판단하기 위하여 작은 거리 간격 Δx 가 필요로 한다. 각 시간대에서 해는 최상류단 소구간으로부터 시작하여 하류 방향으로 구간별로 계산이 진행된다.

4. 적용 및 비교 검토

혼합류 모형의 적용성을 검토하기 위하여 하폭이 300 m, 하도 길이가 13 Km, 조도 계수 0.030 인 구형 단면에서 상류-사류, 사류-상류 흐름에서 수치 실험을 실시하였다. 상류단에서 유량의 유입 수문곡선 부여하였으며 상-사류를 발생시키기 위해 하도 경사를 변화시켰고 한계류의 통과 지점을 정확히 알기 위해 하도경사가 변화하는 천이 영역에서 급변점에 계산 거리 간격을 작게 하여 정확한 한계류 발생 지점을 파악하였다.

상류-사류 구간에서는 하상경사를 각각 0.002, 0.007 로 놓고 해석하였는데 흐름이 상류에서 한계류를 통과하여 사류로 변화하는 것을 알수 있었고(그림 5) 그림에서와 같이 초기에는 전 구간에서 상류 흐름이었다가 유량이 증가함에 따라 하도구간의 하류부에서 사류가 발생하였고 한계수심 주위에서도 안정한 해를 얻을 수 있었다.

사류-상류구간에서는 하상경사를 0.005, 0.002 로 놓고 해석하였고 본 모형에서 계산된 수심이 한계 수심을 안정하게 통과하고 있었으며(그림 6) 이 경우에도 초기에는 전 구간에서 상류 흐름이었다가 시간이 지남에 따라 상류부에서 사류가 발생하고 경사 급변점에서 도수현상이 나타남을 알 수 있었으며 하도 전 구간에서 발생하는 수리학적 현상을 잘 반영하고 있었다

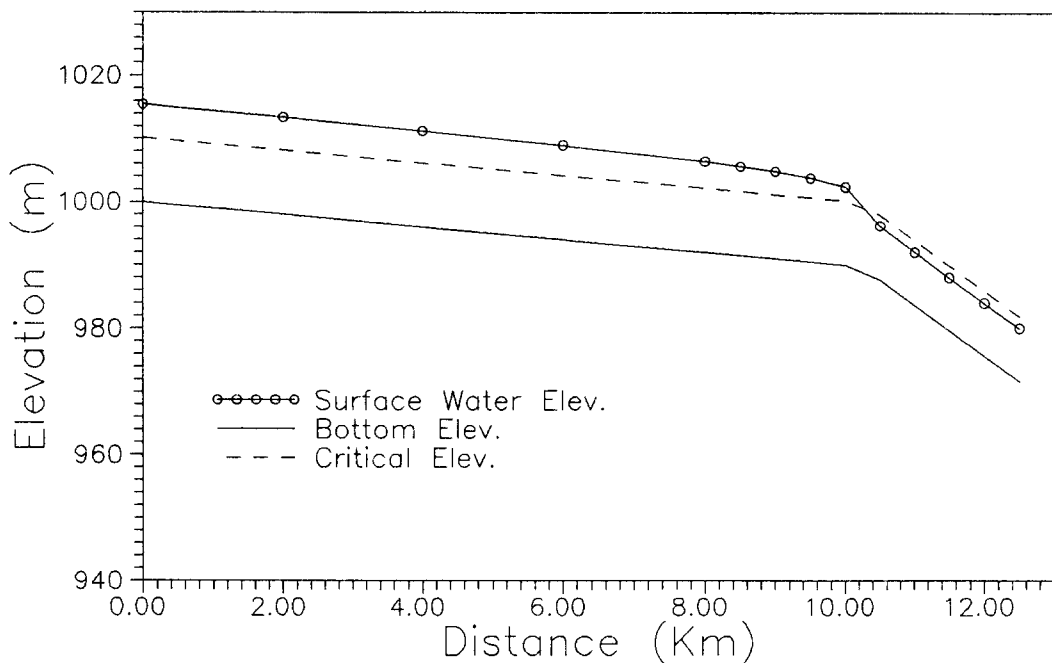


그림 5 상류-사류 흐름 조건

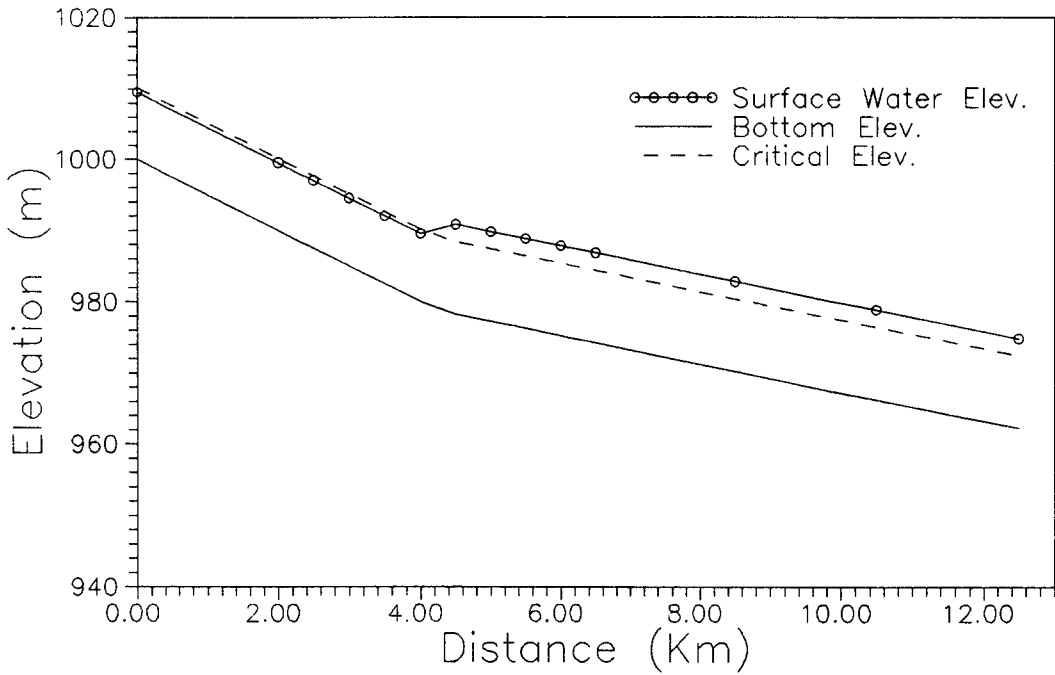


그림 6 사류-상류 흐름 조건

5. 결 론

자연 하천에서 상류-사류의 혼합류에 대한 1차원 부정류 해석을 위해서 Preissmann 기법을 이용하여 Saint-Venant 식에 대한 matrix stability analysis 를 실시하였고 amplitude portraits 와 phase portraits 를 통하여 수치안정 특성을 분석하였다. 흐름이 한계류에 접근함에 따라 수치해는 시간 가중치에 관계없이 불안정하게 나타났다. 혼합류 모형에 관하여는 상류-사류 또는 사류-상류가 혼합하여 나타나는 하도 구간에 대하여 적절한 경계 조건의 도입과 도수부의 처리를 통한 혼합류 해석 기법을 제시하여 한계류 통과시의 난점을 극복하였다.

가상 하도의 수치 실험을 통하여 혼합류에 관하여 Preissmann 기법에 의한 홍수파 해석이 효율적으로 수행될수 있음을 확인하였다. 앞으로 실제 하천 자료를 통하여 혼합류 모형의 검정이 수반되어야 할 것이며, 본 연구의 해석기법은 Preissmann 모형에 대한 자연 하천에서의 보다 안정된 수치해의 보장면에서 큰 기여를 할 수 있을 것으로 사료된다.

6. 참고 문헌

- 1) Basco, D. R., "Limitation of Saint Venant Equation to Model Flood Waves", Hydraulic

- Engineering: Proc of the 1987 National Conference on Hyd Eng, ASCE, pp. 758-763, 1987.
- 2) Fread, D. L. "DAMBRK: The NWS Dam-Break Flood Forecasting Model", NWS Report, NWS Office of Hydrology, Silver Spring, MD, 1988.
- 3) Traver, R. G. and Miller, A. C., "Modeling Unsteady One Dimensional Open Channel Flow Using the Slope Friction Form of the Saint-Venant Equations", Hydraulic Engineering: Proc of the 1987 National Conference on Hyd Eng, ASCE, pp. 770-771 1987.
- 4) Samuels, P. G. and Skeels, C. P. "Stability and Accuracy Analysis of Numerical Scheme Modelling Open Channel Flow", Paper presented at HYDROCOMP '89, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 13-16, 1989.
- 5) 이종태, 한건연, 이정식, "Fill Dam의 가상파괴로 인한 홍수파의 예측 모형", 대한토목학회 논문집, Vol.6, No.4, pp.69-78, 1986.
- 6) 한건연, "하천에서의 홍수파 해석을 위한 수치 모형의 개발", 한국 수문학회지, Vol. 22, No. 2, pp. 223-231, 1987.
- 7) 한건연, "댐의 파괴형태와 하도부 양상에 따른 홍수파 전달특성 해석에 관한 연구", 한국수문학회지, Vol. 23, No. 4, PP. 467-476, 1990.
- 8) 박재홍, "자연 하천에서 Preissmann 기법의 수치 불안정성 해석", 경북대학교 대학원, 석사 논문, 1993.