이산형 유입-유출 모형의 매개변수 결정에 관한 연구

(ESTIMATION OF PARAMETERS OF THE DISCRETE, INPUT-OUTPUT MODEL)

박 상배* 고 병욱* 이 은태** 이 종남**

1. 서 론

단위도의 이론은 1932년 Sherman이 최초로 단위도법에 의하여 호우로부터의 하천유량에 대한 연구를 시작한 이후, 이에대한 연구가 현재까지도 중요 관심사가 되고 있다. 실제 단위도를 유도할 때의 호우는 단순호우의 형태보다 복합호우의 양상을 갖는다. 최근에 단위도 유도에 많이 이용되고 있는것은 1980년 May와 Coles에 의해 제시된 선형 계획(Linear Programming)법과 비선형 계획(Nonlinear programming)법이다.

본 연구에서는 임의의 계(System)의 입력과 출력자료인 유효우량과 직접 유출량을 사용하여 메트릭스(Matrix)해법에 의해 단위유량도를 유도하는 경우에 발생되는 진동과 때때로 나타나는 부값(Negative Value)을 갖는 단위유량도의 종거문제를 해결하기 위하여 한강수계 평창강 유역의 홍수사상에 이산형 유입-유출 모형(Discrete, Hydrologic,Input-Output Model)에서 전이함수(Transfer Function)의 형태로 나타나는 매개변수들을 선형(Linear),비선형(Nonlinear)계획법으로 해석한후 매개변수로 구해지는 직접유출 수문곡선의 값과 관측된 홍수사상을 비교,검토한다.

2. 본 론

강우-유출 과정의 모형화에 대한 선형 계획법적 이론(Casti,1977)의 적용에는 많은 발전이 있어왔다. 유입-유출 모형이라고 말해지는 수문학적 모형은 물리적 현상에 대한 조사, 연구를 통한 상세한 묘사가 없이도 강우-유출 사이의 관측치만을 갖고 그 두현상 사이의 어떤 관계를 정립하려고 시도되어져 왔다.

확정론적 수문계의 선형이론은 Dooge(1973,1977)에 의해 연구되어졌는데 연속적인 선형계에서 시간변수인 강우량을 입력치 I(t)라 하고 직접유출량을 출력치 Q(t)라 하면 I(t)와 Q(t)

---

* 경희 대학교 토목공학과 박사과정

** 경희 대학교 토목공학과 교수

사이의 관계는 다음 미분방정식으로 표시된다.

$$(1+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i D^i)Q(t)=(\sum_{j=0}^{q}\beta_j D^j)I(t) \qquad \text{—— (1)}$$

여기에서 D^i는 i계 미분연산자, α와β는 예측되어질 미지의 시간불변 매개변수이다.
수문학적 응용에서는 p,q의 값은 모형 설정단계에서 결정되어야 하는데 Chow(1972)는 Q(t)와 I(t)의 3차 이상의 도함수는 모형의 결과에 큰 영향을 미치지 않는다는 것을 증명하였다.
연속형적 모형은 수학적으로는 정교할 수 있으나 수문학적 자료들은 거의 언제나 이산형이기 때문에 이산형적 모형이 실용적인 면에서 중요한 관심사가 된다.
많은 연구자들이 연속형적 과정을 이산형적 형태로 나타내기 위한 방법을 제안하였는데 Box와 Jenkins(1976)는 식(1)의 이산형적 형태는 식(1)의 유한 차분형에 의해서 유도될 수 있다고 하였고 O'Connor(1982)는 선형적, 연속형적, 시간불변 모형에 적합한 모형으로 전이 함수(Transfer Function)를 사용하였다. 또한 Wang과 Wu는 이산형 입력자료는 단위 단계함수(Unit Step Function)로 대표될 수 있다는 것을 증명하였다.
식(1)의 이산형적 형태는 Box와 Jenkins(1976)에 의해 제안되었다.

$$(1-a_1B-a_2B^2-\cdots-a_pB^p)Q(t)=(b_0+b_1B^1+b_2B^2+\cdots+b_qB^q)I(t) \qquad \text{—— (2)}$$

여기에서 B는 후진 변환 연산자(Backward Shift Operator)로 B(Q(t))=Q(t-1)을 나타낸다.
식(2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q(t)=\frac{\theta(B)}{\phi(B)}I(t) \qquad \text{—— (3)}$$

여기에서

$$\phi(B)=1-a_1B-a_2B^2-\cdots-a_pB^p \qquad \text{—— (4)}$$

$$\theta(B)=b_0+b_1B^1+b_2B^2+\cdots+b_qB^q \qquad \text{—— (5)}$$

식(3)에서 연산자 $\theta(B)/\phi(B)$를 전이 함수(Transfer Function)라 한다.
수문학적 모형과정이란 모형설정, 매개변수 추정, 모형검증, 그리고 모형수정의 과정을 포함하는 반복과정이다.
본 논문의 목적은 이산형, 선형(비선형), 수문학적 입력-출력 모형의 특성을 기술하고 수치적 예제를 통해서 전이 함수를 통한 매개변수 추정법과 기존의 MATRIX해석법을 GAMS PROGRAM을 사용하여 비교, 검토한다.

2.1 수문학적 이산형 모형의 특성

2.1.1 정상성 조건(Stationarity Condition)

식(3)의 연산자 $\phi(B)$는 자기 회기 연산자(Autoregressive Operator)이고 이산형적 자기 회기 과정이 정상성이 있기 위해서는 특성 방정식(Characteristic Equation) $\phi(B)$의 근이,B를 변수로 간주할때, 단위원(Unit Circle)의 밖에 위치해야 한다(Box and Jenkins 1976).
이산형적 계를 위한 정상성 조건은 연속형적 계의 안정조건(Stability Condition)에 상당한다. 그러므로 모형 매개변수들의 계산된 값들을 갖는 임의의 이산형적 모형에서 식(4)는 계

산된 매개변수들이 정상적 계안에 귀착되는지를 판단하는데에 사용될 수 있다.

2.1.2 모형의 매개변수들 사이의 관계

지속기간 t동안의 유효 강우량을 I(t), 유출량을 Q(t)라 하고 물이 m지속기간 이후에는 계에 저유되지 않는다고 가정하면 총 유입량은 총 유출량과 같다.

$$\sum_{t=1}^{m} Q(t)=\sum_{t=1}^{m} I(t) \qquad \text{——— (6)}$$

부가해서, t=0 이전의 유입량과 유출량을 0으로 하면 식(2)는 시간 t=1,2,···,m에서 다음 식과 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned} Q(1) &= b_0 I(1) \\ Q(2) &= a_1 Q(1)+b_0 I(2)+b_1 I(1) \\ &\;\cdot \\ &\;\cdot \\ &\;\cdot \\ Q(m) &= a_1 Q(m-1)+a_2 Q(m-2)+\cdots+a_p Q(m-p)+b_0 I(m)+b_1 I(m-1)+\cdots+b_q I(m-q) \end{aligned}\right] \qquad (7)$$

식(7)을 누가하면 다음과 같이 되고

$$\sum_{t=1}^{m} Q(t)=\left(a_1\sum_{t=1}^{m-1}+a_2\sum_{t=1}^{m-2}+\cdots+a_p\sum_{t=1}^{m-p}\right)Q(t)+\left(b_0\sum_{t=1}^{m}+b_1\sum_{t=1}^{m-1}+\cdots b_q\sum_{t=1}^{m-q}\right)I(t) \qquad \text{——— (8)}$$

식(8)을 $\sum_{t=1}^{m} Q(T)$로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 1 = {} & a_1\sum_{t=1}^{m-1} Q(t)/\sum_{t=1}^{m} Q(t)+\cdots+a_p\sum_{t=1}^{m-p} Q(t)/\sum_{t=1}^{m} Q(t) \\ & +b_0+b_1\sum_{t=1}^{m-1} I(t)/\sum_{t=1}^{m} Q(t)+\cdots+b_q\sum_{t=1}^{m-q} I(t)/\sum_{t=1}^{m} Q(t) \end{aligned} \qquad \text{——— (9)}$$

실제로는 시간 간격 m의 수는 p나 q보다 매우크다. 그리고 강우는 처음 몇 시간 간격에서만 발생하므로 식(9)에서 계수 b들의 합은 일정하게 된다.식(9)의 계수 a들의 합은 1보다 작지만 근사적으로 1로 취급할 수 있다.

그러므로 매개변수들 사이의 다음 관계를 얻게된다.

$$a_1+a_2+\cdots+a_p+b_0+b_1+b_2+\cdots+b_q=1 \qquad \text{——— (10)}$$

2.2 매개변수 평가 방법

2.2.1 최소 자승법

이 방법은 Q(t)의 관측치와 계산치 사이의 편차나 오차의 제곱의 합을 최소화시키는 연산자를 구하는 방법이다.

잔차를 e(t)라 하면

$$e(t)=\hat{Q}(t)-Q(t) \qquad \text{for} \quad t=1,2,\cdots,m \qquad \text{——— (11)}$$

여기에서 $\hat{Q}(T)$는 관측치이고 $Q(t)$는 관측된 입력치 $I(t)$를 사용해서 모형(식(2))으로 부터 계산된 값이다.

식(10)은 다음과 같이 행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$E(t)=Q-A\beta \qquad (12)$$

여기에서

$$E = [\ e(1),e(2),\cdots,e(m)\ ]$$

$$Q^T = [\ \hat{Q}(1),\hat{Q}(2),\cdots,\hat{Q}(m)\ ]$$

$$\beta^T = [\ a_1,a_2,\cdots,a_p,b_0,b_1,\cdots,b_q\ ]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & I(1) & 0 & \cdots & 0 \\ Q(1) & 0 & \cdots & I(2) & I(1) & \cdots & 0 \\ Q(2) & Q(1) & \cdots & I(3) & I(1) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Q(m-1) & Q(m-2) & \cdots & I(m) & I(m-1) & \cdots & I(m-q) \end{bmatrix}$$

β의 최소 자승 연산자는 식(11)의 해가 된다. 즉 다음과 같다.

$$\beta = (A^TA)^{-1}A^TQ \qquad (13)$$

또한 β의 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$Covar(\beta) = \sigma^2(A^TA)^{-1} \qquad (14)$$

만약 σ^2이 미지수라면, σ^2의 불편 추정치(Unbiased Estimate)는 잔차의 제곱의 합과 같다.

$$\sigma^2=\sum_{t=1}^{m} e^2(t) \qquad (15)$$

2.2.2 선형(비선형) 계획법

모형의 매개변수를 평가하는 문제는 어떤 제약조건을 갖는 잔차의 절대치의 값을 최소화 시키는 연산자를 구하는 선형 계획법으로 정형화 시킬 수 있다.

목적 함수는 다음과 같이 표시된다.

$$\text{minimize} \sum_{t=1}^{m} |e^2(t)| \qquad (16)$$

이 비선형 목적함수를 선형적 동치(Linaear Equivelent)로 표시하면 다음과 같다.

$$\text{minimize} \sum_{t=1}^{m} [\ u(t)+v(t)\ ] \qquad (17)$$

여기에서

$$u(t)-v(t) = e(t) \qquad (18)$$

$u(t) \geq 0$ —— (19)

$v(t) \geq 0$ —— (20)

식(17)을 식(12)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$U^T - V^T = Q - A\beta$

여기에서

$U = [\ u(1), u(2), \cdots, u(m)]$

$V = [\ v(1), v(2), \cdots, v(m)]$

마지막 제약조건은 식(10)으로 다음과 같다.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_p + b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 1$ —— (21)

식(17),(18),(19),(20),(21)을 사용하면 컴퓨터를 이용해서 계산할 수 있는 선형 프로그램 알고리즘이 되고 식(16),(18),(19),(20),(21)을 사용하면 비선형 프로그램 알고리즘이 된다.

3. 비교 고찰

본 연구에서는 단위도를 유도하는데 있어서 한강 수계 평창강 유역(유역면적:55.763㎢)의 홍수사상을 분석하였다. 선형및 비선형 계획법의 입력자료로 대상유역의 유효우량과 직접 유출량을 사용한다. 수문자료는 건설부 "국제 수문 개발계획(IHP)" 대표유역 수문 자료집(1989. 12)에서 해당유역의 1982-1989년 까지의 자료중 양호한 우량과 유출량으로서 1989년 9월 17일의 호우사상을 대상으로하여 ϕ-index법과 직선분리법을 채택해서 유효우량과 직접유출량을 산정하였다.유효우량과 직접유출량은 표 1과 같다.

TABLE. 1 〈 유효우량, 직접 유출량(1989. 9. 17) 〉

유효 우량 (㎝)	0.00	0.50	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.35	0.85	0.65	0.45
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.55	0.15	0.00	
직접유출량 (㎥/sec)	0.00	1.42	2.65	2.93	3.03	2.59	2.49	2.83	4.14	9.12	12.25
	15.06	18.02	19.86	20.08	19.71	18.63	17.62	19.46	22.09	21.65	22.29
	17.50	20.72	19.67	18.96	18.20	17.51	16.77	16.10	15.38	14.66	14.31
	13.66	12.97	11.99	11.32	10.71	10.10	9.45	8.86	8.22	7.65	7.29
	6.73	6.42	5.82	5.23	4.88	4.59	4.06	3.73	3.45	3.16	2.83
	2.51	1.96	1.68	1.20	0.88	0.57	0.30	0.00			

표 1에서 구한 유효우량과 직접유출량 자료를 이용하여 전이함수(Transfer Function)의 형태로 나타나는 매개변수(Parameter)들을 gams program을 사용하여 선형, 비선형 계획법으로 구한후 그 매개변수를 이용하여 구해지는 직접유출 수문곡선과 능형-회기(Ridged, Regressive) 선형, 비선형 계획법으로 구한 직접유출 수문곡선(이남신, 1993), 그리고 관측된 직접 유출량과를 비교, 검토하였다.
직접 유출 수문곡선의 비교는 그림. 1과 그림. 2에 나타나 있다.

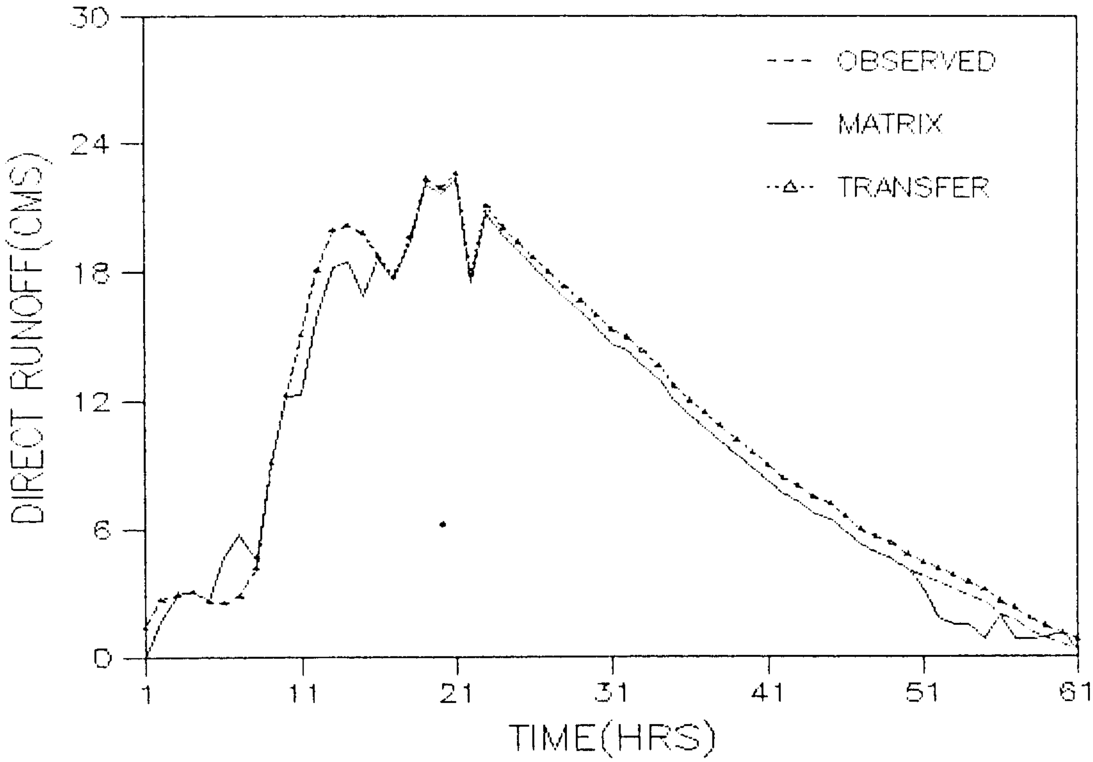

FIG.1 COMPARISION OF RUNOFFS(LINEAR)

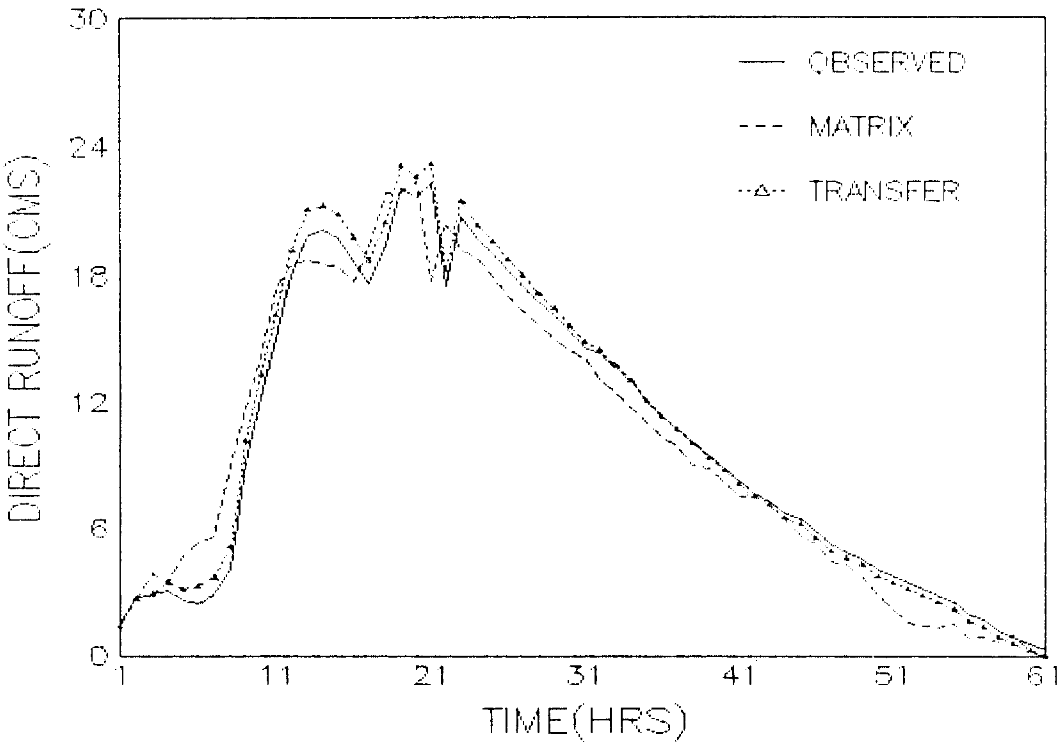

FIG.2 COMPARISION OF RUNOFFS(N-LINEAR)

4. 결 론

1) 연속형적, 매개변수형적 모형의 이산형적 모형을 Box-Jenkins 모형에서 구할 수 있다.

2) 6개의 매개변수를 사용한 모형으로 소규모 유역의 강우-유출관계를 상사시킬 수 있었다.

3) 본 연구는 단위도를 유도하는 경우에 선형계획법이나 비선형계획법에서의 바람직하지 않은 진동과 때때로 나타나는 부값을 갖는 단위도 종거문제를 고려하였다.

4) 본 연구는 모형해석에서 구해지는 매개변수를 사용해서 임의의 호우사상을 간단하게 해결할 수 있었다.

5) 본 연구는 GAMS PROGRAM을 사용하여 선형및 비선형 문제를 쉽고 안정되게 해석하였다.

5. 기 호

D^i : i계 미분연산자

B : 후진 변환 연산자

$\theta(B)/\phi(B)$: 전이 함수(Transfer Function)

$\phi(B)=1-a_1B-a_2B^2- \cdots -a_pB^p$

$\theta(B)=b_0+b_1B^1+b_2B^2+ \cdots +b_qB^q$

6. 참고문헌

Anthony, B. ,David, K. and Alexander, M.(1988) "GAMS, A User's Guide" The Scientific Press

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M.(1976) "Time Series Analysis-Forecasting and Control", Holden-Day

Dooge, J.C.I.,(1977) "Problems and Method of Rainfall-Runoff Modelling" Mathematical Models for Surface Water Hydrology , Wiley, New York

Wang, G.T.(1985) "The Determination of Parameters by Linear Programming for a Model with Nonlinear Reservoirs in Series", J. Hydrolo., 81: 171-177.

Wang, G.T. and Wu, K.(1986) "The Unit Step Function Response for several Hydrological Conceptual Models", J. Hydrol., 62: 119-128

Wang, G.T. and Yu, Y.S.(1986) "Estimation of Parameters of the Discrete, Linear, Input-Output Model", J. Hydrol., 85: 15-30.

이 남신(1993) "수문곡선 추정을 위한 선형및 비선형 계획법의 비교연구", 석사학위