

비선형 구조물의 매개변수 규명 (Parameter Identification of Nonlinear Structure)

김 우영* (전남대 대학원), 황 원걸, 기 창두(전남대)

W.Y. Kim(Graduate School), W.G. Hwang, K.D.Kee(Chonnam Nat. Univ.)

ABSTRACT

Hilbert Transform has been used for detection of nonlinearity in modal analysis. HTD(Hilbert Transform Describers) are used to quantify and identify nonlinearity. Mottershead and Stanway method for identification of N-th power velocity nonlinear damping are extended to P-th power displacement stiffness, N-th power velocity damping and dry friction. Time domain and frequency domain data are used and HTD and Mottershead methods are combined for identification of nonlinear parameters in this paper. Computer simulations and experimental results are shown to verify nonlinear structure identification methods.

1. 서론

기계구조물은 일반적으로 비선형 시스템이지만, 통상적으로 스프링력이 변위에 비례하고, 감쇠력이 속도에 비례하는, 스프링과 감쇠기로 구성된 선형 모델을 이용하여 해석하고 있다. 그러나 실제적으로 기계구조물의 감쇠계수와 강성계수는 가진진폭, 가진주파수와 같은 동적 변수들과, 감쇠기의 감쇠지수, 스프링의 강성지수 등과 같은 시스템의 구조적 변수들에 종속적인 비선형 특성을 갖는다. 그러므로 비선형 구조물을 보다 정확하게 해석하기 위해서 시스템의 비선형 거동의 특성을 결정짓는 매개변수들을 규명하여야 한다.

본 연구에서는 구조물의 비선형성을 규명하기 위하여 구조물의 비선형성 모델링, 데이터 획득, 구조물의 비선형성 검출과 비선형 매개변수 추정 과정을 수행하였다. 먼저 구조물의 비선형 감쇠와 강성을 속도와 변위의 누승에 비례하는 감쇠와 강성의 표현을 사용하여 모델링하였다. PC상의 A/D Board와 FFT analyzer를 이용하여 센서에서 측정된 신호를 수집하여 시간영역 데이터와 주파수영역 데이터를 얻었다. 주파수 응답 데이터에 Hilbert 변환을 적용하여 구조물의 비선형성의 검출하였고, HTD(Hilbert Transform Descriptor)를 계산하여 비선형 매개변수에 대한 비선형성의 정량화를 수행하였다. 또한 시간응답 데이터를 이용하여 감쇠와 강성에 관한 비선형 매개변수들을 동시에 추정할 수 있는 알고리즘을 개발하여 구조물의 매개변수를 규명하였다.

개발한 비선형 구조물 규명 시스템의 신뢰성의

검증을 위하여 시뮬레이션과 실험을 통하여 얻은 결과를 비교하였다. 최근 PC의 성능 향상으로 개발한 시스템을 이용하여 PC상에서 자동차 현가계 등과 같은 구조물의 비선형 매개변수를 신속하고 간편하게 얻을 수 있을 것으로 본다.

2. 구조물의 비선형성 규명

2.1 비선형 구조물의 모델링

구조물의 비선형성을 모델링하기 위하여 구조물의 비선형감쇠는 속도에 종속적이고 스프링의 강성은 변위에 종속적이라고 가정하였고, 감쇠기와 스프링의 압축과 신장시 양방향 특성은 동일하다고 가정하였다. 따라서 감쇠와 강성은 각 성분의 크기를 나타내는 계수와 속도나 변위에 관한 누승지수(power exponent)로써 표현할 수 있고, 1 자유도 비선형 구조물의 운동방정식은 N차 속도감쇠(N-th power velocity damping)와 P차 변위강성(P-th power displacement stiffness)의 표현을 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{y} + C_N|\dot{y}|^N \text{sgn}(\dot{y}) + K_P|y|^P \text{sgn}(y) = F(t) \quad (1)$$

여기서 C_N 은 감쇠계수, N은 감쇠지수이고 K_P 는 강성계수, P는 강성지수이다.

2.2 구조물의 비선형성 검출

(1) Hilbert 변환

함수 $G(z)$ 의 Hilbert 변환은 다음과 같다.

$$H\{G(z)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(a) da}{z-a} \quad (2)$$

복소주파수 $z = \sigma + j\omega$ 로 표현된 전달함수 $G(z)$ 에 대한 Hilbert 변환은 복소평면상의 선적분으로 이루어진다. $G(z)$ 의 적분을 위한 폐곡선은 그림 1과 같이 $G(z)$ 의 극점을 피하여 선정한다.

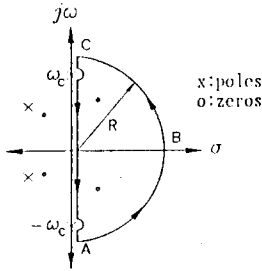


Fig. 1. Contour integration path in the complex plane to avoid poles on the frequency axis

Cauchy의 Principal Value를 이용하여 주파수 응답 함수 $G(\omega)$ 를 Hilbert 변환하면 다음과 같다.

$$H\{G(\omega)\} = H(\omega_c) = G(\omega_c) = -\frac{1}{\pi i} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{\omega - \omega_c} \quad (3)$$

Fourier 변환의 성질로부터 $G(\omega)$ 의 실수부는 우함수이고 $G(\omega)$ 의 허수부는 기함수이므로, 식 (3)에 주어진 $H(\omega)$ 의 실수부와 허수부를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Re}H(\omega_c) = -\frac{2}{\pi} \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\omega \text{Im}G(\omega)}{\omega^2 - \omega_c^2} d\omega \quad (4)$$

$$\text{Im}H(\omega_c) = \frac{2\omega_c}{\pi} \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re}G(\omega)}{\omega^2 - \omega_c^2} d\omega \quad (5)$$

식 (4), (5)는 선형시스템의 주파수 응답 함수와 Hilbert 변환의 관계를 나타낸다. 시스템의 주파수 응답 함수를 $G(\omega)$ 라하고 $G(\omega)$ 의 Hilbert 변환을 $H(\omega)$ 라 하면, 선형시스템인 경우 $H(\omega) = G(\omega)$ 의 관계가 성립하지만 비선형시스템의 경우에는 $H(\omega) \neq G(\omega)$ 의 관계를 갖는다.

(2) 이산 Hilbert 변환 알고리즘과 누승가중 보정

식 (4), (5)의 Hilbert 변환을 이산 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\text{Re}H(\omega) = H_R(\omega_j) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{G_I(\omega_k) \omega_k \Delta\omega}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \quad (6)$$

$$\text{Im}H(\omega) = H_I(\omega_j) = \frac{2\omega_j}{\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{G_R(\omega_k) \Delta\omega}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \quad (7)$$

$$\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{(\omega_n - \omega_1)}{n-1}$$

여기서 첨자 R과 I는 각각 실수부와 허수부를 나타낸다.

식 (4), (5)에 주어진 $G(\omega)$ 의 Hilbert 변환은 $-\infty$ 부터 ∞ 의 구간을 갖는 적분이지만 식 (6)와 식 (7)의 이산 Hilbert 변환은 제한된 주파수 영역에서만 정의되었다. 따라서 선형인 경우에도 적분 구간의 주파수 양단에서 오차가 발생한다. 이 문제를 해결하기 위하여 누승가중법^(3,4)을 사용하여 보정하였다. 가중치수가 2인 경우 Hilbert 변환 관계식은 다음과 같다.

$$H_R^2(\omega_j) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \text{Re}G(\omega) \text{Im}G(\omega)}{\omega^2 - \omega_j^2} d\omega \quad (8)$$

$$H_I^2(\omega_j) = \frac{2\omega_j}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\{\text{Im}^2 G(\omega) - \text{Re}^2 G(\omega)\}}{\omega^2 - \omega_j^2} d\omega \quad (9)$$

그림 2는 감쇠비가 0.2, 공진주파수가 4Hz인 선형 시스템의 누승가중된 주파수 응답 함수와 그것의 Hilbert 변환을 겹쳐 그린 것이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 누승가중법은 보정항이 없이 주파수 응답 함수와 Hilbert 변환 사이의 오차를 최소화할 수 있다. 따라서 이산 Hilbert 변환과 누승가중 알고리즘을 검증할 수 있다.

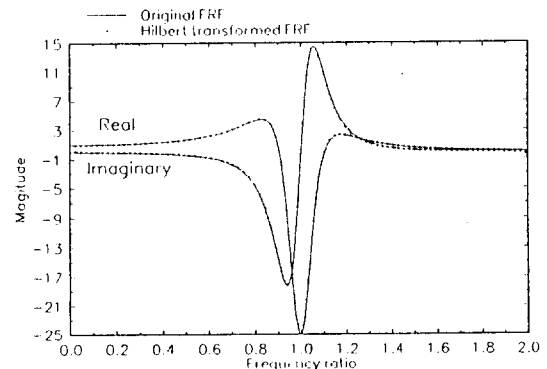


Fig. 2. Power weighted Hilbert transform (linear case)

(3) ITD를 이용한 비선형성 규명

비선형 시스템의 주파수 응답 함수를 Hilbert 변환하면 Hermitian 대칭성에 변화가 발생한다⁽⁵⁾. 이 사실을 이용하여 구조물의 비선형성을 규명하기 위하여 모우멘트 적분을 계산하였다. 주파수 응답 함수 $G(\omega)$

의 수직축에 대한 모우멘트를 G_v^n 로, $H(\omega)$ 의 수직축에 대한 모우멘트를 H_v^n 등으로 표시하면 모우멘트 적분은 다음과 같다.

$$G_v^n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^n G(\omega) d\omega \quad (10)$$

$$H_v^n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^n H(\omega) d\omega \quad (11)$$

$$G_h^n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega G(\omega) |G(\omega)|^n d\omega \quad (12)$$

$$H_h^n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega H(\omega) |H(\omega)|^n d\omega \quad (13)$$

여기서 아래첨자 v와 h는 수직축과 수평축에 대한 모우멘트를 의미하고 잇 첨자 n은 모우멘트 적분의 차수이다. 결과의 비교시 일관성을 유지하기 위해 적분한계를 각 모우드의 half-power 지점으로 계산하였다.

주파수 응답함수와 Hilbert 변환된 주파수 응답함수의 모우멘트들의 차이를 비교하기 위하여 각각의 모우멘트를 계산한 후 식(14)로 정의된 HTD(Hilbert Transform Descriptor)^(3,4)를 도입하였다.

$$HTD_{v,h}^n = 100 \left\{ \frac{H_{v,h}^n - G_{v,h}^n}{G_{v,h}^n} \right\} (\%) \quad (14)$$

식(14)는 주파수 응답함수가 복소량이기 때문에 실수부와 허수부를 각각 계산하여야 한다. 모우멘트 적분의 차수 n의 변화에 따라 HTD는 다음과 같은 의미가 있다. 따라서 감쇠지수와 강성지수에 대한 HTD의 변화를 이용하여 비선형성을 정량화 할 수 있다.

HTD_v^0 = 주파수 응답함수의 에너지 비

HTD_v^1 = 주파수 응답함수의 주파수 비

HTD_h^1 = 주파수 응답함수의 진폭 비

HTD_v^2 = 주파수 응답함수의 면적 2차 모우멘트

HTD_v^3 = 주파수 Skewness

Table 1. Power weighted HTD for SDOF linear system

HTD (%)	n=0	n=1	n=2	n=3
real(Vertical)	-0.3782	-0.3478	-0.3649	-0.4214
real(Horizontal)	-0.3478	-0.0412	0.1113	0.2382
imag(Vertical)	0.9194	3.4140	-3.1421	-1.3162
imag(Horizontal)	3.4140	1.1874	0.9584	0.9102
mag(Vertical)	0.0122	-0.0268	-0.0665	-0.1064
mag(Horizontal)	-0.0268	0.0556	0.1579	0.2631

표 1에 그림2에서 보인 선형시스템의 주파수 응답함수의 실수부, 허수부에 대하여 수평축과 수직축에 대한 HTD를 모우멘트 적분의 3차까지 계산한 결과가

있다. 대부분의 HTD가 1퍼센트 이내의 값이므로 선형 시스템에 대한 경우임을 확인할 수 있다.

그림 3은 비선형 지수 N과 P에 대하여 HTD 변화를 보인 것이다. 실제 사용되는 감쇠기와 스프링의 N과 P의 범위 (0.8 ~ 2.2)에서 주파수 응답함수를 각각 계산하고 Hilbert 변환하여 각각의 HTD를 얻은 결과이며, N과 P가 1에서 멀어질수록 HTD값이 커짐을 알 수 있다.

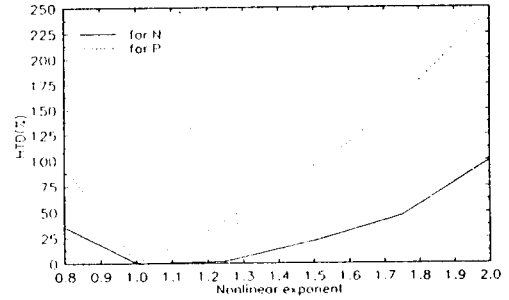


Fig. 3. HTD_h^1 for damping exponent N and spring exponent P

2.3 비선형 비개변수 추정⁽²⁾

실험데이터와 계산치와의 오차를 최소화하는 최소자승오차 개념의 Gauss-Newton 추정 기법을 이용하여 구조물의 강성계수와 강성지수, 감쇠계수와 감쇠지수를 추정하여 보자.

식(1)에 주어진 운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{cases} = \begin{cases} x_2 \\ -\frac{C_N}{M}|x_2|^N \text{sgn}(x_2) - \frac{K_r}{M}|x_1| \text{sgn}(x_1) + \omega^2 U_0 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (15)$$

식(15)에서 미지 매개변수는 $r = \{C_N, N, K_r, P\}$ 이고 r에 대하여 선형화하면 다음과 같고,

$$\begin{cases} x(r + \Delta r, t_1) \\ x(r + \Delta r, t_2) \\ \vdots \\ x(r + \Delta r, t_L) \end{cases} = \begin{cases} x(r, t_1) \\ x(r, t_2) \\ \vdots \\ x(r, t_L) \end{cases} + [X] \Delta r \quad (16)$$

[X]는 영향 계수 행렬로서 다음과 같다.

$$[X] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x(t_1)}{\partial C_N} & \frac{\partial x(t_1)}{\partial N} & \frac{\partial x(t_1)}{\partial K_p} & \frac{\partial x(t_1)}{\partial P} \\ \frac{\partial x(t_2)}{\partial C_N} & \frac{\partial x(t_2)}{\partial N} & \frac{\partial x(t_2)}{\partial K_p} & \frac{\partial x(t_2)}{\partial P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x(t_L)}{\partial C_N} & \frac{\partial x(t_L)}{\partial N} & \frac{\partial x(t_L)}{\partial K_p} & \frac{\partial x(t_L)}{\partial P} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

그리고, z 를 측정된 응답이라 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z(t) = x(r + \Delta r, t) + \text{observation Noise} \quad (18)$$

z 와 식 (16)의 x 와의 차이를 오차 $\{c\}$ 라 하면 L 개의 측정치에 대한 오차를 영향 계수 행렬을 사용하여 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} z(t_1) \\ z(t_2) \\ \vdots \\ z(t_L) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x(r + \Delta r, t_1) \\ x(r + \Delta r, t_2) \\ \vdots \\ x(r + \Delta r, t_L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(t_1) \\ z(t_2) \\ \vdots \\ z(t_L) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x(r, t_1) \\ x(r, t_2) \\ \vdots \\ x(r, t_L) \end{Bmatrix} - [X]\Delta r \quad (19)$$

$$= \{c\} - [X]\Delta r$$

따라서 최소자승 오차 J 는 다음과 같고,

$$J = (e - [X]\Delta r)^T (e - [X]\Delta r) \quad (20)$$

J 를 최소로 하는 Δr 를 구하면 다음 식과 같다.

$$\Delta r = ([X]^T [X])^{-1} [X]^T \{c\} \quad (21)$$

$r_{k+1} = r_k + \Delta r_k$ 의 관계에 의하여 미지 매개변수를 반복적으로 계산하여 매개변수를 추정할 수 있다.

3. 실험 및 고찰

비선형 구조물의 매개변수 규명시스템을 PC를 이용하여 구성하였다. 이 시스템은 그림 4와 같고 C언어를 이용하여 개발하였다. 가속도계에서 측정된 신호를 FFT analyzer를 이용하여 시간영역 데이터와 주파수영역 데이터를 취득하여 주파수 응답함수에 대하여 Hilbert 변환하여 비선형성을 검출하고, 시스템이 비선형으로 판명되면 누승가중을 한 후 HTD를 이용하여 얻은 비선형지수를 추정의 초기치로 사용하여 비선형 매개 변수를 추정하는 구조이다.

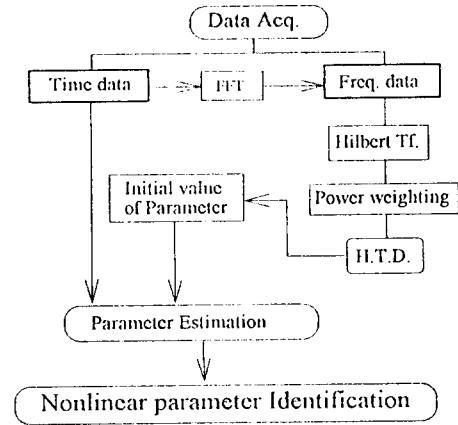


Fig. 4. Identification system of nonlinear structure

개발한 비선형 구조물 매개변수 규명 시스템의 검증에 위하여 다음과 같이 실험장치를 구성하였다.

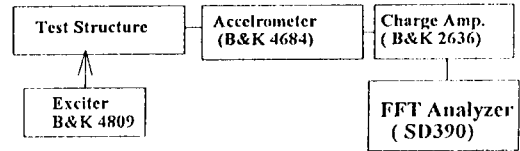


Fig. 5. Experimental setup

완충기로 사용되는 ENDINE사의 쇼크압소버 OEM 0.5M을 이용하여 질량, 스프링과 감쇠기로 구성된 1자유도 구조물을 제작하였고, 가속도계를 이용하여 가진입력과 질량의 속도와 변위응답을 측정하고 FFT analyzer SD390을 이용하여 데이터를 취득하였다.

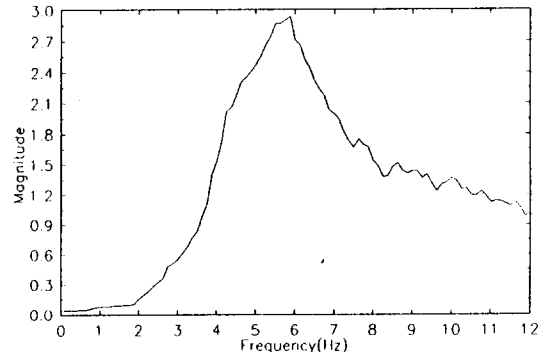


Fig. 6. Magnitude of FRF

그림 6은 random 가진을 하여 얻은 주파수 응답 함수이고, 여기서 공진주파수 5.9Hz와 감쇠비 0.31을 얻을 수 있다. 구조물의 질량이 0.575Kg이므로 강성계수는 869.5 (N/m)로, 감쇠계수는 14.1 (Ns/m)로 계산되었다. 또 그림 7,8에 주파수 응답함수의 실수부와 허수부에 대하여 Hilbert 변환한 결과를 보였다.

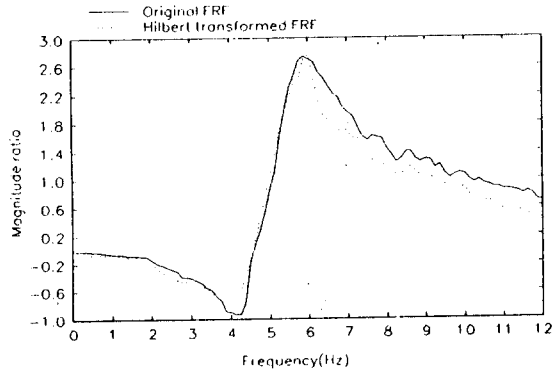


Fig. 7. Hilbert transformed FRF and original FRF (real part)

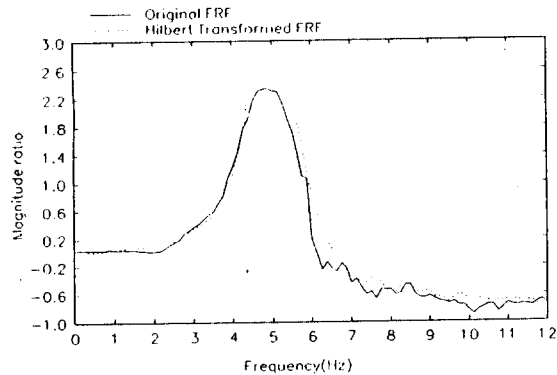


Fig. 8. Hilbert transformed FRF and original FRF (imaginary)

표 2는 그림 7,8의 Hilbert 변환 결과를 이용하여 얻은 HTD의 결과이다. 그림 7,8과 표 2에서 실험 대상 구조물이 비선형임을 알 수 있다. 특히 허수부에 대한 HTD가 두드러짐을 알 수 있다.

Table 2. Experimental result of HTD

HTD (%)	n=0	n=1	n=2	n=3
real(Vertical)	6.8225	8.1556	9.3059	10.2961
real(Horizontal)	8.1556	11.3120	11.0160	7.9910
imag(Vertical)	30.6790	35.7429	42.6127	52.3728
imag(Horizontal)	35.7429	48.7919	62.2299	76.4471
mag(Vertical)	0.8410	2.4265	3.9881	5.4833
mag(Horizontal)	2.4265	1.4275	2.4193	8.6024

그림 3에 보인 HTD_h 의 계산결과를 이용하여 표 2에 보인 HTD_h 에 대하여 감쇠지수 N과 강성지수 P를 보간법으로 계산하면 각각 1.25와 0.95로 얻을 수 있다.

그림 6에서 얻은 강성계수와 감쇠계수는 모우드 파라미터를 통하여 얻은 값이므로 N차 속도 감쇠와 P차 변위 강성의 감쇠계수와 강성 계수와 차이가 있고, N과 P는 보간법으로 구한 값이므로 감쇠계수, 감쇠지수와 강성계수, 강성지수에 대한 매개변수의 추정 과정을 거쳐 좀더 정확한 값을 계산하였다. 모우드 파라미터와 HTD를 이용하여 얻은 값들을 초기치로 이용하면 매개변수를 3,4회의 반복계산으로 추정할 수 있었다. 그림 9,10,11에 10Hz의 조화가진을 하여 얻은 속도와 변위 응답을 이용하여 추정한 결과를 보였다. 매개변수 추정으로 감쇠계수 C_N 은 13.74, 감쇠지수 N은 0.88, 강성계수 K_p 는 855.1였고, 강성지수 P는 1.05의 결과를 얻었다.

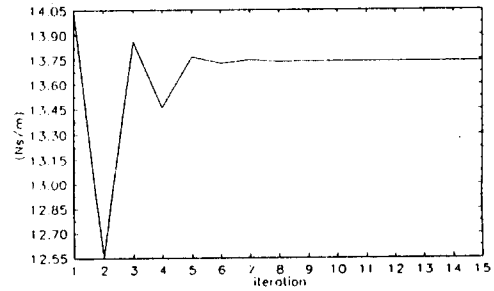


Fig. 9. Estimation of damping coefficient

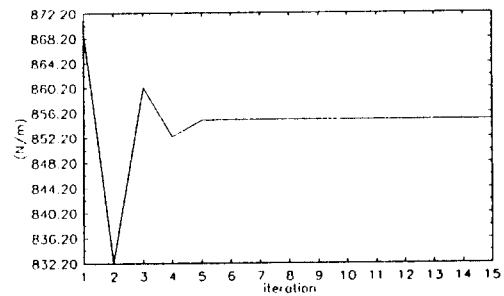


Fig. 10. Estimation of spring coefficient

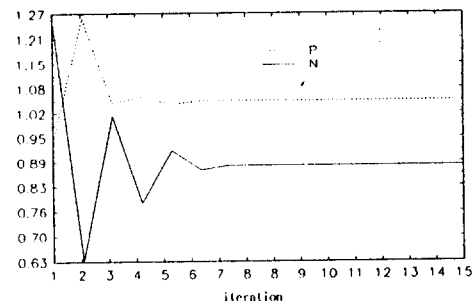


Fig. 11. Estimation of damping and spring exponent

4. 결론

본 연구에서 시간영역 데이터와 주파수영역 데이터를 사용하여 비선형 구조물의 매개변수를 규명할 수 있는 시스템을 개발하였다.

HTD는 비선형성을 정량화하기 위한 유용한 방법이며, 감쇠지수와 강성지수에 대한 HTD의 변화를 고찰하여 비선형 지수에 대한 비선형성을 정량화하였고 Hilbert 변환이 구조물의 비선형성 검출에 유용한 도구임을 확인하였다. 구조물의 시간 응답 데이터에 Gauss-Newton 추정 기법을 적용하여 구조물의 강성과 감쇠 매개변수를 추정할 수 있었고, HTD계산 결과로 얻은 대략적인 매개변수를 초기 가정치로 사용하여 빠른 수렴성을 확보할 수 있었다.

본 연구에서 개발한 비선형 매개변수 규명 시스템을 실제 구조물에 적용하여 감쇠와 강성의 매개변수를 규명할 수 있을 것으로 본다.

참고문헌

1. M. Simon, G.R. Tomlinson, "Use of the Hilbert Transform In Modal Analysis of Linear and Nonlinear Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.95 (3), pp. 421-436, 1984.
2. J.E. Mottershead, R. Stanway, "Identification of Nth-Power Velocity Damping", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.105 (2), pp. 309-319, 1986.
3. D.J. Dimas, "Experimental Modal Analysis and System Identification of Nonlinear Damped Systems", Ph.D. Dissertation Univ. of California, Irvine, 1988.
4. D.J. Dimas, "Modal Analysis Using The Hilbert Transform", Univ of California, Irvine. Dept. of Civil Eng., 1987.
5. G.R. Tomlinson, "Detection Identification and Qualification of Nonlinearity In Modal Analysis-A Review", *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference*, California, pp. 837-843, 1986.
6. D.J. Ewins, "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press, 1984.
7. F.S. Tse, I.E.Morse, R.T.Hinkle, "Mechanical Vibrations", Allyn and Bacon, Inc., 1978.