

스트레인 측정에 의한 응력화대계수의 결정  
(Determination of Stress Intensity Factor  
by Strain Measurement)

이 역 선 (인하대학교 기계공학과), 홍 성 경 (인하대학교 대학원 기계공학과),  
윤 경 수\* (인하대학교 대학원 기계공학과)  
O. S. Lee (Inha Univ., Mechanical Eng.), S. K. Hong (Inha Graduate School),  
K. S. Yun\* (Inha Graduate School)

ABSTRACT : Measurements of strain near a crack tip with electrical resistance strain gages do not usually provide a reliable value of stress intensity factor ( $K_I$ ) because of local yielding and limited regions for strain-gage placement. This paper attempted to define a valid region and to indicate procedures for locating and orienting the strain-gage to determine stress intensity factor accurately from one strain-gage readings.

**1. 서론**

1957년 Irwin [1]이 스트레인 게이지 신호를 이용하여 선형 파괴역학 파라메타인 응력화대계수 ( $K_I$ )를 구하는 방법을 시하였으며, 이후에 Kobayashi [2]가 compliance방법과 평탄성방법을 이용하여 정확한 응력화대계수를 구하려는 시도를 하였다. 그리고 Mannog [3]와 Theocaris [4]는 caustics방법을 도입하여 균열을 포함하고 있는 판재의 균열선단 (crack tip)의 응력상태를 규명하였다. 최근에는 Dally [5] 등이 스트레인 게이지 방법을 이용하여 정적 및 동적 하중을 받는 균열선단에서의 비교적 정확한 응력화대계수를 산정하였다.

스트레인 게이지를 이용하여 응력화대계수를 구하는 방법은 비교적 실험이 간단하고 실험 결과로 얻은 변형률값으로 균열선단 부근의 응력상태 및 응력화대계수를 정확히 산출할 가능성이 있기 때문에 많이 이용되어 왔다. 그러나 실제적으로 게이지를 붙인 국부 영역의 data만을 얻을 수 있으므로, 균열선단 부근의 전 영역에서의 data를 동시에 얻을 수 없는 단점이 있다. 또한 균열선단에서 가까운 곳이나 균열선단에서 먼 영역은 실험으로 얻은 변형률을 적용하여 해석하기에는 유효한 영역이 되지 못하므로, 신뢰성 있는 결과를 얻기 위해 적당한 게이지 위치를 알아내는 것이 무엇보다 중요하다 [6,7].

본 연구에서는 실험적으로 기록한 스트레인 게이지 신호를 이용하여 결정된 응력화대계수와 이론적인 결과를 비교하여 정확한 응력화대계수를 실험적으로 결정하는 방법, 그리고 신뢰성 있는 결과를 얻기 위한 스트레인 게이지 위치를 제시하였다.

**2. 실험 이론**

2-1. 균열선단 응력장의 다중 매개변수 표현식

Sanford는 Westergaard의 응력함수 (stress function)로 균열선단 (crack tip) 부근에서의 응력상태를 식 (1)과 같이 나타낼 수 있음을 보였다 [8,9].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= ReZ - yImZ' - yImY' + 2ReY \\ \sigma_{yy} &= ReZ + yImZ' + yImY' \\ \tau_{xy} &= -yReZ' - yReY' - ImY \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 단일 균열 (single-ended crack)의 경우 응력함수  $Z$ 와  $Y$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Z(z) &= \sum_{n=0}^N A_n z^{n-1/2} \\ Y(z) &= \sum_{m=0}^M B_m z^m \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$z = x + iy \quad (3)$$

이며, 좌표계는 Fig. 1에 나타낸 것과 같다.

평면응력 상태의 응력-변형률 관계에 따라 식 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= (1-\nu)ReZ - (1+\nu)yImZ' \\ &\quad - (1+\nu)yImY' + 2ReY \\ E\varepsilon_{yy} &= (1-\nu)ReZ + (1+\nu)yImZ' \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & + (1+\nu)yImY' - 2\nu ReY \\ \mu\gamma_{xy} = & -yReZ' - yReY' - ImY \end{aligned}$$

여기서  $\mu$  와  $\nu$  는 각각 전단 탄성계수 (shear modulus)와 포아송 비 (Poisson's ratio)를 나타낸다. 식 (4)에  $n=0, 1, m=0, 1$  을 대입하면, 응력함수  $Z, Y$  는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Z = & A_0 r^{-1/2} [\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)] \\ & + A_1 r^{1/2} [\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)] \\ Y = & B_0 + B_1 r [\cos\theta + i\sin\theta] \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} = & A_0 r^{-1/2} \cos(\theta/2) \{ (1-\nu) - \\ & (1+\nu) \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \} \\ & + 2B_0 + A_1 r^{1/2} \cos(\theta/2) \\ & [ (1-\nu) + (1+\nu) \sin^2(\theta/2) ] + 2B_1 r \cos\theta \\ E\varepsilon_{yy} = & A_0 r^{-1/2} \cos(\theta/2) [ (1-\nu) \\ & + (1+\nu) \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) ] \\ & - 2\nu B_0 + A_1 r^{1/2} \cos(\theta/2) \\ & [ (1-\nu) - (1+\nu) \sin^2(\theta/2) ] \\ & - 2\nu B_1 r \cos\theta \\ \mu\gamma_{xy} = & (A_0/2) r^{-1/2} \sin\theta \cos(3\theta/2) \\ & - (A_1/2) r^{1/2} \sin\theta \cos(\theta/2) - 2B_1 r \sin\theta \end{aligned} \quad (6)$$

이 변형률장은 독립된 점들 [예를 들면 Fig. 1 에서  $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2), P_3(r_3, \theta_3), P_4(r_4, \theta_4)$  등]에 대한 스트레인 게이지의 출력 값으로 결정되며 Fig. 1에 나타난 좌표의  $x$  또는  $y$  축방향에 스트레인 게이지를 취부한다면 다음 식과 같은  $A_0$ 와  $K_I$ 사이의 관계식을 얻을 수 있다 [10].

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_0 \quad (7)$$

## 2-2. 변형률에 의한 응력확대계수( $K_I$ )의 결정

Fig. 1에서, 원통좌표계의 임의의 점  $P(r, \theta)$ 로부터 회전 좌표계  $(x, y)$ 의 변형률은 는 변형률의 1차 불변량을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{x'x'} + \varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (8)$$

변형률-변환 방정식의 복소형식을 사용하면,

$$\varepsilon_{y'y'} - \varepsilon_{x'x'} + i\gamma_{x'y'} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} + i\gamma_{xy})e^{2i\alpha} \quad (9)$$

이 된다. 식 (4)를 식 (9)에 대입하고 식 (2)에서  $n=0, 1, m=0, 1$ 을 대입하면 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} 2\mu\varepsilon_{x'x'} = & A_0 r^{-1/2} [k\cos(\theta/2) - (1/2)\sin\theta \\ & \sin(3\theta/2)\cos 2\alpha + (1/2)\sin\theta\cos(3\theta/2) \\ & \sin 2\alpha] + B_0 [k + \cos 2\alpha + A_1 r^{1/2} \cos(\theta/2) \\ & (k + \sin^2(\theta/2)\cos 2\alpha - (1/2)\sin\theta\sin 2\alpha) \\ & + B_1 r [(k + \cos 2\alpha)\cos\theta - 2\sin\theta\sin 2\alpha] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\mu$  는 전단탄성계수 (shear modulus) 이고,  $\nu$  는 포아송 비 (Poisson's ratio) 이며  $k$  는 다음과 같이 정의되는 상수이다.

$$k = (1-\nu)/(1+\nu) \quad (11)$$

식 (10)에서 다음의 관계로부터  $B_0$ 항은 소거될 수 있다.

$$\cos 2\alpha = -k = -(1-\nu)/(1+\nu) \quad (12)$$

그리고  $A_1$ 항을 소거시키기 위해서는 다음의 관계를 만족하여야 한다.

$$k + \sin^2(\theta/2)\cos 2\alpha - (1/2)\sin\theta\sin 2\alpha = 0 \quad (13)$$

이 조건은 다음의 관계에서 만족된다.

$$\tan(\theta/2) = -\cot 2\alpha \quad (14)$$

$\nu, \theta$  그리고  $\alpha$ 와의 관계는 Table 1에 나타내었다.

본 실험에 사용된 polymethyl-methacrylate (PMMA)의 경우  $\nu=0.35$  이므로  $\alpha=59.4^\circ, \theta=57.6^\circ$ 로 각각 결정된다. 그러므로 식 (10)은 식 (7)과의 관계에서 응력확대계수는 스트레인  $\varepsilon_{x'x'}$ 와 게이지 위치  $r$ 만의 함수로 다음과 같이 간단히 결정된다.

$$K_I = 1.143E\sqrt{2\pi r}\epsilon_{xx} \quad (15)$$

그리고 polycarbonate의 경우  $\nu=0.38$ 이므로  $\alpha=58.4^\circ$ ,  $\theta=53.6^\circ$ 로 각각 결정되므로,

$$K_I = 1.132E\sqrt{2\pi r}\epsilon_{xx} \quad (16)$$

이다.

여기서  $E$ 는 탄성계수 (Young's modulus)이고,  $\epsilon_{xx}$ 는 스트레인 게이지 출력이다.

### 2-3. 용력확대계수의 이론식

본 연구에서 사용한 용력확대계수를 결정하는 이론식은 compact-tension (CT) 시편의 경우 다음과 같다 [11].

$$K_{Ih} = \frac{P}{t\sqrt{w}} \frac{(2+aw)}{(1-aw)^{3/2}} f(aw) \quad (17)$$

$$f(aw) = 0.886 + 4.64(aw) - 13.32(aw)^2 + 14.72(aw)^3 - 5.6(aw)^4$$

여기서,

$P$  = 하중,  $a$  = 균열 길이,  $w$  = 시편의 폭이다.

### 3. 실험 방법

본 실험에서는 Fig. 2에 나타난 바와 같이 PMMA와 polycarbonate를 CT (Compact-Tension)시편으로 가공하여 실험하였다. PMMA의 경우 두께 5mm, polycarbonate의 경우 두께 4.4mm의 시편을 사용하였으며, 그 물성치는 Table 2에 나타내었다.

시편의 크기가 용력확대계수 결정에 미치는 영향을 알아보기 위해서 시편의 폭,  $w$ 를 각각 120, 160, 200mm로 가공하여 실험하였고, 시편의 폭에 대한 균열길이의 비 ( $a/w$ )는 각각 0.3, 0.35, 0.4로 가공하여 그 영향을 살펴보았다. 하중은 정 하중장치를 이용하여 157N에서 313.9N 까지 단계적으로 작용시켜 실험하였으며, 스트레인 게이지는 균열선단에서  $0.025w \sim 0.35w$ 의 위치에 취부하였다. Fig. 3에 나타난 바와 같이 게이지로부터 나오는 출력 신호를 10채널 switch & balance unit에 연결하고 이것을 digital strain indicator에 연결하여 스트레인을 측정하였다.

### 4. 실험결과 및 고찰

하중, 시편의 폭 ( $w$ ), 시편의 폭에 대한 균열길이의 비 ( $a/w$ )등의 변화가 용력확대계수 결정에 미치는 영향을 검토

하기 위해서 그 실험 조건을 변화시켜서 실험하였으며, 그 구체적인 연구 결과는 다음과 같다.

#### 1) 하중이 용력확대계수 결정에 미치는 영향

하중은 정 하중장치를 사용하여 157N, 235.4N, 313.9N으로 단계적으로 가하였으며, 그 결과를 Figs. 4, 5에 나타내었다. 이론적인 용력확대계수값 ( $K_{Ith}$ )과 실험으로부터 얻은 용력확대계수값 ( $K_{Iex}$ )을 비교하기 위하여 그래프의 y축을  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 로 하고, x축을 하중과 게이지 취부위치,  $r$ 로 하여 그 결과를 각각 도시하였다. 그 결과  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 값은 하중의 변화에 따라서 거의 일정하여 그 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

#### 2) 게이지 취부위치가 용력확대계수 결정에 미치는 영향

시편의 폭,  $w$ 를 각각 120, 160, 200mm로 가공하여 실험하였으며, 그 실험 결과를 Figs. 6~9에 나타내었다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 게이지 취부위치의 변화에 따라 시편이 큰 것이 오차가 적음을 알 수 있다. 이 결과로부터 시편의 폭이 큰 것일 수록 게이지를 붙일 수 있는 영역이 넓다는 것을 알 수 있다. Fig. 7에는  $r$ 을  $w$ 의 함수로 나타내었으며, 이 그림에서 보는 바와 같이  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 값은  $r/w$ 의 변화에 따라 일정한 경향을 나타내고 있다. 또한  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 값은 게이지 취부위치가 증가함에 따라 감소하며,  $K_{Iex}$ 의 오차를  $\pm 15\%$ 이내로 제한할 경우 게이지의 취부위치는  $0.15w$ 이내임을 알 수 있다. 그리고 균열선단 가까이에서는  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 의 비가 1보다 큰 값을 가지며  $r/w$ 이 증가함에 따라 1보다 작은 값을 가진다. 그러므로  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 의 비가 1인 지점을 지나는 부분이 생기며, 이 부분이  $K_{Iex}$ 의 오차가 가장 작게 나타나는 지점임을 알 수 있다. 이 부분에서의 게이지 취부위치는 균열선단에서  $0.07w \sim 0.13w$ 이며, 그 오차는  $\pm 10\%$ 이내에 있음을 확인하였다.

Fig. 8과 Fig. 9는 게이지 취부위치에 대한 변형률값을 나타낸 것으로, 이 그림에서도 역시 신뢰성 있는 게이지의 취부위치는 균열선단에서  $0.07w \sim 0.13w$ 임을 확인할 수 있다.

#### 3) $a/w$ 가 용력확대계수 결정에 미치는 영향

시편의 폭에 대한 균열길이의 비( $a/w$ )를 각각 0.3, 0.35, 0.4로 나누어 실험하였으며, 그 실험 결과를 Fig. 10에 나타내었다. 그림에서 알 수 있는 것은  $a/w$ 가 증가함에 따라  $K_{Iex}/K_{Ith}$ 의 감소추이가 약간 완만해져 오차도 약간 감소한다. 그러나 균열선단 앞 부분에서는 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

$a/w$ 가 너무 클 경우는 Mode I의 상태를 유지하는데 어려움이 따르며, 하중을 높이는 데에도 문제가 발생한다. 그러므로 본 연구에 사용된 PMMA와 polycarb-

onate의 경우  $a/w$ 의 범위가 약 0.35~0.4사이가 적당한 것으로 판단된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 균열이 있는 시편에서 신뢰성 있는 결과를 얻기 위한 게이지 취부위치를 결정함으로써, 실험으로 얻은 스트레인 값을 이용하여 정확한 용력확대계수를 결정하는 방법을 제시하였다. 본 연구로부터 얻은 연구 결과는 다음과 같다.

- 1)  $K_{Ic}/K_{IIc}$  값은 하중의 변화에 따라서 거의 일정하며, 그 영향을 받지 않는다.
- 2) 게이지 취부위치가 균열선단에서  $0.07w \sim 0.13w$ 인 범위에서는  $K_I$ 의 오차 범위가 약  $\pm 10\%$ 이내에 있었으며, 이 범위내에서 비교적 정확한 용력확대계수를 구할 수 있음을 확인하였다.
- 3)  $a/w$ 가 증가하면 용력확대계수의 오차는 약간 감소하는 경향을 보이며, 본 연구에 사용된 PMMA와 polycarbonate의 경우,  $a/w$ 는 약 0.35~0.4사이에서 실험하는 것이 정확한 용력확대계수를 얻을 수 있는 것으로 판단된다.

## 참고 문헌

- [1] Irwin, G.R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", J. Appl. Mech., 24 (3), (1957).
- [2] Kobayashi, A.S. "Experimental Techniques in Fracture Mechanics", SEM Monograph, Iowa State University Press (1973).
- [3] Mannog, P., "Schattenoptische Messung der Spezifischen Bruchenergie während des Bruchvorgangs bei Plexiglas", Proc. Int. Conf. on the Physics of Non-Crystalline Solids, Delft, The Netherlands, 481-490 (1964).
- [4] Theocaris, P.S., "Local Yielding Around A Crack Tip in Plexiglass", J. Appl. Mech. 37, 409-415 (1970).
- [5] Dally, J.W., Berger J.R., "Study of Static and Dynamic Fracture Using Strain Measurements", U.S. Department of Commerce, (1990).
- [6] Rosakis, A.J. and Ravi Chandra, K., "On Crack Tip Stress States and Experimental Evaluation of Three-Dimensional Effects", Cal. Inst. of Tech. Rep., FM-84-2(1984).
- [7] Irwin, G.R., "Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness", Proc. 7th Sagamore Conf., IV-63 (1960).
- [8] Sanford, R.J., "A Critical Re-examination of the Westergaard Method for Solving Opening-Mode Crack Problems", Mech. Res. Comm., 6 (5), (1979).
- [9] Westergaard, H.M., "Bearing Pressure and Cracks", J. Appl. Mech., 6 (1939).
- [10] Dally, J.W., "Lower-Bound Initiation Toughness with a Modified-Charpy Specimen", (1990).

[11] ASTM-Standard E399-83, "Standard Test Methods for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials", 1983 Annual Book of ASTM Standards, 03.01, ASTM (1983).

Table 1 Angles  $\alpha$  and  $\theta$  as a function of Poisson's ratio,  $\nu$

$\nu$	$\theta$ (deg)	$\alpha$ (deg)
0.250	73.74	63.43
0.300	65.16	61.29
0.350	57.60	59.40
0.400	50.76	57.69
0.500	38.97	54.78

Table 2. Material property

Material	Modulus of Elasticity (MPa)	Poisson's ratio
Polycarbonate	2724	0.38
PMMA	3240	0.35

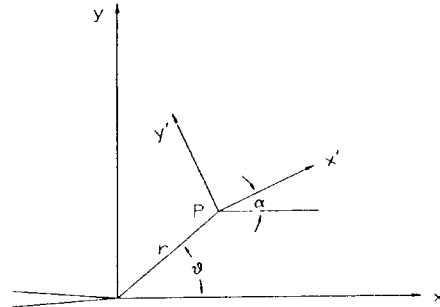


Fig. 1 Definition of coordinate systems.

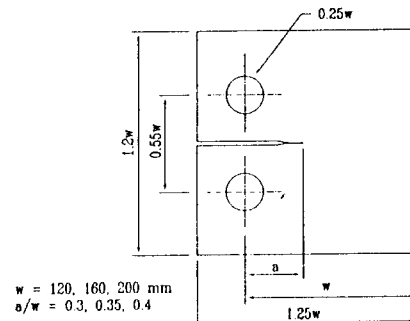


Fig. 2 Specimen configuration.

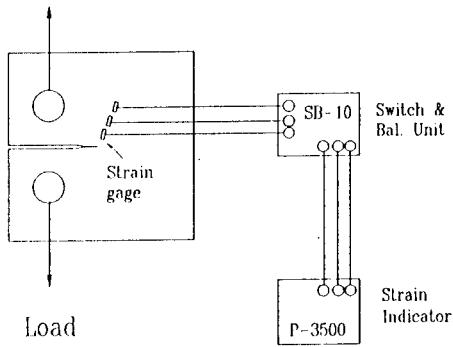


Fig. 3 Schematic of experimental set-up for the strain-gage methods.

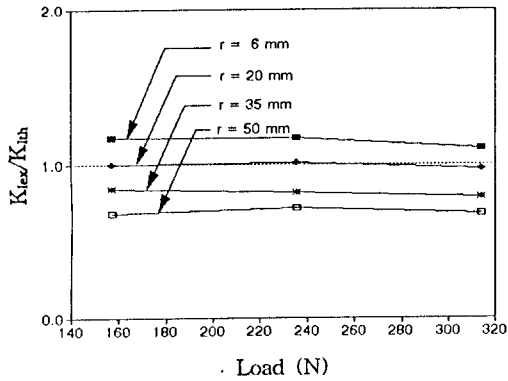


Fig. 4 Influence of load on  $K_{ex}/K_{th}$  in PMMA specimen. ( $w=160\text{mm}$ ,  $a/w = 0.3$ )

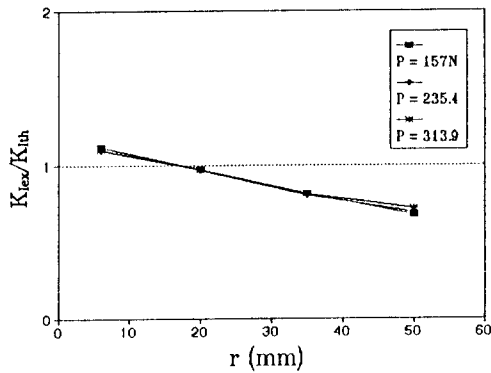


Fig. 5 Influence of load on  $K_{ex}/K_{th}$  in polycarbonate specimen. ( $w=160\text{mm}$ ,  $a/w = 0.3$ )

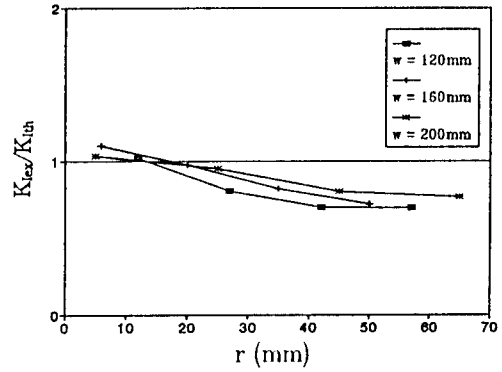


Fig. 6 Influence of  $w$  on  $K_{ex}/K_{th}$  in polycarbonate specimen. ( $P=313.9\text{N}$ ,  $a/w = 0.3$ )

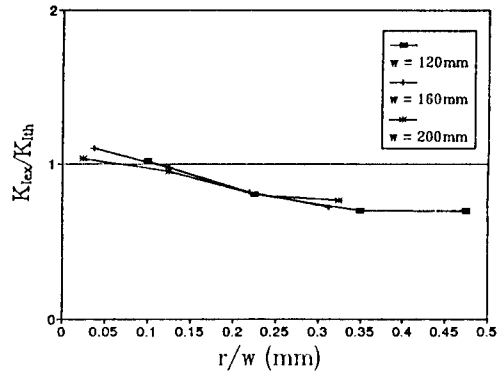


Fig. 7 Influence of  $w$  on  $K_{ex}/K_{th}$  in polycarbonate specimen. ( $P=313.9\text{N}$ ,  $a/w = 0.3$ )

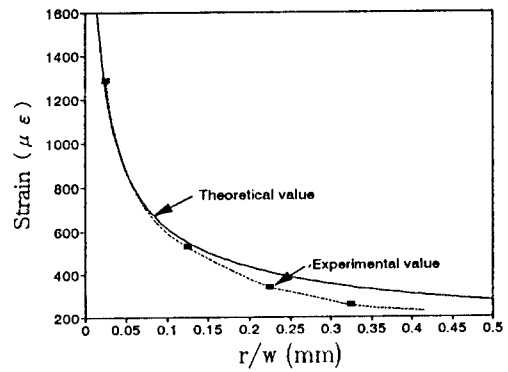


Fig. 8 Relationship between strain and  $r/w$  in polycarbonate specimen. ( $P=235.4\text{N}$ ,  $w=120\text{mm}$ ,  $a/w=0.3$ )

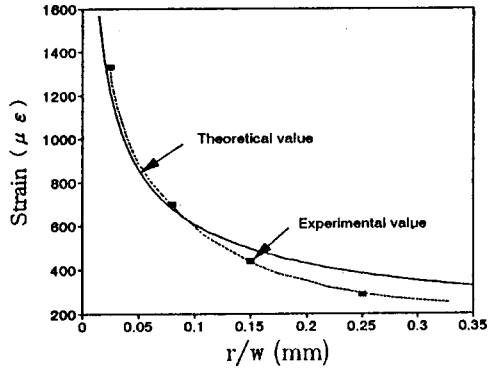


Fig. 9 Relationship between strain and  $r/w$  in PMMA specimen.  
( $P=313.9N$ ,  $w=200mm$ ,  $a/w=0.3$ )

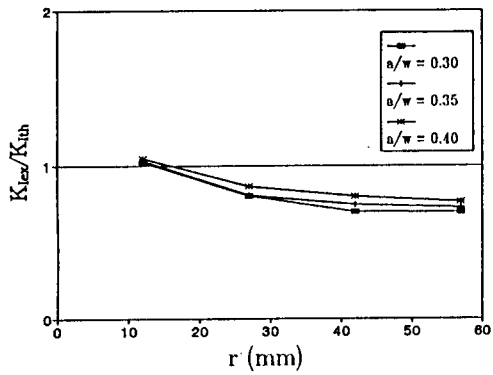


Fig. 10 Influence of  $a/w$  on  $K_{ex}/K_{th}$  in polycarbonate specimen.  
( $P=313.9N$ ,  $w=120mm$ )