

타원계 비원형기어(엽형)의 설계에 관한 연구

A Study on the Design of Elliptic
Non-Circular(Lobe Type) Gears

고 윤 호*, 최 상 훈**
* 건국대학교 대학원
** 건국대학교 기계설계학과

1. 서론

비원형기어의 기본적인 특징을 몇가지 소개하고자 한다. 첫째, 간소한 기구로서 소형화할 수 있고, 둘째, 임의의 부동속 회전 전달을 얻을 수 있으며, 셋째, 맞물린 치면의 미끄럼접촉이 적기때문에 마모피로가 적고, 넷째, 고부하 전달이 가능하다는 장점이 있다.

역사적으로 고찰을 해 보면, 일본에서 비원형기어에 대한 연구가 1950년 부터 시작되었으나, 가공의 어려움 때문에 만족할 만한 성과를 얻지 못하고 보통의 원형기어를 편심시켜 인체기, 각종계측기 등에 사용하여 오다가 1960년대에 가공법에 대한 논문⁽¹⁾에 발표되어 개량되고 있다. 하지만, 우리나라에서는 이에 대한 연구가 아직은 미흡 할 뿐만아니라, 이에 관한 연구논문이나 참고서적이 부족한 실정이다.

본 연구의 목적은 링크, 캠과 같은 동일한 용도에 사용되는 다른 여러 기구에 비해 많은 잇점을 가지고 있는 적합한 타원계 비원형기어(엽형)에서 편평도의 변화에 따른 피치라인을 설계하고, 각속비 및 편평도에 따른 형상과 길이의 변화, 물림압력, 곡률반경등의 연구를 바탕으로 스퍼형과 헬리컬형의 타원계 엽형로타를

AUTOCAD의 script,3dface를 이용하여 Computer Simulation를 통해 도형화한다.

2. 치형곡선의 기본식

2.1. 기본식

그림1에서 보여진 한개의 비원형기어를 놓고, 원동축을 피니언, 종동축을 기어라하고 그의 회전 중심을 O_1O_2 라 한다. O_1O_2 의 거리를 일정 중심거리 a라 놓고, 회전중심에서 피치곡선까지의 거리를 피치動線이라 하고, 각각 r_1r_2 라 한다. 다시 회전각도를 $\theta_1\theta_2$ 라 하고 회전방향은 반시계방향을 (+), 시계방향을 (-)라 한다.

피니언이 (+)방향으로 θ_1 로 회전하고 기어도 $-\theta_2$ 회전하고, P_1P_2 가 $\overline{O_1O_2}$ 상에서 접촉하고, 다시 피니언이 미소각 $d\theta_1$ 회전하고 기어도 미소각 $-d\theta_2$ 회전하고, $P_1'P_2'$ 가 $\overline{O_1O_2}$ 상에서 접촉하게 되면 다음의 관계가 성립한다.

$$r_1 + r_2 = a \quad (1)$$

$$r_1 \cdot d\theta_1 = - r_2 \cdot d\theta_2 \quad (2)$$

중심거리를 a = 1라 하고 위의 식 (1),(2)에서 r_1r_2 를 구한다.

원동축, 종동축이 외치차(기어)인 경우는 다음과 같다.

$$r_1 = - \frac{\frac{d\theta_2}{d\theta_1}}{1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1}} \quad (3)$$

$$r_2 = \frac{1}{1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1}} \quad (4)$$

원동축, 종동축이 내치차(기어)인 경우는 다음과 같은 관계가 성립한다. 중심거리를 a = 1라 하고 아래의 식 (5),(6)에서 r_1r_2 를 구한다.

$$(r_1 - r_2) = a \quad (5)$$

$$r_1 \cdot d\theta_1 = r_2 \cdot d\theta_2 \quad (6)$$

$$r_1 = - \frac{\frac{d\theta_2}{d\theta_1}}{(1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1})} a \quad (7)$$

$$r_2 = \frac{-1}{(1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1})} a \quad (8)$$

- $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ 은 각속비를 표시하는 것이다.

식(3), (4), (7), (8)는 각속비가 주어진다면, 피치동경이 일차적으로 구하는 것을 의미한다.

2.2. 피치라인

원동축, 종동축의 양기어가 같은 형태로 상호성이 있을 경우에, 원동축이 일정한 속도로 1회전 할때, 종동축의 속도가 1회전 1회 변하는 것을 편심기어라 부르고, 2회 변하는 것을 타원형기어라 부른다.

그의 피치라인을 극좌표 P(r, θ)로 나타내기 위한 곡선의 식은 다음과 같다.

$$r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos n\theta_1} \quad (9)$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon \cos n\theta_2}$$

그림2에서와 같이 원형기어에 편심을 주어 만든 편심기어의 편심량과 피치라인의 長經 및 短經의 식은 아래와 같다.

$$\text{편심량} = \frac{a\epsilon}{2}$$

$$\text{長經} = a$$

$$\text{短經} = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$$

타원기어의 최대 피치라인과 최소 피치라인은 극좌표로 나타낸 곡선의 식을 통하여 다음과 같이 나타낸다.

$$r_{\max} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos n\theta} = \frac{a}{2}(1 + \epsilon)$$

$$\text{장경} = a(1 + \epsilon)$$

$$r_{\min} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon \cos n\theta} = \frac{a}{2}(1 - \epsilon)$$

$$\text{단경} = a(1 - \epsilon)$$

그림 3에서 보는 것처럼 구간이 0 ~ π일때 식(9)에서 n × θ이 π일때 최대 피치라인이 되고, n × θ이 0일때 최소 피치라인이 된다.

3. 피치곡선

3.1 피치곡선

치차(기어)의 원형한 물림을 연속적으로 하기 위해서는 다음과 같은 조건을 만족 시킬 필요가 있다.

(1) 피치곡선은 폐곡선을 이룬다. 이것은 연속회전을 시키기 위해서 이다.

(2) 피치動經은 (+)이다. 기어의 본체가 축중심에 없는 경우에는 피치動經이 (-)이다. 이 경우에는 피치폐곡선이 바깥쪽에 존재하기 때문에 치절삭 및 조립에 곤란하다.

(3) 피치곡선의 접선각(σ)은 연속해서 변한다. σ는 다음식으로 표현한다.

$$\left(\sigma = \tan^{-1} \left(\frac{r}{dr/d\theta} \right) \right)$$

위의 피치곡선의 조건은 엽형기어의 피치곡선에 대한 몇가지 조건을 나타내고 있지만, 또한, 비원형기어의 설계를 하기 위해서는 위의 조건과 이의 간섭(인벌류우트 간섭, 트로코이드 간섭, 트리밍), 언더컷등을 고려한 여러 조건을⁽²⁾ 제시할수 있다.

3.2. 피치곡선의 곡률반경

피치곡선의 곡률반경은 원형기어에서는 변화가 없음을 나타내므로, 이를 절삭할때에 사용되는 커터 또한 한가지이지만, 비원형인 경우에는 곡률반경이 위치에 따라서 달라지므로 사용 될 커터의 종류가 변화하게 된다. 이를 위해서 피치곡선의 곡률반경의 식을 구하고자 한다.

임의의 곡선 r = f(θ)를 통해서 한점 P에서 r과

$\frac{dr}{d\theta}$ 가 모두 0가 아니면 다음의 결과를 얻는다.

곡선 r = f(θ)의 한점 p(r, θ)에서 곡률은 아래와 같다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r(\frac{d^2r}{d\theta^2})|}{[r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2]^{3/2}}$$

그러므로, 피치곡선의 곡률반경은 다음과 같다.

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left[r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \right) \right]}$$

곡률반경은 인벌류우트 간섭, trimming간섭 등 각각의 치형 간섭, 공구의 간섭을 해석할 경우 캠 기어에 설치되는 상당원형기어를 치환할 수 있는데, 이를 위해 피치곡선의 곡률반경을 구하는 것이 필요하다. 또한,

피치곡선의 곡률반경 값의 부호와 대소를 조사해서 피치곡선치형의 오목하고 볼록한 특징을 대략 확증하고, 가공방법 선택의 제약조건을 확립한다.

3.3. 피치곡선의 물림압력각

물림압력각(α_b)은 그림4에서 보는 것과 같이 서로의 피치곡선, 접점에 놓인 공통접선의 각도 α_p (피치곡선위 압력각)에 공구 압력각 α_c 또는 기준압력각 α_o 를 더한 것이다.

$$\alpha_b = \alpha_o + \alpha_p = \alpha_o + \tan^{-1} \left(\frac{dr}{r} \right)$$

4. 속도비

기어가 원활한 물림운동을 하기 위해서는 각속도가 언제나라도 동일해야 한다. 일반적으로, 원동축의 각속도에 대한 종동축의 각속도의 비를 속도비라 한다. 원동축의 회전각도에 관한 종동축의 회전각도를 위상이라고 한다.

각속비($\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$)는 식(1)과 식(2)에서 $a = 1$ 로 놓고

두식을 이용해서 아래와 같이 구해진다.

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon + 2\epsilon \cos n\theta_1}$$

위상의 차($\theta_2 - \theta_1$) 식은 식(1)에서 $a = 1$ 로 하고 식(9)에서도 $a=1$ 로하고 서로 연립해서 풀면 아래식와 같이 주어진다.

$$\frac{1}{n} \cos^{-1} \left[\frac{2\epsilon + (1 + \epsilon^2) \cos n\theta_1}{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos n\theta_1} \right] - \theta_1$$

5. 결과 및 고찰

그림5 ~그림6에서 보듯이 염수에 관계없이 편평도가 커지면 장경의 길이가 증가하고, 단경의 길이가 감소한다. 또 편평도가 작아지면 장경의 길이는 감소하고, 단경의 길이는 증가함을 알 수 있다.

그림7 ~ 그림8는 각 염수에 대한 각속비의 변화를 나타낸 그림이다. 편평도의 증가와 감소에 따라 각속비도 증가하고 감소함을 보인다. 편평도(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)에 대한 각각의 모양의 각속비가 변화한다는 것은 각속비가 증가에서 감소로 감소에서 증가로 이동할 즈음에 각속도가 양에서 음으로 음에서 양으로 변화한다는 것이다.

그림9은 $a = 1$ 일때 편평도(0.1 ~ 0.5)에 따른 각 염수에 대한 최대곡률반경을 나타낸 그림이다. 염수 $n = 1$ 일때에 대해서는 곡률반경의 변화가 거의 없고, 염수 $n = 2$ 일때는 거의 편평도 0.33에서 곡률반경이 무한대가 되었고, $n = 3$ 일때 편평도 0.13, $n = 4$ 일때 편평도 0.07에서 거의 곡률반경이 무한대를 보였다. 이것은 치형이 거의 직선에 가깝다는 것을 의미한다. 또한, 곡률반경의 무한대는 염수가 많을수록 편평도가 작은 지점에서 일찍 시작 되었다.

그림10은 편평도와 물림압력각의 관계를 나타낸 그림이다. 염수와는 관계없이 편평도가 커질수록 압력각도 증가함을 나타내고 있다.

$n = 1$ 일때 최대압력각은 약 30° , $n = 2$ 일때는 48° , $n = 3$ 일때 55° , $n = 4$ 일때 67° 임을 보였다.

6. 결론

본 연구에서는 타원계 비원형기어중에서 편평도의 변화에 따라 변화하는 염형기어의 각속비, 물림압력각, 곡률반경 등에 대하여 연구한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 단, 편평도의 변화는 (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)의 4가지 경우를 응용했다.

1. 편평도의 증가로 인하여 장경부는 증가하고, 단경부는 감소한다. ($n=1$ 일때 편평도 0.1에서 장경부는 16.5mm, 단경부는 13.5mm인데 반해 편평도가 0.4 일때는 장경부는 21mm이고 단경부는 9mm로 나타났다.)
2. 편평도가 증가함에 따라 각 염수의 각속비 또한 크게 나타난다. 즉, 증가에서 감소로, 감소에서 증가로 반복됨을 나타낸다.
3. 압력각과 물림압력각은 편평도의 증가에 따라 각 염수마다 증가한다.

$$r_2 = \frac{-1}{(1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1})} a \quad (8)$$

- $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ 은 각속비를 표시하는 것이다.

식(3), (4), (7), (8)는 각속비가 주어진다면, 피치동경이 일차적으로 구하는 것을 의미한다.

2.2. 피치라인

원동축, 종동축의 양기어가 같은 형태로 상호성이 있을 경우에, 원동축이 일정한 속도로 1회전 할때, 종동축의 속도가 1회전 1회 변하는 것을 편심기어라 부르고, 2회 변하는 것을 타원형기어라 부른다.

그의 피치라인을 극좌표 P(r, θ)로 나타내기 위한 곡선의 식은 다음과 같다.

$$r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos n\theta_1} \quad (9)$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon \cos n\theta_2}$$

그림2에서와 같이 원형기어에 편심을 주어 만든 편심기어의 편심량과 피치라인의 長經 및 短經의 식은 아래와 같다.

$$\text{편심량} = \frac{a\epsilon}{2}$$

$$\text{長經} = a$$

$$\text{短經} = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$$

타원기어의 최대 피치라인과 최소 피치라인은 극좌표로 나타낸 곡선의 식을 통하여 다음과 같이 나타낸다.

$$r_{\max} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos n\theta} = \frac{a}{2}(1 + \epsilon)$$

$$\text{장경} = a(1 + \epsilon)$$

$$r_{\min} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon \cos n\theta} = \frac{a}{2}(1 - \epsilon)$$

$$\text{단경} = a(1 - \epsilon)$$

그림 3에서 보는 것처럼 구간이 0 ~ π일때 식(9)에서 n × θ이 π일때 최대 피치라인이 되고, n × θ이 0일때 최소 피치라인이 된다.

3. 피치곡선

3.1 피치곡선

치차(기어)의 원형한 물림을 연속적으로 하기 위해서는 다음과 같은 조건을 만족 시킬 필요가 있다.

(1) 피치곡선은 폐곡선을 이룬다. 이것은 연속회전을 시키기 위해서 이다.

(2) 피치動經은 (+)이다. 기어의 본체가 축중심에 없는 경우에는 피치動經이 (-)이다. 이 경우에는 피치폐곡선이 바깥쪽에 존재하기 때문에 치절삭 및 조립에 곤란하다.

(3) 피치곡선의 접선각(σ)은 연속해서 변한다. σ는 다음식으로 표현한다.

$$\left(\sigma = \tan^{-1} \left(\frac{r}{dr/d\theta} \right) \right)$$

위의 피치곡선의 조건은 엽형기어의 피치곡선에 대한 몇가지 조건을 나타내고 있지만, 또한, 비원형기어의 설계를 하기 위해서는 위의 조건과 이의 간섭(인벌류우트 간섭, 트로코이드 간섭, 트리밍), 언더컷등을 고려한 여러 조건을⁽²⁾ 제시할수 있다.

3.2. 피치곡선의 곡률반경

피치곡선의 곡률반경은 원형기어에서는 변화가 없음을 나타내므로, 이를 절삭할때에 사용되는 커터 또한 한가지이지만, 비원형인 경우에는 곡률반경이 위치에 따라서 달라지므로 사용 될 커터의 종류가 변화하게 된다. 이를 위해서 피치곡선의 곡률반경의 식을 구하고자 한다.

임의의 곡선 r = f(θ)를 통해서 한점 P에서 r과

$\frac{dr}{d\theta}$ 가 모두 0가 아니면 다음의 결과를 얻는다.

곡선 r = f(θ)의 한점 p(r, θ)에서 곡률은 아래와 같다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r(\frac{d^2r}{d\theta^2})|}{[r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2]^{3/2}}$$

그러므로, 피치곡선의 곡률반경은 다음과 같다.

$$\rho = \frac{|r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2|^{3/2}}{|r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r(\frac{d^2r}{d\theta^2})|}$$

곡률반경은 인벌류우트 간섭, trimming간섭 등 각각의 치형 간섭, 공구의 간섭을 해석할 경우 캠 기어에 설치되는 상당원형기어를 치환할 수 있는데, 이를위해 피치곡선의 곡률반경을 구하는 것이 필요하다. 또한,

피치곡선의 곡률반경 값의 부호와 대소를 조사해서 피치곡선치형의 오목하고 볼록한 특징을 대략 확증하고, 가공방법 선택의 제약조건을 확립한다.

3.3. 피치곡선의 물림압력각

물림압력각(α_b)은 그림4에서 보는 것과 같이 서로의 피치곡선, 점점에 놓인 공통접선의 각도 α_p (피치곡선위 압력각)에 공구 압력각 α_c 또는 기준압력각 α_o 를 더한 것이다.

$$\alpha_b = \alpha_o + \alpha_p = \alpha_o + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{dr}{d\theta}}{r}\right)$$

4. 속도비

기어가 원활한 물림운동을 하기 위해서는 각속도가 언제나 동일해야 한다. 일반적으로, 원동축의 각속도에 대한 종동축의 각속도의 비를 속도비라 한다. 원동축의 회전각도에 관한 종동축의 회전각도를 위상이라고 한다.

각속비($\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$)는 식(1)과 식(2)에서 $a = 1$ 로 놓고

두식을 이용해서 아래와 같이 구해진다.

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon + 2\varepsilon \cos n\theta_1}$$

위상의 차($\theta_2 - \theta_1$) 식은 식(1)에서 $a = 1$ 로 하고 식(9)에서도 $a=1$ 로하고 서로 연립해서 풀면 아래식와 같이 주어진다.

$$\frac{1}{n} \cos^{-1} \left[\frac{2\varepsilon + (1 + \varepsilon^2) \cos n\theta_1}{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos n\theta_1} \right] - \theta_1$$

5. 결과 및 고찰

그림5 ~그림6에서 보듯이 엽수에 관계없이 편평도가 커지면 장경의 길이가 증가하고, 단경의 길이가 감소한다. 또 편평도가 작아지면 장경의 길이는 감소하고, 단경의 길이는 증가함을 알 수 있다.

그림7 ~ 그림8는 각 엽수에 대한 각속비의 변화를 나타낸 그림이다. 편평도의 증가와 감소에 따라 각속비도 증가하고 감소함을 보인다. 편평도(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)에 대한 각각의 모양의 각속비가 변화한다는 것은 각속비가 증가에서 감소로 감소에서 증가로 이동할 즈음에 각속도가 양에서 음으로 음에서 양으로 변화한다는 것이다.

그림9은 $a = 1$ 일때 편평도(0.1 ~ 0.5)에 따른 각 엽수에 대한 최대곡률반경을 나타낸 그림이다. 엽수 $n = 1$ 일때에 대해서는 곡률반경의 변화가 거의 없고, 엽수 $n = 2$ 일때는 거의 편평도 0.33에서 곡률반경이 무한대가 되었고, $n = 3$ 일때 편평도 0.13, $n = 4$ 일때 편평도 0.07에서 거의 곡률반경이 무한대를 보였다. 이것은 치형이 거의 직선에 가깝다는 것을 의미한다. 또한, 곡률반경의 무한대는 엽수가 많을수록 편평도가 작은 지점에서 일찍 시작 되었다.

그림10은 편평도와 물림압력각의 관계를 나타낸 그림이다. 엽수와는 관계없이 편평도가 커질수록 압력각도 증가함을 나타내고 있다.

$n = 1$ 일때 최대압력각은 약 30° , $n = 2$ 일때는 48° , $n = 3$ 일때 55° , $n = 4$ 일때 67° 임을 보였다.

6. 결론

본 연구에서는 타원계 비원형기어중에서 편평도의 변화에 따라 변화하는 엽형기어의 각속비, 물림압력각, 곡률반경 등에 대하여 연구한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 단, 편평도의 변화는 (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)의 4가지 경우를 응용했다.

1. 편평도의 증가로 인하여 장경부는 증가하고, 단경부는 감소한다. ($n=1$ 일때 편평도 0.1에서 장경부는 16.5mm, 단경부는 13.5mm인데 반해 편평도가 0.4 일때는 장경부는 21mm이고 단경부는 9mm로 나타났다.)
2. 편평도가 증가함에 따라 각 엽수의 각속비 또한 크게 나타난다. 즉, 증가에서 감소로, 감소에서 증가로 반복됨을 나타낸다.
3. 압력각과 물림압력각은 편평도의 증가에 따라 각 엽수마다 증가한다.

4. 곡률반경은 $n = 1$ 일때는 거의 변화가 없고 $n=2$ 일때 편평도가 0.33, $n=3$ 일때는 편평도가 0.13, $n=4$ 일때는 편평도가 0.07에서 각각 무한대를 보였다.

7. 참고문헌

1. “非圓形齒車의 理論과 이의 應用에 관한 研究”, (學位論文) 日本 東京大學
2. 横山良明 의, “非圓形 遊星齒車 機構의 研究”, 日本機械學會 論文集, Vol 48, No 428, 昭57.
3. 横山良明, “不等速 遊星齒車 機構의 研究”, (學位論文), 1983
4. 涯田, “非圓形齒車에 관한 研究”, 機械試驗所報告, No 30, Mar. 1959
5. 横山良明, “非圓形 齒車 機構의 設計, 製作”, 日本機械學會 論文集, Vol 22, No 5, 5月, 1987.
6. 山崎 隆, “非圓形 齒車의 設計, 製作과 그의 應用”, 日本機械學會 論文集, Vol 29, No11, 9月, 1985.

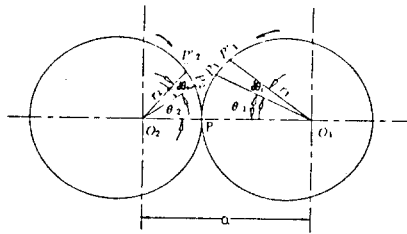


Fig. 1. 비원형기어의 굴림 피치곡선

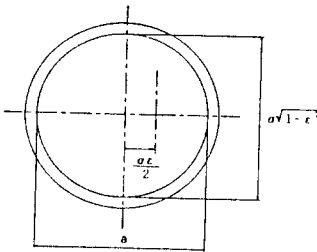


Fig. 2. 편심기어의 피치라인의 표시

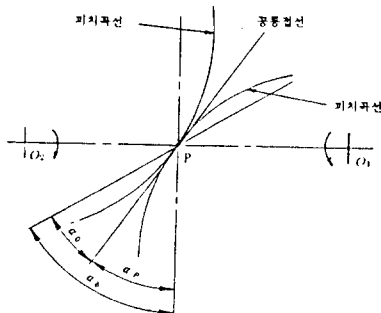


Fig. 4. 피치곡선과 물림압력각

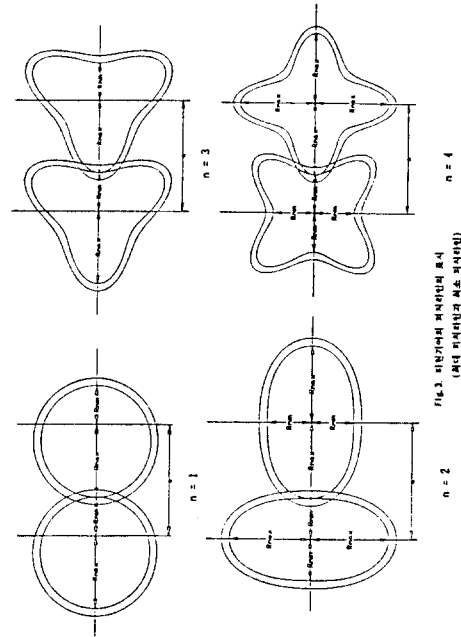


Fig. 3. 이원기어의 비원형기어의 표시 (특대 비원형기어의 표시)

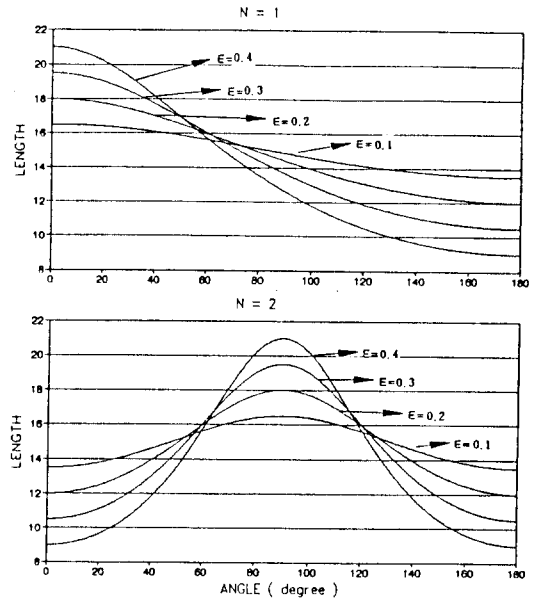


Fig. 5. 원동축의 동경의 길이 변화 (N = 1, N = 2)

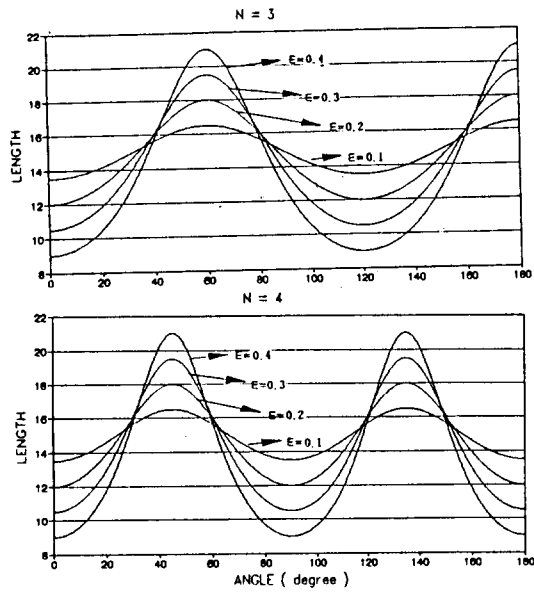


Fig. 6. 원동축의 동경의 길이 변화 ($N = 3, N = 4$)

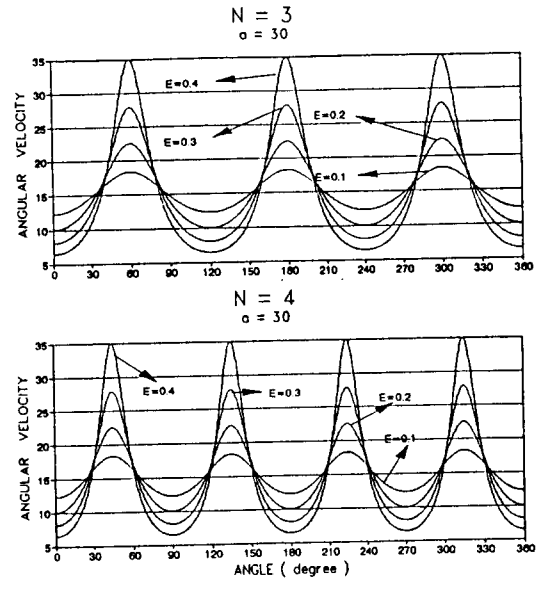


Fig. 8. 각속비 ($N = 3, N = 4$)

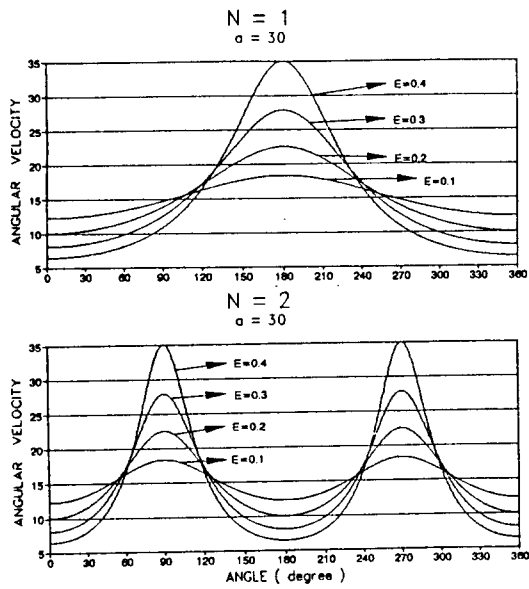


Fig. 7. 각속비 ($N = 1, N = 2$)

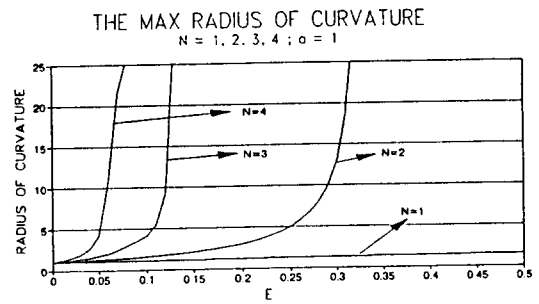


Fig. 9. 최대 곡률반경 ($N = 1, 2, 3, 4$)

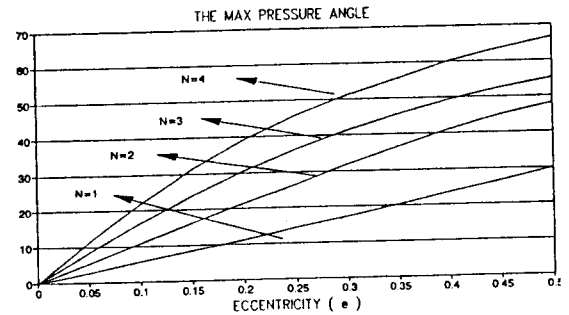


Fig. 10. 최대 압력각 ($N = 1, 2, 3, 4$)