

斜面解析에 있어서 土性値의 最適推定에 關한 研究

A Study for the Best Estimation of Geotechnical Parameters
on the Slope Analysis

金斗峻* 鄭大碩** 白榮植***

Kim, Doo-Jun Jung, Dae-Seuk Paik, Young-Shik

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the design and the construction for the most economic and safe slope stability analysis. The approach to the purpose lies in analyzing the characteristic on direction and distance by the sample value for the geotechnical parameters using the semi-variogram concept. Based on the result, we derive the Kriging system equation from the stochastic concept and solve the equation to find the weighting factor which is applied both the point estimation and the block estimation in the particular position. Comparing and analyzing the various methods, we find the best reliability, which is more accurate than any other

要 旨

斜面 등의 토공구조물의 안정해석에 있어서, 地盤變數의 最適推定을 위해 推計學的 理論(stochastic concepts)을 도입했다. 地盤의 방향에 따른 최대의 試錐間隔과 點推定뿐만 아니라 區域推定이 가능케 했으며 또한 그 推定値의 信賴度를 구할 수 있도록 했다. 解析上의 正確度の 證明과 實務에서의 適用의 便易性 比較를 위해 實際狀況에 대한 몇가지의 예를 들고 각각 算術平均 利用法과 FDM, FEM, 逆距離法, 逆距離自乘法, Kriging 法을 도입 結果들을 서로 比較檢討하였다. 推定値의 比較분석 결과 Kriging 法이 가장 信賴性이 크고 또한 다른 方法들과는 달리 推定子의 正確度 즉 信賴度를 算出할 수 있다. 한편으로 토공구조물의 形狀에 따른 地盤變數를 추정할 수 있게 하였다.

* 정희원 仁德專門大學 土木科 副教授

** 정희원 慶熙大學院 博士科程

*** 정희원 慶熙大學校 工科大學 土木工學科 教授

1. 序 論

地盤變數의 正確한 推定은 아주 重要한 事項으로서 經濟性和 安全性에 直結되는 問題이다. 일반적으로 地盤에 따른 自體의 不均質性을 充分히 考慮하지 않고 一律的인 標本調査를 실시하며, 또한 標本의 徹底한 分析 없이 그대로 使用함으로써 地盤의 狀態定數 및 強度定數들이 正確히 推定되지 않으므로서 많은 問題가 발생되고 있다. 最近의 土木構造物의 傾向을 보면 都市化, 密集化, 巨大化로 構造物의 設計 및 施工에 있어서 地盤의 徹底한 調査 및 分析의 重要性이 急速히 增加되고 있고 이에 對한 많은 研究가 要求되고 있다.

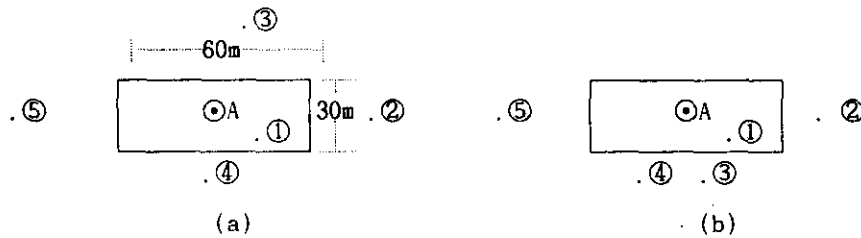


그림 1-1 標本點의 位置 및 推定區域

表 1-1 標本點들의 座標와 標本值

標本點	X 座標	Y 座標	標本 값
Ⓐ	70	30	-
1	90	22	400
2	120	30	380
3	80	60	450
4	70	0	280
5	0	30	320

그림 1-1 (a)와 같은 表本點들을 利用하여 未知의 한 點 A의 값을 推定하거나 點 A를 中心으로 하는 特定區域(그림에서 四角形 內)의 平均값 等を 推定해야할 경우 恒常 모든 標本點들을 全部 考慮해서 推定한다고 해서 無條件 推定結果의 信賴性이 큰 것은 아니다. 그렇다면 어느 정도 以內의 거리에 있는 標本만을 計算에 考慮하여야 하며 또는 어느 정도 以上 떨어져 있는 標本들을 無視하는 것이 信賴度가 커지는가에 대한 考察이 있어야 한다.

여기서 推定點과 거리가 가까운 標本點일수록 훨씬 큰 影響을 미치리라는 것은 當然하다. 따라서 각 標本들의 加重值(weighting factor)는 完全한 線形인 경우 거리에 反比例할 것이다. 그러나 完全한 線形이 아닌 경우에는 이 법칙을 그대로 따르지 않는다.

또한 既存의 標本으로 하여금 얻어지는 情報가 不足하다고 判斷되어 보다 많은 地盤

情報를 얻기 위해 標本番號 ⑤番의 倍만큼 떨어져 있는 位置에 새로운 한 點을 고려할 경우 이 標本을 推定에 考慮해야 하는 것이 좋은지 아니면 無視해야 좋은지, 만약 考慮한다면 얼마만큼의 影響值를 가지며 이렇게 해서 얻은 推定 結果值는 어느 정도의 信賴性을 가지는지에 對한 判斷은 工學에서 아주 重要한 事項이다.

한편, 基礎設計 등에서 基礎의 크기는 한 點이 아니라 一定한 크기와 形狀 및 방향을 가지고 있다. 이 경우 基礎의 長軸方向에 따라 그 基礎底面의 強度定數 平均값의 크기는 달라져야 한다. 따라서 既存의 設計法은 強度定數의 適用에서부터 本質적으로 相當한 誤差가 內包되어 있으므로 區域化 地盤變數(regionalized geotechnical variables)의 推定이 切實히 要求되는 실정에 있다.

그렇다면 特定 地盤狀態에서 미리 설정해 놓은 標本만을 使用하여 未知값을 推定해도 充分한 正確度를 가지게 되는지 여부 및 더 나아가 그 點들 사이에 몇 個의 追加 試錐가 필요하며, 그 때의 推定치의 信賴度는 얼마가 되는가 등의 問題를 解決할 수 있는 方法에 대한 研究가 切實히 要求된다. 지금까지 慣用되고 있는 理論으로는 確率理論(probability concept), FDM, FEM, 逆距離法(inverse distance method), 逆距離自乘法(inverse square distance method) 등이 있으나 모두가 演算子(estimator)는 오직 거리만에 依存하므로 標本點이 특정 방향에 集中되어 있는 경우나 동일 거리로 여러 방향으로 分散되어 있는 경우에 있어서도 그 結果는 오직 同一하다는 問題點을 쉽게 發見할 수 있다.

한편, 지금까지 羅列한 어떤 方法을 쓰더라도 A 點을 中心으로 하는 特定形狀을 가진 區域의 실재에 가까운 平均값을 推定하는 것은 매우 어렵고, 또한 위 方法들을 使用하여 推定한 A 點 값의 信賴度와 A 點을 中心으로 特定 面積 또는 부피를 가지고 있는 區域의 平均을 推定할 경우 그 값에 對한 信賴度를 求하는 것은 거의 不可能하다.

따라서 本 研究의 目的은 보다 正確한 變數의 推定은 물론 既知의 몇 개의 標本값을 利用한 正確한 推定에 앞서 標本抽出(sampling) 過程에서부터 發生하는 不確實性을 最大限으로 줄이기 위해 각 방향에 따라 다를 수 있는 方向性和 標本點 사이의 間隔과의 關係를 正確히 科明함으로써 방향에 따라 最大의 經濟性을 가진 標本調查間隔을 찾는다. 나아가 推定上의 誤差를 最大限으로 줄이고 上記의 모든 問題點들을 解決하기 위해 推計學的(statistical)인 理論을 基礎로 한 Kriging 法을 도입하여 最適의 線形不偏推定量(Best Linear Unbiased Estimator: BLUE)을 찾기로 한다.

解析上의 正確度の 證明과 實務에서의 適用의 便易性 比較를 위해 實際狀況에 대한 몇가지의 例를 들고 각각 算術平均 利用法과 FDM, FEM, 逆距離法, 逆距離自乘法, Kriging

法을 도입 結果들을 서로 比較檢討하였다.

2. Semi-variogram Model

2.1 Semi-variogram의 意味와 特性

無作爲 變數(random variables)인 地盤變數를 推定하기 위해 標本들을 抽出하고, 이들을 利用하여 얻은 特定の 點 또는 區域의 推定값에 影響을 미치는 要素로는 各 點들 사이의 거리와 方向을 들 수가 있다. 一般的으로 위의 두 가지 變數 中에서 거리가 더 큰 影響을 준다. 먼저 特定 方向에 對한 標本값들을 考慮해 보자. 特定 두 點 사이의 벡터의 差는 거리 h에 依存하며 差의 平均을 $m^*(h)$, h 間격을 두고 있는 두 點들 사이의 分散(variance)을 $2\gamma^*(h)$ 로 표시하고 이를 variogram이라 한다. (Matheron, 1971; Michel, David, 1977)

$$2\gamma^*(h) = \frac{1}{N} \sum [Z(x) - Z(x+h)]^2 \quad (2-1)$$

여기서, h: 計算에 考慮하고자 하는 벡터들 사이의 間隔(computation lag)

N: h 間隔으로 떨어져 있는 標本들로 이루어지는 쌍의 數

단, *는 理論的인 것이 아니라 標本값들 사이의 關係로 計算한 실험적인 값 식 2-1을 一般化시키면 다음과 같다.

$$2\gamma^*(h) = \frac{1}{v} \int_v [Z(x) - Z(x+h)]^2 dx \quad (2-2)$$

式 (2-2)에서, 2는 一般統計學에서 標準偏差(standard deviation)와 比較檢討을 위해, 즉 數學的 便利를 위해 使用한 값이며 $\gamma^*(h)$ 를 semi-variogram이라 한다. 變수들을 一定한 거리와 方向에 따라 基本式을 利用하여 Y 축은 semi-variogram, X 축은 推定에 필요한 變數, 즉 여기서는 거리 h로 놓고 plotting하면 一般的으로 이 그림은 반드시 原點을 通過하게 되고 h가 점점 커지면 semi-variogram 값도 커진다. 理想的인 경우 h가 아주 크면 두 點 사이의 Z(x) 값은 서로 獨立이 되므로 semi-variogram은 거의 一定한 값에 到達하게 된다. 이를 plotting하고 모형화(modeling)하면 주로 일반적인 경우에는 球形模型(Spherical model, Matheron model)이 된다.

그림 2-1은 理想形 semi-variogram 模型으로서 表現式은 다음과 같다.

$$\gamma(h) = C \left(\frac{3h}{2a} - \frac{1h^3}{2a^3} \right) \quad \begin{matrix} h \leq a \\ h > a \end{matrix} \quad (2-3)$$

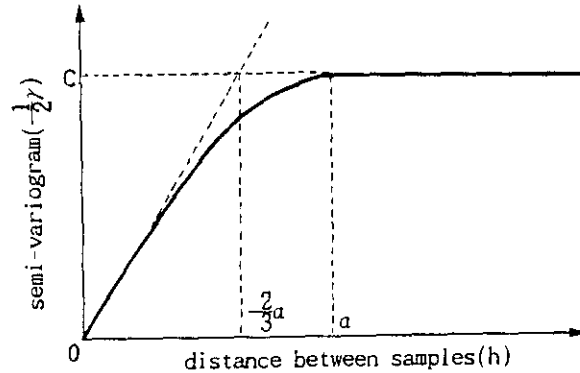


그림 2-1 理想型的 球形模型과 a, C값

여기서,

a=標本값의 影響範圍(range of influence)로서 初期의 直線部分과 後期の 收斂으로 인한 直線部分을 連結하여 交點部分의 x 座標가 $\frac{2}{3} a$ 라는 事實에서부터 구함.

C=semi-variogram의 턱(sill)으로서 後半部の 直線部分의 延長線과 y 축과 交點의 座標임.

이는 가장 一般的인 模型으로서 確實한 sill과 표본값의 影響범위인 a가 存在한다. h가 一定 값 以上이 되어 $\gamma(h)$ 가 收斂하게 되어, 즉 h가 a보다 크면 標本들 사이의 相關關係가 없다는 意味가 된다.

이 외에도 指數模型(Exponential model), 線形模型(Linear model), De Wijsian 模型, 純粹 無作為 模型(Random phenomenon model) 등이 있다.

한편 地반공학에서 實際로 關心이 있는 것은 특정 2 點 사이가 아니라 h만큼 떨어져 있는 標本값 差의 平均이다. 즉, 이 變數의 連續性은 $\gamma(h)$ 의 기울기로서 나타난다.

2.2 一般的인 semi-variogram 模型과 特徵

土質推計學(geostatistics)에서 大體로 理想的인 semi-variogram 은 球形模型을 따르지만 恒常 이 形狀을 따르는 것은 아니다. 또한 위에서 羅列한 것들과 같은 完全한 模型을 따른다고는 볼 수 없고 以外の 다른 模型이 있을 수 있다. 경우에 따라서는 一定

한 間隔 以後에는 아주 不規則한 波動現狀이 있어서 多項式的 形態로 나타나며 그 現狀이 심하면 심할수록 標本들 사이의 變異가 크다는 意味이다. 이때 畝폭 들어간 곳은 그 間隔을 두고 標本들 사이의 相關性이 크다는 意味가 된다. 마지막으로 理論模型과 實質的으로 plotting한 實測模型(experimental model)이 實際로 서로 잘 一致하는가를 比較하여 필요時 修訂을 한다. 한편, 波動現狀(parabolic behaviour)이 原點과 가까운 곳부터 始作될수록 適用에 많은 注意가 要求되고 이런 경우에는 指數模型이 더 잘 맞는다. 그러나 이 現狀이 그다지 심하지 않은 경우에는 指數模型을 導入하면 오히려 誤差가 커진다.

한편으로 模型의 初期 直線 部分을 連結하면 이는 理想形의 模型과는 달리 0이 아닌 경우 이 現狀을 덩어리 效果(nugget effect)라 하고 C_0 로 表示하며 이는 標本誤差이다 (Michel, David, 1977). 이는 標本들의 間隔이 아주 微細한 거리만큼만 떨어져도 그 標本값들의 差는 相當히 커서 變化가 심하다는 뜻이다. 즉, 이웃하는 試料들 사이에 있어서 서로의 相關關係는 아주 적다는 것을 意味한다.

한편, 一定 거리 以後에서부터 標本들 사이에 連續性을 가지기 始作한다. 여기서, 만약 sill이 存在한다면 이는 標本들 사이의 分散(variance)이다. 이는 아무리 가깝게 標本들을 取한다 해도 이 값은 없어지지 않으며 結局 그만큼 random하다는 意味이다. 일반 自然현상에 semi-variogram 模型은 식 (2-4)와 같이 여러 가지 모형의 조합으로 구성된다.

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= 0 \\ \gamma(h) &= \{C_0 + \gamma_1(h)\} + \{C_1 + \gamma_2(h)\} + \{C_2 + \gamma_3(h)\} + \dots \quad h > 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

한편, 標本數가 相當히 制限된 경우 이 標本들만을 利用한 semi-variogram의 模型의 正確도와 信賴性은 相當히 떨어지고 많은 標本들을 가지는 것이 正確도가 훨씬 커진다는 것은 當然하다. 한편 模型의 正確한 推定은 推計學적 變數推定法의 正確도와 直結되므로 最大限의 正確한 模型化 作業이 先行되어야 하므로 實測資料를 徹底히 分析·組合한 뒤 使用하여야 한다. (Matheron, 1971)

2.3 不規則한 空間座標網(grid)으로 된 경우의 semi-variogram 解析法

일반적인 경우로서 標本들이 不規則한 網(grid)으로 標本抽出된 경우의 基本式은 다음과 같다.

$$\gamma^*(h, \theta) = \frac{1}{\Delta h \Delta \theta} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{\frac{\Delta h}{2}} \int_{-\frac{\Delta \theta}{2}}^{\frac{\Delta \theta}{2}} \gamma(h+x, \theta+y) \, dx \, d\psi \quad (2-5)$$

여기서, Δh 와 $\Delta\theta$ 는 一般적으로 적을수록 좋고, 經驗에 의하면 Δh 는 平均間隔 以下이며, $\Delta\theta$ 는 45° 以下가 適當하다. 따라서 만약 이 값보다 크면 그만큼 誤差가 急激히 커진다는 것을 의미한다.

위 式에서 標本點 사이의 거리가 $h \pm \Delta h/2$ 와 角度가 $\theta \pm \Delta\theta/2$ 사이에 있는 쌍의 數를 찾는 방법은 그림 2-2에서 x_i 와 面積 $\Delta h\Delta\theta$ 사이에 있는 點들과 쌍을 이루는 semi-variogram을 求한다. (A.G. Journel and CH.J. Huijbregts, 1978, Burges. T.M., and R. Webster, 1980)

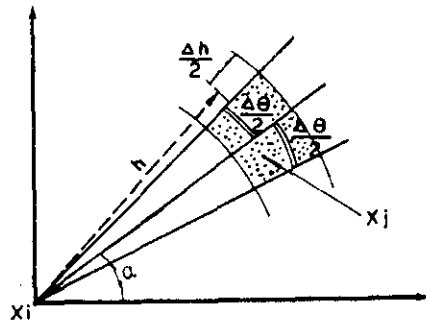


그림 2-2 不規則한 標本點으로 構成된 경우의 쌍의 數 選定法

여기서, 두 點 x_i, x_j 가 考慮하고자 하는 特定の 方向의 範圍 內에 있는지는 두 點 사이의 벡터의 內積을 求하면 되고 이는 다음과 같다.

$$S = \frac{\overrightarrow{x_i x_j}}{|x_i x_j|} \cdot \bar{u} \quad (2-6)$$

여기서, \bar{u} 는 特定の 選擇된 方向의 單位 벡터이고 S는 두 點 x_i, x_j 와 方向 θ 사이의 方向餘弦($\cos\alpha$) 값으로 α 값이 default 값인 $\Delta\theta$ 값의 折半 以內에 들어오는 쌍은 取하고 그 외의 것은 버린다. x_i, x_j 사이의 距離를 Δh 로 分類하고 semi-variogram을 求하면 다음과 같다.

$$\gamma(h, \theta) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i) - Z(x_j)]^2 \quad (2-7)$$

$$h_i = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i x_j|}{n} \quad (2-8)$$

여기서, n은 h와 θ 의 條件을 同時に 滿足하는 모든 쌍의 個數를 意味한다.

3. 未知값 推定에 Semi-variogram 適用 原理

土質推計學(geostatistics)에서 지반변수를 特定の 方法을 導入하여 推定할 경우에 發生하는 推定誤差(ε_i)에 對하여 考慮해 보자. $Z(x_i)$ 를 特定 位置의 참값이라 하고 $Z^*(x_i)$ 를 n 個의 既知點의 線形組合이라 하면 線形性에 의해 이들 사이의 관계는 다음과 같다.

$$Z(x_i) = \frac{1}{A} \int_A Z(x) dx = T \quad (3-1)$$

$$Z^*(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i Z(x_i) = T^* \quad (3-2)$$

$$\text{殘差} : \varepsilon(x) = Z(x) - m(x) \quad (3-3)$$

여기서 T^* 式의 w_i 는 最適推定값을 위한 加重值(weighting factor)를 意味한다. 不偏性條件(unbiased condition)을 滿足하고 線形性(linearity)에 따르면 다음과 같다. (Lafael L. Bras, 1985)

$$m \sum_{i=1}^n w_i = m \frac{1}{A} \int_A dx \quad (3-4)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3-5)$$

共分散 概念을 導入한 平均自乘誤差(mean square error:MSE)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= E \left[\frac{1}{A^2} \int_A \int_A Z(x_1) Z(x_2) dx_1 dx_2 \right] - 2E \left[\frac{1}{A} \int_A \sum_{i=1}^n w_i Z(x) Z(x_i) dx \right] \\ &\quad + E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Z(x_i) Z(x_j) \right] \\ &= \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \text{COV}(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 - \frac{2}{A} \int_A \sum_{i=1}^n w_i \text{COV}(x - x_i) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{COV}(x_i - x_j) \end{aligned} \quad (3-6)$$

위 式의 最小조건은 0이며, 이는 n 個의 w_i 와 Lagrange multiplier λ 를 利用한 Lagrange 乘數 理論을 導入하면 $n+1$ 個의 方程式이 되고 이 式의 解가 最適의 加重值가 된다. (Murray R. Spiegel, 1974; Delfiner, 1976; Christakos, 1984b)

$$F = \alpha^2 + 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (3-7)$$

$$= \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \text{COV}(x_1-x_2) dx_1 dx_2 - \frac{2}{A} \int_A \sum_{i=1}^n w_i \text{COV}(x-x_i) dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{COV}(x_i-x_j) + 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_i} = - \frac{2}{A} \int_A \text{COV}(x-x_i) dx + 2 \sum_{j=1}^n w_j \text{COV}(x_i-x_j) + 2\lambda = 0 \quad (3-9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0 \quad (3-10)$$

식 (3-9)를 다시 쓰면

$$\sum_{j=1}^n w_j \text{COV}(x_i-x_j) + \lambda = \frac{1}{A} \int_A \text{COV}(x-x_i) dx \quad (3-11)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \sigma_{x_i x_j} + \lambda = \sigma_{v x_i} \quad (3-12)$$

無偏向이고 2次 定常性이라는 基本條件을 滿足할 경우, h가 거의 無限大가 되면 $\gamma(h)$ 는 一定한 값으로 收斂하게 되고 逆으로 共分散은 0으로 收斂한다. (Christakos, G. 1984a). 따라서, 共分散은 $\gamma(\infty) - \bar{\tau}$ 가 되고 $\bar{\tau}$ 는 두 개의 區域 사이의 平均 semi-variogram이므로 다음과 같아진다. (Michel, David, 1977)

$$\sum_{i=1}^n w_i [\gamma(\infty) - \bar{\tau}_{ij}] + \lambda = \gamma(\infty) - \bar{\tau}_{iv} \quad (3-13)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{\tau}_{ij} + \lambda = \bar{\tau}_{iv} \quad (\text{여기서 } \lambda = -\lambda) \quad (3-14)$$

이를 行列 形態로 쓰면 다음과 같다

$$[\Sigma][W]=[D] \quad (3-15)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [W] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} \gamma_{vx1} \\ \gamma_{vx2} \\ \vdots \\ \gamma_{vxn} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

이 式들의 最終 解로서 semi-variogram을 利用한 最適의 w_i 들이 얻어진다. 따라서, 最終의 mean square error는 다음과 같다.

$$\sigma_k^2 = - \frac{1}{A^2} \int_A \int_A \gamma(x_1-x_2) dx_1 dx_2 + \frac{1}{A} \int_A \sum_{i=1}^n w_i \gamma(x-x_i) dx + \lambda \quad (3-17)$$

이를 離散化하면 結局 Kriging variance(σ_k^2)는 다음과 같다.

$$\sigma_k^2 = - \bar{\gamma}(A, A) + \sum_{i=1}^n w_i \bar{\gamma}(S_i, A) + \lambda \quad (3-18)$$

위 式들에서 $\bar{\gamma}(S_i, A)$, $\bar{\gamma}(S_i, S_j)$, $\bar{\gamma}(A, A)$ 는 補助函數(auxiliary function)라 하고 다음과 같은 意味를 가진다.

$\bar{\gamma}(S_i, A)$ =標本들 內의 個個의 各 點들과 未知區域 A 內의 모든 點들 사이의
平均 semi-variogram

$\bar{\gamma}(A, A)$ =未知區域 A內에서 組合이 可能한 모든 點과 點들 사이의
平均 semi-variogram

$\bar{\gamma}(S_i, S_i)$ =全體標本들(sample set) 內에서 組合이 可能한 各 點과 點들 사이의
平均 semi-variogram으로 만약 標本數가 한 個이면 0이다.

4. Extension Variance의 推定法과 補助函數

4.1 Extension Variance

地盤變數에 對한 構造的인 模型과 連續性에 對한 推計學的 基本概念에서 벗어나 點 推定問題와 이를 擴大解析하여 特定 區域의 平均값 推定問題를 考慮하기로 한다. 가장 一般의인 點推定法은 加重平均法(weighted average method)으로 逆距離法이고 加重值(weighting factor)의 크기가 모두 同一하다고 假定하는 경우가 算術平均法이다.

土質推計學(geostatistics)에서 算術平均을 extension estimator라 하고, 위와 같이 算術平均을 利用한 分散을 extension variance라 한다. 이 extension variance를 보다 一般化된 加重平均에 의한 estimation variance와 區別하기 爲하여 一般의인 推定法에 쓰는 아래 添字 ϵ 이 아닌 e 로 표기한다.

그림 1-1 (a)와 같은 標本을 分析 結果, 이 地盤은 等方性이고 semi-variogram은 球形模型(spherical model)이며 $a=100m$, $C=700$, nugget effect(C_0)=100이었다. 여기서, 가장 簡單한 推定方法으로 가장 가까운 標本點 ①番의 값을 選擇하여 이 값을 未知點 값으로 할 경우의 演算誤差(estimation error: ϵ)는 $T-T^*$ 이고 T^* 는 $Z(x_1)$ 이다.

여기서, 전혀 또는 部分的으로나마 偏差가 없다는 것은 不可能하다. 그러나 수 많은 標本點을 利用하여 ϵ 의 平均을 求하면 이 값은 0일 것이다. 따라서, 推定值의 正確度

는 ε 의 分散形態로 나타나고 ε 의 平均이 거의 0에 가까우면 推定의 正確度는 큰 것이고 逆으로 그 값의 分布範圍가 넓으면 正確性이 적을 것이다.

이 正確度를 나타내는 가장 簡單한 方法은 一般統計學의 標準偏差(standard deviation)이다. 推定誤差의 標準偏差는 그 推定值의 正確度를 나타낸다. 아무리 많은 演算을 해도 거기에 따른 演算誤差값을 모르는 限 그 誤差의 標準偏差(standard deviation)는 알 수 없다. 그러나 演算誤差分散의 理論的인 形態를 보면 推定誤差의 分散은 다음과 같다

$$\sigma^2 = (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \text{의 平均} = (T - T^*) \text{의 平均} = \varepsilon^2 \text{의 平均, 단 } \bar{\varepsilon} = 0 \text{인 경우} = 2\gamma(h) \quad (4-1)$$

만약, 그림 1-1 (a)에서 A點의 값을 400으로 假定하면 $\gamma(h) = \gamma(21.54) = 321.76$ 이므로 σ^2 는 643.52가 된다. 즉, 推定子(estimator)의 標準誤差(standard errors)는 25.4라는 것을 알 수 있다. 같은 방법으로 모든 점들에 대해서 구하고 이들에 對한 確率分布를 가장 一般的인 正規分布로 假定하고 여기에 中心極限定理를 利用하여 T^* 에 對한 95%의 信賴度를 求하면 結局 350.216-449.784가 된다.

한편으로, 보다 實質的 狀況은 點推定이 아닌 特定區域의 平均值推定에 關한 問題이다. 그림 1-1 (a)와 같은 특정구역의 平均值 推定問題를 考慮해 보자.

點推定法에서와 마찬가지로 無偏向(no local trend)이라면 平均誤差는 0이며, 演算誤差의 分散(estimation variance)은 variogram이라는 事實은 同一하다. 그러나 위와는 조금 달리 同一한 크기의 標本點들 사이의 variogram이 아니라 推定區域의 平均值 사이의 variogram이 되어야 한다.

各 標本點과 推定區域 內의 모든 點 사이의 semi-variogram의 값은 각각 서로 다르다. 이들을 모두 求한 後 이들의 平均을 $\bar{\gamma}(S_i, A)$ 라 하고 이는 點推定에서의 $\gamma(h)$ 를 利用하여 구할 수 있다.

여기서, 實際로 필요로 하는 것은 推定區域 內의 平均值와 그 標本點들 사이의 semi-variogram으로 區域 內의 각각의 모든 點과 각 標本點 사이의 semi-variogram 값이 아니다.

$2\bar{\gamma}(S_i, A)$ 는 그 區域 內의 各 點들을 推定하려고 할 때 얻어지는 誤差에 對한 分散일 것이다. 따라서, $2\bar{\gamma}(S_i, A)$ 에서 그 區域 內의 모든 點들의 값의 變異(variation)를 考慮해 주어야 한다. 이 값을 또 하나의 補助函數(auxiliary function: $\bar{\gamma}$ 函數)인 $F(l, b)$ 로 표시한다.

여기서, 모든 補助函數의 基本意味는 3章에 取扱되어 있다. $\bar{\gamma}(A, A)$ 는 推定區域 內에서 組合이 可能한 모든 點과 點들 사이의 쌍을 이루는 semi-variogram의 平均이다.

따라서, 標本 ①番의 값을 利用하여 區域 內의 平均値를 求할 경우 推定誤差의 分散은 다음과 같다.

$$\sigma_e^2 = 2\bar{\gamma}(S_i, A) - \bar{\gamma}(A, A) \quad (4-2)$$

그러나 實際로 推定에 利用 可能한 標本의 數는 一般적으로 한 個 以上이다. 따라서, 算定過程에서 全 標本들을 使用하기로 하고 全標本들의 算術平均値를 T^* 로 하면 $T=T^*$ 가 된다. 이 경우 $\bar{\gamma}(S_i, A)$ 는 "sample set" S_i 內의 各點들과 推定하고자 하는 區域 A 內의 各點들 사이의 平均 semi-variogram이어야 한다.

한편, $\bar{\gamma}(A, A)$ 는 마찬가지로 區域 內의 各點들 사이의 平均 semi-variogram이다. 그러나 여기에 또 하나의 分散을 考慮해 주어야 한다. 즉, T 는 實質的인 값이 아니라 全體標本들의 算術平均値이므로, 즉 $\bar{\gamma}(S_i, A)$ 내에서 各點의 標本值들에 對한 分散을 考慮하여 $\bar{\gamma}(S_i, S_i)$ 를 全體의 分散에서부터 減해 주어야 한다. 이 項은 sample set 內의 各點과 點들 사이의 平均 semi-variogram 값이라는 意味다.

따라서, T 값을 全 標本值들의 算術平均을 利用할 경우 推定子의 分散, 즉 extension variance(σ_e^2)는 다음과 같다

$$\sigma_e^2 = 2\bar{\gamma}(S_i, A) - \bar{\gamma}(S_i, S_i) - \bar{\gamma}(A, A) \quad (4-3)$$

結論적으로 區域推定에 算術平均을 利用한 推定子(estimator)의 信賴度는 다음과 같은 세 가지 要素에 影響을 받는다.

- ① 求하고자 하는 區域과 sample set 內의 各 標本들 사이의 相互關係
- ② 모든 標本들 사이의 相互關係
- ③ 推定하고자 하는 區域 內의 各點들 사이의 相互關係

이들을 모두 補助函數(auxiliary function)로 하고 數式으로 表現하면 結局 最終的인 信賴度 推定 問題는 이 값들의 解析에 關한 問題로 歸着된다.

4.2 補助函數(γ 函數)의 意味와 適用法

이제 부터 實質적으로 解析에 필요한 補助函數(γ 函數)에 對하여 考慮하기로 한다. 土質推計學에서 semi-variogram의 平均値인 γ 函數는 모든 問題의 解析에 있어서 全般적으로 使用되고 이는 매우 重要한 函數이다. 正確한 推定이 可能한 境遇는 semi-variogram 模型이 2章에서 敘述한 理想的인 模型들을 잘 따르는 경우로서 一般시키면 다음과 같다.

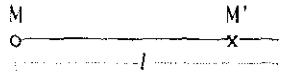
$$\bar{\gamma}(v, v') = \frac{1}{v^2} \int_v \int_{v'} \gamma(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \quad (4-4)$$

여기서, $\bar{\gamma}(v, v')$ 의 意味는 特定の 體積 v 와 v' 사이의 semi-variogram의 平均値를 意味하며 이를 Cauchy-Gauss Method를 써서 數值解析的으로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\gamma}(v, v') = \frac{1}{nn'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} \gamma(x_i - x_j') dx \quad (4-5)$$

여기서, 1·2次元 問題만을 考慮하기로 하면 다음과 같다. (Royle, A. G., Hosgit, E., 1974; Mitchel David, 1977)

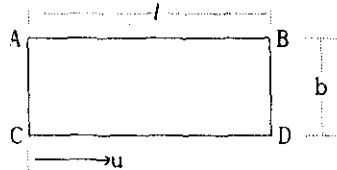
1次元 補助函數



$$\bar{\gamma}(M, l) = \chi(l) = \frac{1}{l^2} \int_0^l \gamma(M) dM \quad (4-6)$$

$$\bar{\gamma}(A, A) = \bar{\gamma}(l, l) = F(l) = \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l \gamma(M-M') dM dM' \quad (4-7)$$

2次元 補助函數



$$\gamma(l; b) = \bar{\gamma}(AC, BD) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (b-u) \gamma(\sqrt{l-u}) du \quad (4-8)$$

$$\chi(l; b) = \bar{\gamma}(AC, ABCD) = \frac{1}{l} \int_0^l \gamma(u; b) du \quad (4-9)$$

$$F(l; b) = \bar{\gamma}(ABCD, ABCD) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-u) \gamma(u; b) du \quad (4-10)$$

$$\begin{aligned} H(l, b) &= \bar{\gamma}(A, ABCD) = \bar{\gamma}(AC, AB) \\ &= \frac{1}{2l} \frac{\partial}{\partial l} l^2 \chi(l; b) = \frac{1}{4Ll} \frac{\partial^2}{\partial L \partial l} L^2 l^2 F(l; b) \end{aligned} \quad (4-11)$$

4.2.1 1次元 補助函數의 適用法

그림 4-1은 1次元的인 構造를 가지고 있는 問題의 解析을 위해 實現可能한 모든 標本

點의 位置와 構造들을 羅列한 것이다.

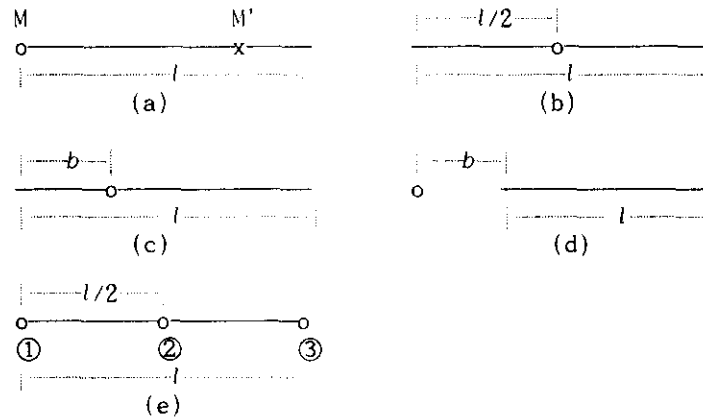


그림 4-1 標本點들의 位置에 따른 1次元 構造의 種類

이와 같은 構造들에 대해 σ_e^2 를 求하고 이들의 誤差를 比較·檢討해 보면 다음과 같다. 어떠한 경우에도 推定구역 즉, 그 線의 길이 l 과 semi-variogram 模型의 種類, 模型의 傾斜(P)는 반드시 알아야 한다. 단, 標本들의 構造의인 性質에 따라 semi-variogram 模型은 바뀔 수 있고 이에 따른 補助函數도 바뀐다. 여기서, 特定の 標本點의 位置에 따른 각각의 σ_e^2 의 크기를 比較해 보자.

表 4-1 1次元 構造의 標本點의 個數와 位置에 따른 σ_e^2 의 比較

(단, 線形模型이고 $p=1, l=10, b=3$ 인 경우)

標本點의 位置와 點數	σ_e^2
兩端의 한 點	6.6
中 央 點	1.6
2等分線 內의 한 點	2.47
線 밖의 한 點	12.6
3等分의 3點	0.55

表 4-1을 보면 標本點이 3等分 3點인 경우의 σ_e^2 가 0.55로서 가장 적고 標本點이 線밖의 b 거리에 있는 경우가 12.6으로 가장 크다. 結局, b 값의 크기가 클수록 σ_e^2 값은 크게 된다는 것을 알 수 있고, 한 點만을 取할 경우 線의 中央點을 택하는 것이 가장 合理的이라는 事實이 證明되었다.

4.2.2 2次元 補助函數의 適用法

2次元 問題는 1次元 問題의 補助函數를 一般化시킨 것이다. 이 때, 몇 個의 경우에는 1次元과는 다른 補助函數를 갖는다.

그림 4-2에서 $\gamma(l, b)$ 는 $\gamma(l)$ 의 2次元 構造로서 이는 길이 b 만큼 擴張시킨 $\gamma(l)$ 이다. 이는 거리가 l 만큼 떨어져 있고 길이가 b 인 線上에 있는 모든 點과 平行으로 놓여 있는 길이가 같은 b 인 線上에 놓여 있는 모든 點들 사이의 平均 semi-variogram이라는 意味가 된다.

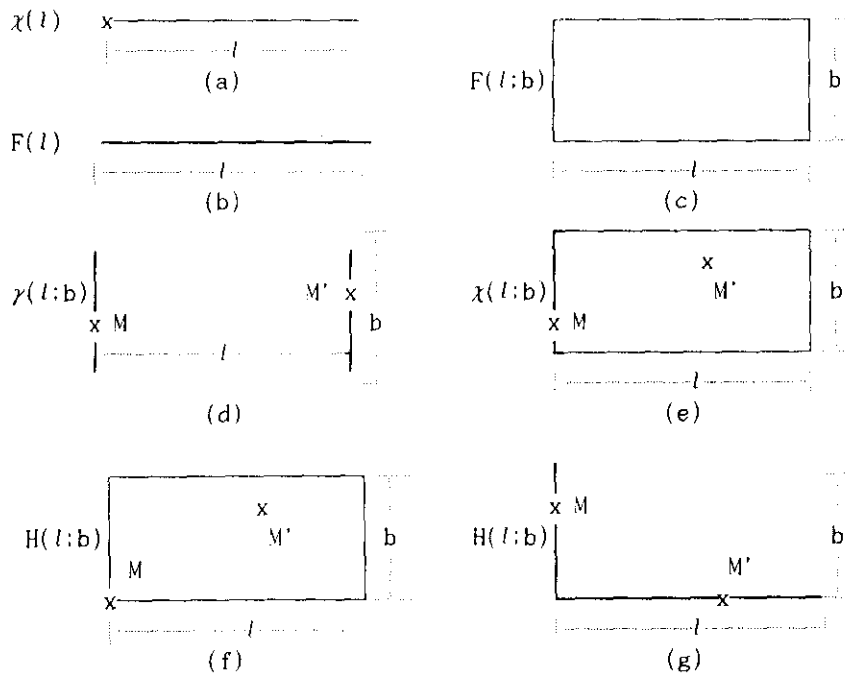


그림 4-2 標本點의 位置와 種類에 따른 2次元 構造

$\chi(l)$ 의 一般化가 $\chi(l, b)$ 이고 이는 길이 b 와 인접한 面積이 $l \times b$ 인 區域 사이의 平均 semi-variogram이다. 函數 $F(l, b)$ 는 四角形 패널에 對한 $\overline{\gamma(A, A)}$ 의 項으로 앞에서 取扱하였다. 여기서, 1次元에는 없는 完全히 새로운 函數 $H(l, b)$ 를 導入하면, 이는 面積이 $l \times b$ 로 이루어진 區域과 그 區域의 모서리에 있는 點과의 平均 semi-variogram으로서, 즉 直角으로 놓여 있는 길이 l 과 b 사이의 平均 semi-variogram이다.

5. Kriging 法에 依한 區域推定法

한편, 실측치와 편차가 없는 不偏推定值(unbiased estimator)를 위한 加重值를 찾는 것은 아주 어렵다. 그러나 수많은 標本點들을 利用하여 演算을 하고 이 演算誤差의 平均이 0 이라면 이는 正確한 解일 것이다.

標本空間 內에 n 個의 標本들이 있고 推定區域의 크기를 A 로 하여 線形不偏推定子(Best Linear Unbiased Estimator)의 分散推定式을 一般化시키면 다음과 같다.

$$\sigma^2 = 2 \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}(S_i, A) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \bar{r}(S_i, S_j) - \bar{r}(A, A) \quad (5-1)$$

여기서 마지막 項 $\bar{r}(A, A)$ 는 推定式의 形態를 바꾸거나 推定區域의 크기를 바꾸지 않는 한 同一하다. 그러나 標本值들 사이의 variation을 나타내는 $\bar{r}(S_i, S_j)$ 項은 算術平均과는 달리 各 標本들마다 서로 다른 加重值를 適用시켜야 한다. 따라서, 各 標本에 따라 각기 다른 加重值를 適用하고 加重值 w_i 와 w_j 를 同時에 考慮해 준 $w_i w_j \bar{r}(S_i, S_j)$ 를 求한 後 合하면 된다.

그림 4-1 (e)에서 線形模型을 적용할 경우 T^* 의 σ_e^2 은 $0.05556pl$ 이었다. 여기서, Simpson 公式에서 適用하는 加重值로서 $(1/6, 4/6, 1/6)$ 을 쓸 경우 이는 算術平均을 사용한 경우와 同一하고, 같은 方法으로 加重值를 각각 $(1/8, 3/4, 1/8)$ 로 한 경우의 σ_e^2 은 $0.07629pl$ 이다. 이는 Simpson 式과 算術平均을 사용한 경우의 σ_e^2 보다 오차가 훨씬 크다는 것을 알 수 있다. 그러므로 推計學的인 解析法을 導入하되 一律的인 加重值를 導入하는 것이 아니라 標本들의 特性을 分析하여 그 特性에 따른 最適의 加重值를 찾는 것이 正確한 推定을 위한 先行條件이라는 事實을 알 수 있다.

그림 1-1 (a)의 경우 逆距離法을 適用한 A점의 推定值는 372.8이고 σ_e^2 推定에 필요한 각 항들을 살펴보면, 먼저 $\bar{r}(S_i, A)$ 들은 σ_e^2 를 求할 때와 方法은 같고 각각 356.72, 572.36, 456.91, 446.78, 696.08이다. $2 \sum w_i \bar{r}(S_i, A)$ 는 461.969로서 σ_e^2 에서의 505.82와는 달리 減少되었다. $\sum \sum w_i w_j \bar{r}(S_i, S_j)$ 項은 σ_e^2 에서는 504.6659였으나 여기서는 441.3167이다. $\bar{r}(A, A)$ 는 343.9907로 두 가지 경우가 모두 同一한 값을 가진다. 따라서, 逆距離法을 利用한 推定值의 分散은 138.651이고 이는 11.7736의 標準偏差를 意味한다. 그러므로 그림 1-1 (a)와 같은 構造로 이루어진 5 個의 標本들의 semi-variogram 模型으로부터 逆距離法을 적용하면 區域 A 의 平均은 372.79가 되고 標準偏差가 11.7750이다.

한편, 이 error들이 正規分布를 하고 있다면 95%의 信賴區間은 349.2527-396.3526이

된다. 이는 σ_e^2 에서 平均이 366, 標準偏差가 12.7634, 信賴區間이 340.4732-391.5268일 때와 比較하면 逆距離를 利用하는 것이 算術平均을 利用한 加重值들보다 合理的이고 正確하다고 할 수 있다.

狀況을 조금 바꾸어 그림 1-1 (b)와 같이 標本 番號 ③番을 點 A의 위쪽에 있는 것이 아니라 正確히 그 거리만큼 아래쪽으로 移動시키고, 標本값은 同一한 경우를 考慮해 보자.

逆距離法은 區域의 中心과 標本들 사이의 純粹한 거리만에 依存하기 때문에 標本番號 ③番의 逆距離에 의한 加重值는 變하지 않는다. 그러나 標準偏差는 標本들이 한 쪽으로 偏重되어 있으므로 바뀌어야 하는 것이 當然하다. 따라서, 分析結果 α 는 急激히 커져서 14.2692가 되고 그만큼 正確度가 떨어진다는 事實을 알 수 있다.

한편, 推定值의 誤差分散式에서 단지 標本空間 內部的 標本들의 相互關係인 $\tau(S_i, S_j)$ 項의 값만이 變했고 다른 項은 앞에서와 同一하다. 즉, $\tau(S_i, S_j)$ 項의 값의 減少는 標本空間 內에 있는 全體的인 推定情報의 減少를 意味한다. 따라서, 그림 1-1 (b)와 같은 構造의 標本調査가 그림 1-1 (a)의 경우보다 非合理的임을 알 수 있다. 이는 結局 標本 ③番의 位置 變化는 標本空間의 情報의 減少를 意味하기 때문이다.

만약, 지금까지 言及한 加重值들과는 다른 새로운 加重值를 適用시켜 推定值의 分散을 計算한 結果 推定值의 分散값이 적게 나온다면 이 것이 보다 더 正確한 加重值라는 結論을 얻을 수 있다.

한편 無偏向의 推定子(estimator)는 數없이 많을 수 있으며 가장 正確한 解라는 意味는 無偏向의 推定子(estimator)에 고려할 최적의 加重值를 찾고, 이를 利用한 最小의 α 를 求하는 方法을 찾는 것이다. 따라서 보다 最適의 加重值推定法과 이를 利用한 推定值의 分散을 求하는 方法을 綜合的으로 考慮하기로 한다.

推定值의 誤差分散의 크기 變化에 미치는 影響要素는 세가지로서 먼저 標本들의 幾何學的인 位置 및 推定하고자 하는 未知區域의 크기와 標本들이 나타내는 semi-variogram 模型의 形態와 각 標本들에 附與되는 加重值들이다. 따라서 주어진 標本들이 構造가 一定할지라도 加重值의 크기가 變하면 推定值의 分散값은 달라진다. 結局 分散은 加重值들에 따른 單純한 函數로서 推定值의 分散을 最小化하기 위해 다음과 같은 條件을 滿足하면 된다.

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial w_i} = 0 \quad i=1, 2, 3, 4, \dots, n \quad (5-2)$$

즉, 위 식은 n 個의 標本數가 存在하면 n 個의 未知의 加重值가 있고 또한 그 個數만큼의 方程式이 成立된다. 이 加重值들은 推定值의 分散이 最小가 되는 推定子

(estimator)를 만들 것이다. 그러나 이 加重值들은 반드시 唯一한 한 組라는 意味는 아니며 여러 가지의 組를 이룰 수도 있다. 그러나 最適線形不偏推定子를 얻기 위해서는 $n+1$ 個의 方程式을 滿足해야 한다. 그러나 未知數의 個數는 n 個이므로 이 問題를 補完하기 위하여 또 다른 한 個의 未知數를 Lagrange 乘數(Lagrangian Multiplier)理論을 導入한 system 方程式은 다음과 같다.

$$\begin{array}{l}
 w_1 \bar{\gamma}(S_1, S_1) + w_2 \bar{\gamma}(S_1, S_2) + w_3 \bar{\gamma}(S_1, S_3) + \dots + w_n \bar{\gamma}(S_1, S_n) + \lambda = \bar{\gamma}(S_1, A) \\
 w_1 \bar{\gamma}(S_2, S_1) + w_2 \bar{\gamma}(S_2, S_2) + w_3 \bar{\gamma}(S_2, S_3) + \dots + w_n \bar{\gamma}(S_2, S_n) + \lambda = \bar{\gamma}(S_2, A) \\
 w_1 \bar{\gamma}(S_3, S_1) + w_2 \bar{\gamma}(S_3, S_2) + w_3 \bar{\gamma}(S_3, S_3) + \dots + w_n \bar{\gamma}(S_3, S_n) + \lambda = \bar{\gamma}(S_3, A) \\
 \vdots \\
 w_1 \bar{\gamma}(S_n, S_1) + w_2 \bar{\gamma}(S_n, S_2) + w_3 \bar{\gamma}(S_n, S_3) + \dots + w_n \bar{\gamma}(S_n, S_n) + \lambda = \bar{\gamma}(S_n, A) \\
 w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = 1
 \end{array} \quad (5-3)$$

이 方程式의 解로 最適의 線形不偏推定子(Best Linear Unbiased Estimator: BLUE)를 위한 加重值들을 求할 수 있다. 이 連續方程式을 一般的으로 Kriging system이라 하고 이 式들로부터 얻어지는 推定子(estimator)를 Kriging 推定子라 한다. 한편, Kriging 法에 의한 推定子의 分散(Kriging variance)은 式 (3-18)을 이용해서 구한다.

여기서, 그림 4-1 (e)의 경우 線形模型으로 看做하고 Kriging 法으로 풀면 BLUE는 $(1/4, 1/2, 1/4)$ 의 加重值를 가지고 $\sigma_k^2 = 1/6$ 이 된다. 앞에서 算術平均의 加重值를 利用한 경우의 σ_e^2 는 $21/9$ 이었고, Simpson 公式과 $(1/8, 3/4, 1/8)$ 을 使用한 경우에는 $71/24$ 이었다. 또한, Kriging法을 導入하여 推定한 σ_k^2 가 算術平均을 利用한 σ_e^2 보다 25% 程度 向上되었고, $(1/8, 3/4, 1/8)$ 또는 $(1/6, 4/6, 1/6)$ 의 加重值를 使用한 경우보다는 약 2倍 向上되었음을 알 수 있다.

이 問題에서 semi-variogram은 線形模型을 利用했으므로 이 模型의 特性上 恒常 加重值들은 標本空間인 길이와 無關하지만, σ_k^2 는 길이와 semi-variogram 模型의 傾斜 p 에 完全히 比例한다. 그러나 球形模型인 경우에는 거리와 密接한 關係가 있다.

6. 實際問題에 適用과 比較檢討

보다 一般的이고 現實的인 狀況인 그림 1-1의 경우 Kriging system 식은 全部 6 個가 된다. 따라서, $\bar{\gamma}(S_i, S_j)$ 項, $\bar{\gamma}(S_i, A)$ 項, $\bar{\gamma}(A, A)$ 項은 각각 補助函數 $\gamma(l, b)$, $H(l, b)$, $F(l, b)$ 로 부터 구하고 그 의미는 3장에서 說明했다. 이를 complete pivot Gauss-Jordan 法(Gerald, Curtis, 1984)을 利用하여 풀면 다음과 같다.

$$w_1 = 0.3460, w_2 = 0.0233, w_3 = 0.2693, w_4 = 0.2340, w_5 = 0.1273, \lambda = 19.754 \\
 T^* = 374.735, \sigma_k = 11.345$$

이를 앞장의 다른 방법들로 해석한 결과와 比較해 보면 相當한 差異가 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 自體的으로 標本들 사이의 相互關係를 充分히 考慮해서 推定하는 Kriging 解의 結果로 얻은 標本 ②番의 加重値는 0.0233으로 거의 0에 가깝고 이는 推定區域의 中心에서부터 相當히 멀리 떨어져 있는 標本 ⑤番의 0.1273에 比해 18.3%밖에 되지 않는다. 한편, 標本 ②番은 標本 ①番에 比하여 相當히 적은 影響을 미치고 나아가 標本 ③番과 標本 ④番보다도 더 작은 影響을 미친다. 이러한 現狀들이 더욱 確然히 나타나는 경우로서 그림 1-1 (b)와 같이 標本點 ③番을 A點을 中心으로 아래쪽으로 座標移動시킨 경우를 보면 그림 1-1 (a)의 경우의 system 式과의 差異點은 오직 左邊의 1 行 3 列과 3 行 1 列에만 있고 右邊의 項들은 각각의 標本點들과 推定區域 사이의 相互關係이므로 變하지 않는다. 같은 方法으로 이를 풀면 다음과 같다.

$$w_1=0.4402, w_2=0.0893, w_3=0.0617, w_4=0.2241, w_5=0.1848, \lambda=61.71$$

$$T^* = 359.6221, \sigma_k = 13.5197$$

이들은 이제 推定區域의 平均값에 標本 ③番이 미치는 影響이 標本 ②番이 미치는 影響보다 더 적어졌다. 加重値들의 變化는 標本 ①番이 가장 크게 增加되었고 위쪽에 있는 標本 ①番, ②番, ⑤番의 影響이 상당히 커졌다.

推定値의 正確度는 前者의 경우가 더 큰 것으로 나타나고 가장 큰 變化는 推定値의 크기가 15.1129만큼 減少했다는 事實이다.

한편으로, 그림 1-1 (a)와 同一構造의 標本點들을 가지고 있으나 추정하고자 하는 區域을 90° 回轉한 경우를 比較해 보자. 이 構造의 Kriging system의 左邊의 項 즉, $\tau(S_i, A)$ 의 項은 그림 1-1 (a)의 경우와 同一하나 右邊의 項들은 377.648, 599.744, 430.151, 414.997, 720.330로 변하고 加重値와 推定結果는 다음과 같이 바뀐다.

$$w_1=0.2767, w_2=0.0063, w_3=0.3273, w_4=0.3093, w_5=0.093, \lambda=21.28$$

$$T^* = 371.9276, \sigma_k = 10.67045$$

이 結果를 그림 1-1 (a)의 경우와 比較分析해 보면, 標本 ②番의 影響은 標本 ①番에 의해 完全히 가려지고 標本 ⑤番의 影響이 다소 減少하게 된다. 여기서 가장 變化가 甚한 것은 標本 ①番으로 앞에서 다른 두가지의 경우와 比較해 볼 때 이제는 그다지 큰 重要性을 가지지 못하게 되었다는 事實을 알 수 있다.

한편으로 A點의 點推定을 해보기로 하면, 만약 A點을 純粹 點으로 看做한다면 $\tau(A, A)$ 의 項의 크기는 C_0 가 될 것이다. 그러나 地盤工學에서 使用하는 一般的인 標本들의 크기는 點이 아니라 어느 程度의 크기를 가지고 있다. 따라서, 標本の 크기를 10cm x 10cm 程度로 하는 것이 合理的이나 본 研究에서는 보다 正確한 比較檢討를 目

的으로 하기 때문에 推定點인 경우는 가로, 세로를 각각 1cm로 해서 비교하기로 한다. 여러 가지 方法과 推定區域의 크기에 따른 分析結果는 表 6-1, 表 6-2, 表 6-3과 같다.

表 6-1 點推定の 比較分析 結果

(推定點의 座標: X=70m, Y=30m, 단 區域의 X, Y 크기=1cmx1cm)

解析方法	平均	標準偏差	信賴區間(2σ)
算術平均法	366.000	19.87050	325.259-405.741
逆距離法	372.802	17.68358	337.436-408.717
逆距離自乘法	377.903	16.97695	333.941-411.859
F. E. M.	374.610	--	--
Kriging法	391.541	13.83598	363.869-419.213

表 6-2 區域推定の 比較分析 結果

(區域의 中央點 座標: X=70m, Y=30m, 단 區域의 X, Y 크기=60mx30m)

解析方法	平均	標準偏差	信賴區間(2σ)
算術平均法	366.000	12.76341	340.472-391.527
逆距離法	372.803	11.77500	349.253-396.353
逆距離自乘法	377.894	12.11302	353.669-402.121
F. E. M.	--	--	--
Kriging法	374.735	11.34872	352.037-397.432

表 6-3 區域推定の 比較分析 結果

(區域의 中央點 座標: X=70m, Y=30m, 단 區域의 X, Y 크기=30mx60m)

解析方法	平均	標準偏差	信賴區間(2σ)
算術平均法	366.000	12.96578	340.069- 391.932
逆距離法	372.803	11.73214	349.338- 396.267
逆距離自乘法	377.895	12.07599	353.743- 402.047
F. E. M.	--	--	--
Kriging法	371.928	10.67045	350.5867-393.268

위의 結果를 比較分析해 보면 모든 경우에 대해 正確度는 Kriging 法이 가장 높이며 點推定인 경우는 逆距離自乘法이 逆距離法보다 精確한 結果가 나오고 區域推定인 경우에는 逆距離法이 逆距離自乘法보다 더 精確한 結果가 나왔다. 따라서 逆距離法과 逆距離自乘法의 正確度는 標本들의 種類와 特性에 따라 바뀔 수도 있다는 事實을 알 수 있다. 한편 FEM은 순수 點推定法이며 區域推定은 할 수 없으며 또한 信賴度推定도 不可能하다. 또한, 모든 結果가 全部 區域推定인 경우의 信賴度가 點推定에 비해 훨씬 좋고 같은 크기라도 推定區域의 가로축의 방향에 따라 다른 結果가 나타난다는 事實을

알 수 있다. 따라서, 地盤變數를 이용하는 土工構造物의 設計 및 施工에 있어서 點推定이 아닌 區域推定의 結果를 導入하는 것이 보다 合理的이라는 사실이 證明되었다. 가장 信賴度가 떨어지는 解析法은 어떠한 경우라도 算術平均을 이용한 方法이다.

最終적으로 위 事實을 證明하고 또한 問題點을 제기하기 위해 例로서 地下鐵 7號線의 特定地域 地盤調査 報告書를 利用하여 地盤의 風化岩 두께를 추정해 보기로 한다. 이 湧화암 아래에 파쇄대가 존재하기 때문에 이를 추정하여 그 사면의 안정검토를 위해서 이다. 試錐點의 座標 및 風化岩層의 두께는 表 6-4에 있다.

表 6-4 調査支店の 座標 및 風化岩의 두께

番號	X	Y	두께	番號	X	Y	두께
1	24.0	0.0	11.30	10	52.0	52.0	1.00
2	80.0	0.0	10.70	11	80.0	52.0	7.50
3	0.0	8.0	8.10	12	104.0	52.0	10.40
4	52.0	8.0	0.60	13	0.0	86.0	7.90
5	104.0	8.0	11.20	14	24.0	86.0	8.30
6	24.0	16.0	1.10	15	52.0	86.0	1.10
7	80.0	16.0	11.70	16	80.0	86.0	10.50
8	0.0	52.0	0.90	17	104.0	86.0	10.00
9	24.0	52.0	1.10				

이 地盤을 살펴보면 아주 不規則하여 주어진 표본만으로는 거의 추정이 不可能할 程度로 偏差가 甚한 地盤 狀態라는 것을 쉽게 알 수 있다. 이를 利用하여 一般統計學法, FEM, 逆距離法, 逆距離自乘法, Kriging 法 등에 의한 比較分析을 하였다. Kriging 法을 위한 semi-variogram은 表 6-5. 模型化 過程은 각각 그림 6-1과 그림 6-2에 있다.

表 6-5 semi-variogram의 計算 結果表

SEMI-VARIOGRAM (IRREGULLAR GRID 2 DIMENSIONS)									
AVERAGE = 6.48235 VARIANCE = .17967E+02 NUMBER OF DATA = 17									
DIRECTION TOLERANCE= 8. DEG. , LAG= 24.00, DISTANCE TOLERANCE=14									
	DIRECTION 1			DIRECTION 2			DIRECTION 3		
	0 DEGREES			45.0 DEGREES			90.0 DEGREES		
LAG	NC	DISTA.	1/2 VAR.	NC	DISTA.	1/2 VAR.	NC	DISTA.	1/2 VAR.
1	8	26.00	11.95750	2	33.94	15.25250	7	152.00	80.00500
2	9	53.78	24.16611	2	36.88	22.56250	4	200.00	34.82000
3	7	77.83	19.41286	4	76.49	23.47125	6	420.00	56.40501
4	4	98.17	25.78500	3	99.05	28.81000	2	172.00	.04000
5	1	116.00	4.80500	2	114.59	2.34250	0	.00	.00000
6	0	.00	.00000	0	.00	.00000	0	.00	.00000
7	0	.00	.00000	0	.00	.00000	0	.00	.00000
8	0	.00	.00000	0	.00	.00000	0	.00	.00000

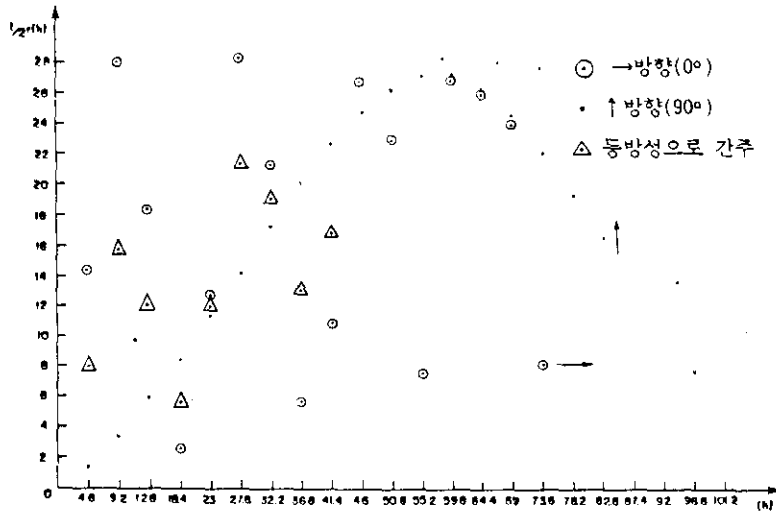


그림 6-1 각 방향에 따른 semi-variogram 模型

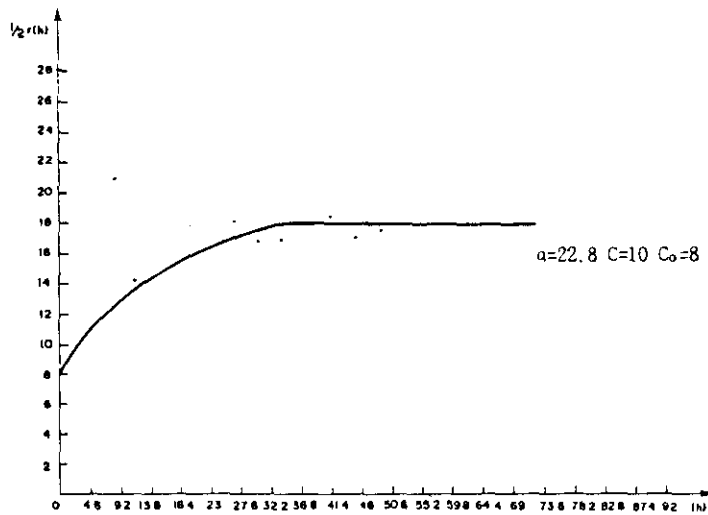


그림 6-2 最終적으로 模型化한 semi-variogram

이를 이용한 a, C, C_0 는 각각 22.8, 10, 8를 얻었다. 위 標本들을 이용한 分析結果는 表 6-6 및 表 6-7과 같다. 이 地盤은 X 방향으로는 相當한 連續性을 가지고 있으나 Y 방향으로는 너무나 連續性이 적어서 semi-variogram 模型上에서 거의 收斂이 되지 않는 경우로서 a, C, C_0 값의 추정에 상당한 誤差가 있다.

結論적으로 Y 방향으로는 試錐間隔을 좁혀서 더 많은 試錐를 해야 하고, X 방향의 試錐間隔은 더 줄일 수도 있는 地盤條件으로써 너무 間隔이 좁아 非經濟的인 試錐間隔

이라는 事實을 알 수 있다. 다시 말해 이 地盤에 대한 土工構造物의 設計 및 施工을 위해서는 먼저 X 또는 Y 방향으로 概略的인 試錐間隔을 정하고 그 間隔에 따라 標本을 취한 後 semi-variogram 理論으로 分析 한 後에 그 結果를 이용하여 다시 試錐間隔을 調整하는 것이 合理的이다. 한편, 의도적으로 推定點 및 區域의 위치는 주변의 값들과는 대단히 變異가 커서 추정값이 實測값과 잘 맞지 않을 것으로 생각되는 No.11 點을 選擇하였다. 이 地點의 實測値는 7.5m인 경우로서 各 方法에 따른 分析結果는 다음과 같다.

表 6-6 點推定の 比較分析 結果

(推定點의 座標: X=80m, Y=62m, 단 區域의 X, Y 크기=10cmx10cm)

解析方法	平均	標準偏差	信賴區間(2σ)
算術平均法	6.619	3.3570	-9.533 - 13.333
逆距離法	6.887	3.3891	0.108 - 13.665
逆距離自乘法	7.279	3.4963	0.287 - 14.272
F.E.M	8.030	--	--
Kriging 法	6.776	3.3339	0.109 - 13.444

表 6-7 區域推定の 比較分析 結果

(區域의 中央點 座標: X=80m, Y=62m, 단 區域의 X, Y 크기=16mx8m)

解析方法	平均	標準偏差	信賴區間(2σ)
算術平均法	7.102	2.6650	1.289 - 11.949
逆距離法	7.329	2.7072	1.472 - 12.301
逆距離自乘法	7.279	2.8426	1.594 - 12.964
F.E.M	--	--	--
Kriging 法	6.624	2.6645	1.291 - 11.949

위의 比較分析表들을 살펴보면 추정구역의 크기 및 종류에 따른 결과 모든 경우 逆距離法보다는 逆距離自乘法이 더 잘 맞으며 FEM의 경우에는 순수 점추정으로서 신뢰구간 추정이 불가능하며 구역추정 또한 불가능하다. 그러므로 이 標本들만을 이용하여 設計 및 施工을 할 경우에는 많은 問題가 發生할 餘地가 있다. 특히, Y 방향의 地盤崩壞나 또한 土留壁의 崩壞事故가 일어날 可能性이 相當히 높으리라는 豫測이 可能하다.

이와 같은 地盤에서 既存의 標本들만을 이용하여 여러 방법으로 比較檢討한 結果 그 래도 가장 實測値와 잘 一致하며 信賴度가 큰 것은 Kriging 法이다. 그러나 信賴度추정에서 system 解의 前過程인 a, C, Co 값들의 추정에 包含된 誤差로 인하여 추정치와 실측치 사이에 多小 큰 誤差가 發生하였다. 이 문제를 해결하기 위해서는 위의 semi-v

ariogram의 이론에 입각하여 방향에 따라 시추간격을 조절해 주면 해결된다.

본 研究에서는 推計學적인 方法을 導入했으므로 既存의 다른 理論들과는 달리 信賴度까지 求할 수 있다는 長點을 가진다.

또한, 地盤工學에서 實際로 필요로 하는 것은 點이 아니라 區域이라는 事實을 감안하면 Kriging 法이 가장 合理的인 方法이라는 事實을 알 수 있다.

한편, 이 結果를 이용하면 基礎設計 等の 土工構造物의 設計 및 施工에 있어서 基礎의 支持力計算에 強度定數를 單一值로 使用할 것이 아니라 위에서 使用한 Kriging 法을 導入하여 基礎의 形狀과 위치 및 크기에 따라 각각 다른 값을 使用하는 것이 基礎의 信賴性과 經濟性에 크게 도움이 될 것으로 생각된다.

7. 結 論

地盤變數의 최적추정을 위해 여러 가지의 理論을 導入하여 比較分析한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 사면해석 등의 지반변수 추정을 위한 標本抽出過程에서 概略的인 間隔으로 표본추출을 한 후, 이들을 semi-variogram 理論으로 分析하여, 그 結果를 이용하여 標本の 抽出間隔을 방향에 따라 調整해가면서 調查해나가는 것이 보다 合理的이고 經濟的이다.

2. 最適의 標本抽出間隔은 一般的으로 방향에 따라 각각 다르고 이 값은 semi-variogram 모형화에 의해 正確도와 經濟性을 同時에 滿足시키는 試錐間隔을 正確히 決定할 수 있다. 한편 이 間隔보다 먼 間隔으로 얻은 標本值들로 未知의 값을 추정할 경우 正確도와 信賴度는 急激히 떨어진다.

3. 精確한 semi-variogram 模型만 求할 수 있고, system方程式을 正確하게만 푼다면 恒常 Kriging system의 解는 存在하고, 따라서 最適線形不偏推定子(Best Linear Unbiased Estimator:BLUE)를 항상 求할 수 있다.

4. 無作爲의 不規則한 위치와 방향에 따른 標本들을 이용하여 各其 다른 위치 또는 形狀의 區域平均값을 추정할 경우의 解析法의 差異를 比較해 보면, Kriging 法을 除外한 다른 方法들은 全 過程을 再計算해야 하지만 本 研究에서 이 方法은 system 方程式에서 오른쪽 項 한 가지만 바뀌게되므로 解析이 대단히 簡便하다. 逆으로 말하면 特定 區域의 값을 추정하기 위해 一定數의 標本을 抽出하고 필요에 의해 試錐孔 數를 더 늘이는 경우에도 system 式 全體를 再構成 및 計算할 필요가 없다는 長點을 가진다.

5. 國內에서 一般的으로 많이 使用하고 있는 一般統計學法, FEM, 逆距離法, 逆距離自乘法

과 比較分析 結果, 逆距離法과 逆距離自乘法은 標本들의 조건에 따라 추정값의 정확도가 바뀔 수도 있으며, Kriging 法이 가장 信賴性이 크고 또한 다른 方法들과는 달리 推定子의 正確度 즉 信賴度를 算出할 수 있다.

6. 본 연구 결과를 도입하면 地盤工學에 있어서 基礎設計나 土留壁 等 土工構造物 設計를 위하여 地盤變數를 이용할 경우, Kriging 法을 이용한 區域化된 變數 (regionalized variables)를 추정하여 構造物의 形狀과 크기 및 長短軸의 方向이 考慮된 보다 정확하고 합리적인 平均값을 이용하여 設計할 수 있게 된다.

본 연구는 인덕전문대학 학술연구비 지원으로
수행되었으며 이에 감사 드린다.

參 考 文 獻

- Burges, T. M., and, R. Webster, 1980b, "Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping of Soil Properties, III, Changing Drift and Universal Kriging", Soil Science of Society of America, 31, pp. 505-524.
- Christakos, G. 1984a, "On the Problem of Permissible Covariance and Variogram Models", Water Resource research, 20(2); pp. 251-265.
- Christakos, G. 1984b, "Modeling and Estimation of Multidimension Signals", Electrical Eng. Dept., Democritus Univ. of Thrace, Xanthi
- Delfiner, P., 1976, "Linear Estimation of Nonstationary Spatial Phenomena", Advance Geostatics in Mining Industry. NATO Ser. D, Reidel, Boston
- Gerald, Curtis, 1984, "Applied numerical analysis", Addison-Wesley Company, Inc, pp. 80-99.
- Guarasci, M., David, M. and Huijbregts, c., 1976, "Advanced Geostatistics in the Mining Industry, d. reidel, dordrecht, holland, 149p.
- Journel, A. G and Huijbregts, CH. J., 1978, "Mining Geostatistics", Academic Press, p. 600.
- Lafael L. Bras, 1985, "Random Function and Hydrology", Addison-Wesley Publishing Company, Inc, pp. 359-396.
- Matheron, G., 1971, "The Intrinsic Random Functions and There Application",

- Advan. Appl. Probability, 5, pp. 439-468.
- Michel David, 1977, "Geostatistical Ore Reserve Estimation", Elsevier Scientific Publishing Company, pp. 241-243.
- Murray R. Spiegel, 1974, "Advanced Calculus", McGraw-Hill, pp. 164, 172-174.
- Royle, A. G., 1971, "A Practical Introduction to Geostatistics", course notes of the university of Leeds, Dept of Mining and Mineral sciences, Leeds
- Royle, A. G., Hosgit, E., 1974, "Local Estimation Sand and Gravel Reserves by Geostatistical Methods", Trans. Inst. Min. Metal., v. 83, no 809, pp. a53-a69.