

유한요소법을 이용한 콘크리트구조물내의 온도분포해석 기법에 관한 연구

(A study on the thermal analysis technique in concrete structures by F.E.M)

오 병 환*, 이 명 규**

ABSTRACT

F.E.M formulation is carried out in order to determine temperature distribution in the concrete structure. According to this formulation an F.E.M. code is developed, which is capable of simulating time varying boundary conditions and nonlinear thermal properties.

요 약

여러가지 열원을 받는 콘크리트구조물의 온도해석을 위해서 열전달방정식을 변분하여 유한요소 정식화를 수행하였으며, 이 결과를 이용하여 온도해석용 전산코드를 개발하였다. 전산코드에서는 경계조건이 요소마다 다르게 변화현상을 모사할 수 있게 하였으며, 시간 및 온도에 따른 열특성의 변화를 고려할 수 있는 비선형해석을 수행할 수 있는 절차를 도입하였다.

1. 서론

구조물의 열응력 해석을 위해서는 예상되는 모든 상태에서 구조물 내의 온도 분포를 정확히 아는 것이 필요하다. 이러한 필요성에 의해 각 상태에서의 열원을 정확히 기술하고 이에 대한 구조물 내의 온도 분포를 얻기 위한 열전달 해석이 필요하게 된다. 계(system)내에 온도 기울기(temperature gradient)가 있으면 열흐름이 존재하므로 이에 따른 계내의 온도 분포를 구하는 것이 열전달 해석의 중요한 과제이다.

열전도 지배 방정식은 편미분의 형태의 식으로 주어진다. 이러한 편미분 방정식을 풀기 위한 수치해법으로는 유한차분법(finite difference method)과 유한요소법(finite element method)이 있는데 유한차분법은 주어진 편미분 방정식의 해를 구하는 방법으로 경계조건이 달라짐에 따라 차분식이 달라지므로 문제마다 새로운 차분식을 구성해야 한다. 이에 비해 유한요소법은 문제의 영역을 적당한 크기의 유한요소로 나누고 각 절점의 값으로부터 요소 내의 임의의 위치에서의 값을 알 수 있는 형상함수를 정의해 편미분 방정식을 유한 개의 절점의 값에대한 대수 방정식으로 만들며 경계조건은 대수 방정식을 구성하는 과정에서 고려해 준다. 이 대수 방정식의 해를 구해 임의의 위치에서 편미분 방정식의 해를 구할 수 있다. 유한요소법은 경계조건을 쉽게 다룰 수 있고, 프로그램이 문제의 경계조건과 무관하므로

다양한 형태의 문제를 고려해 줄 수 있으므로 널리 쓰인다. 특히 구조 해석용 프로그램과 혼용할 수 있어 열응력 해석과 같은 혼합형의 문제를 해결하는 데 있어서 많은 장점을 지니고있어 본 연구의 온도 분포 해석에는 유한요소법을 이용하였다.

열전달 해석에 있어서 열전달은 전도, 대류 및 복사의 세 가지 형태로 이루어진다고 생각하는 것이 보통이다. 그러나 한 매질의 온도 분포는 이 3가지 형식의 열전달의 복합적 효과에 의해 지배되며, 이러한 열전달의 일반적형태를 살펴보면 다음과 같다.

1.1 전도(Conduction)

전도는 정지하고 있는 유체의 경우에는 분자의 운동 또는 직접 충돌에 의하여, 금속의 경우에는 전자의 이동에 의하여 고온구역에서 저온구역으로 에너지 교환이 일어나는 형식의 열전달이다.

Fourier법칙에 의하여 x방향으로의 열류는

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{Kcal/h 또는 W} \quad (1)$$

또는

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{Kcal/h} \cdot \text{m}^2 \text{ 또는 W/m}^2 \quad (2)$$

로 주어진다. 여기에서 Q_x 는 면적 A 를 통한 양의 x방향으로의 열전달률이며, q_x 는 양의 x방향으로의 열플럭스(heat flux)라고 한다. 비례상수 k 를 물질의 열전도율(열전도 계수)이라 한다.

* 정회원 서울대학교 토목공학과 교수

** 정회원 서울대학교 토목공학과 박사과정

1.2 대류

온도가 T_w 인 고체 표면과 그 위로 흐르는 평균 온도가 T_f 인 유체 사이의 열전달을 대류라한다. 계산을 간단히 하기 위하여 열전달 계수 h 를 다음과 같이 정의한다.

$$q = h(T_f - T_w) \quad (3)$$

여기서, q 는 고체 표면에서의 열플럭스이다. 열플럭스의 단위가 $\text{Kcal/h} \cdot \text{m}^2$ (또는 W/m^2)이고 온도가 $^{\circ}\text{C}$ 단위이고 열전달 계수 h 는 $\text{Kcal/h} \cdot \text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$ 또는 $\text{W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$ 의 단위를 갖는다.

1.3 복사

일반적으로 면적이 A 이고 절대온도가 T_1 인 물체가 절대온도가 T_2 인 주위 물체에 의하여 둘러싸여 있을 때의 복사에너지는 다음식으로 표시할 수 있다.

$$Q = FA\sigma(T_1^4 - T_2^4) \text{ Kcal/h (또는 W)} \quad (4)$$

여기서, σ 는 Stefan-Boltzmann상수이며 $4.8806 \times 10^{-8} \text{ Kcal/h} \cdot \text{m}^2$ 또는 $5.6697 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$ 이고, 계수 F 는 1보다 작은 숫자이며 표면의 기하학적 배열과 물체가 완전방사체 및 완전흡수체가 아닌 것에 대한 수정을 나타낸다. 온도 T_1 과 T_2 의 차이가 T_1 에 비하여 충분히 작을 때에는 식(4)를 다음과 같이 선형화시킨다.

$$Q = FA\sigma(T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) \\ \cong FA\sigma 4T_1^3(T_1 - T_2) \quad (5)$$

또는

$$q \cong Q/A = 4 \cdot F \cdot \sigma \cdot T_1^3 \cdot (T_1 - T_2) \quad (6)$$

이 경우 복사 열전달 계수 h_r 를 다음과 같이 정의한다.

$$h_r = 4 \cdot F \cdot \sigma \cdot T_1^3 \quad (7)$$

따라서 식(6)은

$$q = h_r(T_1 - T_2) \quad (8)$$

로 쓸 수 있으며 이 식은 대류 열전달에 대한 식(3)과 비슷하다. 복사 열플럭스에 대한 근사식인(8)은 $|T_1 - T_2|/T_1 \ll 1$ 인 경우에만 적용할 수 있다.

2 열전도 지배 방정식

2.1 열플럭스의 성분

고체 매질 내의 임의의 시간 t 에서의 온도 분포를 $T(x, y, z, t)$ 로 나타낼 때 온도차에 의해 열플럭스가 발생해 열전달이 이루어지게 된다. x, y, z 방향의 열플럭스의 성분을 각각 q_x, q_y, q_z 라고 할 때 Fourier의 법칙에 따른 각각의 성분은 그림 1을 참조해 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (9)$$

$$q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (10)$$

$$q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11)$$

2.2 열전도 지배 방정식

앞의 열플럭스 관계식에서 만약 x 와 y, z 방향의 온도 기울기를 안다면 그 방향의 열전달을 구할 수 있으며, 그림 2와 같은 매질 내의 미소체적 요소 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 에 대해 에너지 균형식을 세워 보면

$$\left[\begin{array}{c} \text{요소} \Delta x, \Delta y, \Delta z \text{로} \\ \text{들어오는 열전도} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{요소} \Delta x, \Delta y, \Delta z \text{에서} \\ \text{발생되는 에너지} \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{c} \text{요소} \Delta x, \Delta y, \Delta z \text{의 내부} \\ \text{에너지의 증가} \end{array} \right] \quad (12)$$

이 되는데 각 항을 고려하여 다음과 같은 열전달 방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

를 얻는다. 여기서

$T = T(x, y, z, t)$, $Q = Q(x, y, z, t)$ 이다. 식(13)을 열전도의 편미분 방정식이라고 한다.

3. 유한요소법에 의한 온도 분포 해석

3.1 유한요소의 정식화

3차원 공간에서 비균질(nonhomogeneous)재료의 열전도에 대한 Fourier법칙을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$q_i = -k_i T, i \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

여기서 i 의 값 1, 2, 3은 각각 x 방향, y 방향, z 방향을 나타내며 $(\cdot)_i$ 는 i 방향으로의 편미분을 나타낸다. k_i 는 i 방향으로의 열전도 계수를 나타낸다. 열전도 방정식(13)을 간결하게 표시하면

$$(k_i T, i)_i + Q = \rho c \dot{T} \quad (15)$$

로 나타낼 수 있다. Q 는 단위 부피당 열발생을 표시하며, ρ 는 매질의 밀도, c 는 매질의 비열을 표시한다. 또한 온도 T 는 $T(x_i, t)$ 로 주어지게 된다.

과도열해석을 위한 경계조건과 초기조건은 그림 3으로 나타낼 수 있으며 과도 온도 해석의 경계조건을 정리해 보면 다음과 같다.

(1) Dirichlet condition : 경계에서 종속변수의 값이 미리 주어진 경우
 $T = T_A^*(x_i, t)$, $x_i \in \Gamma_A$ (16)

(2) Neuman condition: 경계에서 종속변수의 도함수 값이 미리 주어진 경우로 식으로 표시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-k T_{,i} n_i = q^* \quad (17)$$

(3) Cauchy condition : 경계에서 종속변수와 그것의 도함수가 미리 어떤 관계를 가질 때로 (2)의 경계조건을 포함해 식으로 나타내면

$$kT_{,i} n_i + q + \alpha_c(T-T_a) = 0, \quad x_i \in \Gamma_B \quad (18)$$

로 표시할 수 있다. 여기서 n_i 는 면에 수직인 방향으로의 단위 벡터이고 q 는 단위 면적당의 열플럭스이며 T_a 는 주변 유체(대기)의 온도, α_c 는 대류 계수이다. 단열면에 대해서는 $q = \alpha_c = 0$ 으로 한다.

과도 온도 해석에서의 경계조건은 그림 3에서 보듯이 (1), (2), (3)이나 이것들의 조합으로 나타내어진다. 또한 과도 해석을 위해 초기조건이 필요하므로 이것을 식으로 표시하면

$$T_0 = T_0^*(x_i, 0), \quad x_i \in V \quad (19)$$

로 표시할 수 있다. 이러한 열전도 방정식은 다음과 같은 가정하에서 유한요소 정식화를 수행한다.

- ① 물체 내의 매질입자는 정지되어 있다.
- ② 열전도 상태는 응력 상태와 분리해서 해석할 수 있다.
- ③ 상의 변화가 없고 잠열효과의 재료성질은 온도에 따라 변한다.

3.1.1 공간영역에서의 유한요소 정식화

유한요소의 기본개념으로부터 어떤 요소 내의 임의의 위치 x_i 에서의 온도는 시간이 t 일 때 다음 관계로부터 구할 수 있다.

$$T(x_i, t) = \sum_{j=1}^P N_j(x_i) T_j(t) = NT \quad (20)$$

이 식에서 P 는 요소당 절점의 수이고, N_j 는 x_i 값에 따른 요소의 형상함수이며 $T_j(t)$ 는 시간 t 에서 j 번째 절점의 온도이다.

열전도 지배 방정식(15)에 변분과 공간상의 이산화 과정을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{m=1}^K \int_{V(m)} N_i N_j \rho c \dot{T}_j dV(m) + \sum_{m=1}^K \int_{V(m)} (KN_{,i} N_{,j}) dV(m)$$

$$+ \sum_{m=1}^K \int_{\Gamma_B(m)} \alpha_e N_j T_j d\Gamma_B(m)$$

$$= \sum_{m=1}^K \int_{V(m)} Q N_i N_j dV(m) - \sum_{m=1}^K \int_{\Gamma_B(m)} N_i (-q + \alpha_e T_a) d\Gamma_B(m) \quad (21)$$

여기서, K 는 전 영역에서 나누어진 요소의 갯수이다. 위의 식을 행렬을 사용해 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (22)$$

이 식에서 $[C]$ 를 열용량 행렬 (heat capacity matrix)라 하고 $[K]$ 는 열전도 행렬(thermal conductivity matrix)이며 $\{F\}$ 는 열하중 벡터로 다음과 같이 정의된다.

$$F_i = \sum_{m=1}^K \int_{V(m)} Q N_i N_j dV(m) - \sum_{m=1}^K \int_{\Gamma_B(m)} N_i (-q + \alpha_e T_a) d\Gamma_B(m) \quad (23)$$

3.1.2 시간영역에서의 차분화

본 연구에서는 시간영역에서의 해를 구하기 위하여 Two time level recurrence scheme 방법을 사용하였다. 이 방법은 열전도 방정식의 시간 단계에 따른 적분(step-by-step integration) 방법으로 시간 t_n 으로부터 t_{n+1} 까지 Δt 시간 간격동안 온도가 선형으로 변한다고 가정하면

$$\{T\}_{n+1} = \frac{\{T\}_{n+a} - \{T\}_n}{\alpha \Delta t}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad n \in (0, 1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

가 성립하고 이 식에서

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (25)$$

이다.

시간 t_{n+a} 에서 열전도 방정식은

$$[C]_{n+a}\{\dot{T}\}_{n+a} + [K]_{n+a}\{T\}_{n+a} = \{F\}_{n+a} \quad (26)$$

으로 쓸 수 있고 여기에 시간에 대한 미분항대신 차분식을 대입하면 다음과 같다.

$$[C]_{n+a} \frac{\{T\}_{n+a} - \{T\}_n}{\alpha \Delta t} + [K]_{n+a}\{T\}_{n+a} = \{F\}_{n+a} \quad (27)$$

이 식을 정리하면

$$\begin{aligned} & ([C]_{n+a} \frac{1}{\alpha \Delta t} + [K]_{n+a})\{T\}_{n+a} \\ & = \{F\}_{n+a} + [C]_{n+a} \frac{1}{\alpha \Delta t}\{T\}_n \end{aligned} \quad (28)$$

또는

$$[\hat{K}]_{n+a}\{T\}_{n+a} = \{\hat{F}\}_{n+a} \quad (29)$$

으로 쓸 수 있다. 이 식에서 $[\hat{K}]_{n+a}$ 와 $\{\hat{F}\}_{n+a}$ 는

$$\{K\}_{n+\alpha} = [K]_{n+\alpha} + [C]_{n+\alpha} (1/\alpha \Delta t) \quad (30)$$

$$\{F\}_{n+\alpha} = \{F\}_{n+\alpha} + [C]_{n+\alpha} (1/\alpha \Delta t) \quad (31)$$

이며 $\{K\}_{n+\alpha}$, $[C]_{n+\alpha}$, $\{F\}_{n+\alpha}$ 는 시간

$$t_{n+\alpha} = t_n + \alpha \Delta t \quad (32)$$

에서 계산한 값들이다. 이 값들은 비선형 문제에서는 $\{T\}_{n+\alpha}$ 의 함수로 주어지기도 한다.

식(29)를 풀어 $\{T\}_{n+\alpha}$ 를 구하면 시간 $n+1$ 에서 온도는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\{T\}_{n+1} = (1/\alpha)\{T\}_{n+\alpha} + (1-1/\alpha)\{T\}_n \quad (33)$$

3.2 비선형 과도 온도 해석

유한요소법을 이용한 열전도 방정식의 비선형성은 다음과 같은 요인에 의해 발생하며 본 연구에서는 이러한 비선형성을 고려하기 위해 비선형 열전도 방정식의 수치적 해를 구하기 위한 절차를 도입하였다. 일반적으로 열전도 현상에서 차분화된 열전도 방정식(discretized heat conduction equation)의 비선형성은

(1) 열전도도가 온도에 따라 변하는 경우

$$k=k(r, t)$$

(2) 비열이 온도에 따라 변하는 경우

$$C=C(r, t)$$

(3) 열전달 계수(heat transfer coefficient)

가 온도에 따라 변하는 경우

$$H=H(r, t)$$

에 의해서 생기며 본연구에서는 이러한 요인들에 의한 비선형성을 고려하기 위해 컴퓨터 코드에서 비선형 상수 b_i 들을 다음과 같이 정의한다.

$$b_i = f_1(T_{av}) + f_2(t) \quad (34)$$

이식에서 b_i 는 시간과 온도의 함수로 주어지며 t 는 시간을 나타내며 T_{av} 는 요소내의 평균온도이다.

4. 해석에

4.1 과도온도해석

무한평면 경계의 구석에서 일정한 온도를 받는 그림 4와 같은 경우에 대해서 고려한다. 경계조건은 그림 4에서와 같이 두번 AB와 BC는 일정한 온도 $\theta_s = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ 를 받으며 무한평면내의 초기온도는 $\theta_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ 로 한다. 재료의 열전도 계수와 비열은 일정하다고 가정한다. 이 평면의 유한요소모델은 그림 5와 같다. 그림 6은 시간에 따라서 대각선 방향으로의 온도분포의 변화를 도시하였다. 결과에서 보는 바와 같이 수치해석치는 해석적인 해와 거의 일치함을 알 수 있다.

4.2 콘크리트 구조물의 온도해석

그림 7과 같은 단면을 가지는 축대칭 콘크리트 구조물이 1번절점과 21번절점을 연결하는 면에서 그림 8과 같은 대류경계조건을 받을 때 시간에

따른 요소의 평균온도는 그림 9와 같다. 그림 10은 온도가 변하는 외기와 인접한 1번절점에서의 온도 이력이다. 해석에 따르면 외기는 1hr에서 최고온도를 보였으나, 이에 인접한 1번 절점에서는 이보다는 늦은 3hr 경과후 최고치를 보였다.

5. 결론

본 연구에서는 콘크리트구조물내의 온도분포를 결정하기위해 열전달 방정식의 정식화를 통하여 유한요소코드를 개발하였다. 개발된 유한요소코드는 시간에 따라변하는 경계조건과 온도와 시간에 따라 변하는 열특성을 고려할 수 있게 하였다. 본 연구의 결과는 매스콘크리트 타설후의 수화열발생에 따른 구조물의 온도분포해석과 교량 구조물의 시공에 단계에 따른 단면내의 온도분포 해석, 원자로건물의 사고와 같은 고온의 열원을 받는 콘크리트구조물의 온도해석에 적용될 수 있다.

참고문헌

1. Damjanic, F., and Owen, D.R.J., "Practical Considerations for Thermal Transient Finite Element Analysis using Isoparametric Elements," Nuclear Engineering and Design, Vol.69, 1982, pp.109-126
2. Owen, D.R.J., and Damjanic, F., "Reduced Numerical Integration in Thermal Transient Finite Element Analysis," Computer & Structures, Vol.17, 1983, pp.261-276
3. Carslaw, H. S., and Jager, JournalC., Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford, 1959
4. Orivuori, S., "Efficient Method for Solution of Nonlinear Heat Conduction Problems," International Journal of Numerical Method in Engineering, Vol.14, 1979, pp.1461-1476
5. 최 인규, 조 성환, 노 승탁, 열전달, 보성문화사, 서울, 1981
6. Yu, J.R. and Hsu, T.R., "Analysis of Heat Conduction in Solids by Space-Time Finite Element Method," International Journal of Numerical Method in Engineering, Vol.21, 1985, pp.2001-2012
7. Wilson, G.L., Rydin, R.A., and Orivuori, S., "A Comparison of Two Efficient Nonlinear Heat Conduction Methodologies using a Two-Dimensional Time-dependent Benchmark

Problem," Nuclear Technology, Vol.82, July 1983, pp.94-105

8. Reddy, M.N., An Introduction to the Finite Element Method, McGraw- Hill, New York, 1984

9. Dhatt, G., and Touzot, G., The Finite Element Method Displayed, John Wiley and Sons, New York, 1984

10. Bathe, K.J., and Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976

11. Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982

12. Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1977

13. 한국전력공사, 원자로 건물 구조해석기술에 관한 연구, KRC-90H-J01 Vol. 4, 1992

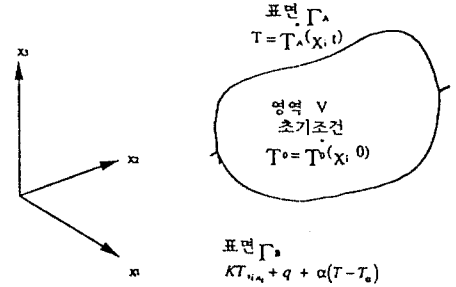


그림 3. 과도온도해석 문제에서의 경계조건과 초기조건

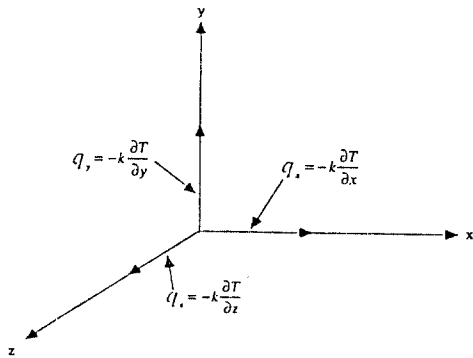


그림 1. 열플럭스의 성분

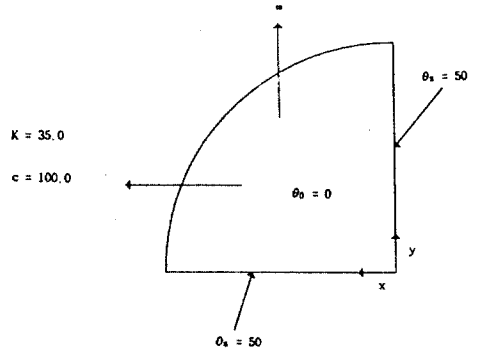


그림 4. 무한평면의 열전도

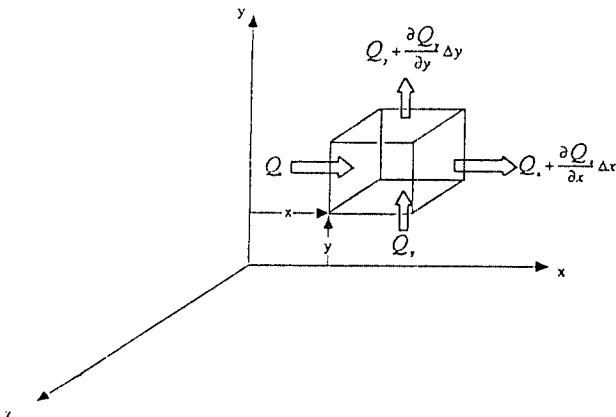


그림 2. 미소체적에서의 열출입

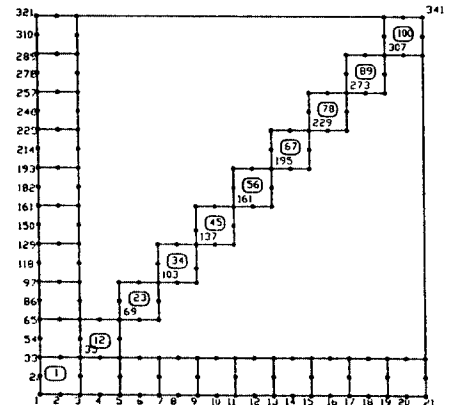


그림 5. 무한평면의 열전도 유한요소모델

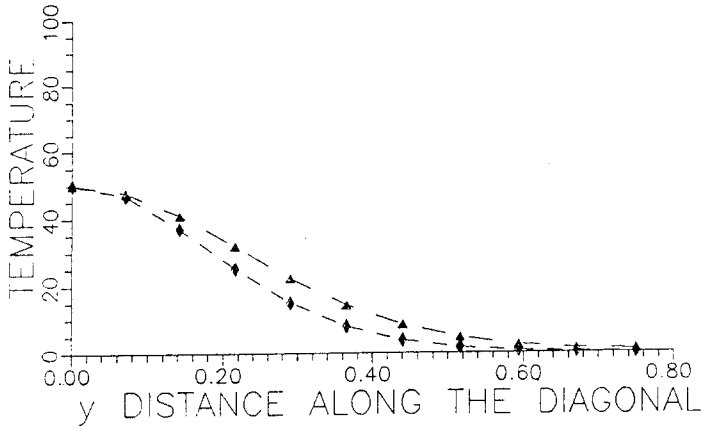


그림 6. 대각선 방향으로의 시간에 따른 온도변화

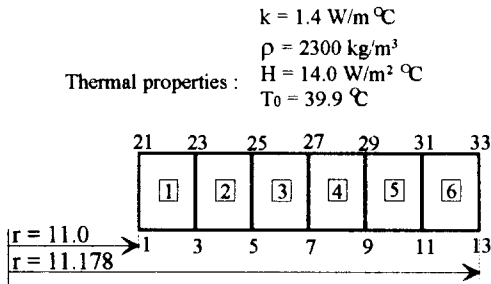


그림 7. 축대칭구조물의 단면 형상 및 열 특성

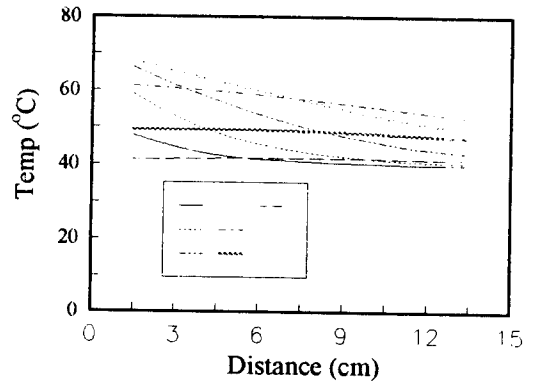


그림 9. 시간에 따른 요소평균온도의 변화

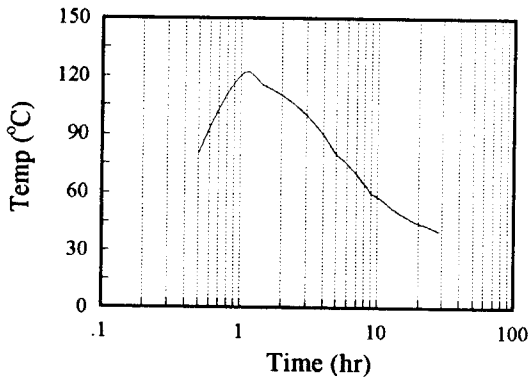


그림 8. 주변 대기의 온도이력

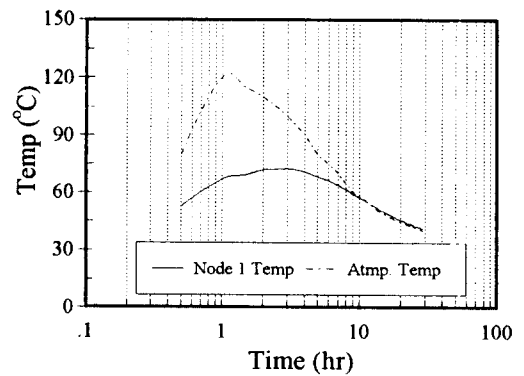


그림 10. 시간에 따른 1번절점의 온도이력