

# 탄성, 손상 및 소성을 고려한 콘크리트의 구성관계

Constitutive Relations of Concrete Including Elasticity, Damage, and Plasticity

변근주\*, 이기성\*\*, 김종우\*\*\*, 이주영\*\*\*  
K.J. Byun, K.S. Lee, J.W. Kim, J.Y. Lee

## ABSTRACT

This paper focuses on the development of the tangent modulus to describe the nonlinearity of concrete based on the continuum damage mechanics. This tangent modulus includes the effects of elasticity, damage and plasticity of concrete.

할 수 있다.

### 1. 서론

콘크리트의 비선형성 거동은 미세균열들의 생성, 전파와 결합에 의한 손상과 그리고 소성에 의해 이루어진다. 이 중에서 손상과정을 나타내기 위해 손상변수(damage variable)를 이용하는 방법을 연속체 손상역학이라 한다.<sup>[1]</sup>

손상변수를 사용하는 연속체 손상역학(continuum damage mechanics)은 1958년 Kachanov 가 일축인장하중을 받는 금속의 크리프 해석에 처음 적용하였으며 이후 금속뿐만 아니라 암반, 콘크리트 등 여러가지 재료의 거동을 구명하는데 이용되어 왔다.<sup>[2,3,4]</sup>

본 논문에서는 연속체 손상역학이론을 통하여 탄성과 손상 그리고 소성을 고려한 재료의 접선계수를 유도하고 이를 콘크리트에의 적용에 하였다.

### 2. 연속체 손상역학

손상이란 열역학적 하중이 작용하여 일련의 비가역적인 물리적 균열과정을 거쳐 발생하는 재료특성들의 영구적인 변화의 집합<sup>[7]</sup>, 또는 내적이거나 외적변형에 의해 재료의 점착력이 회복될 수 없는 상태에 이르는 것<sup>[5]</sup>으로 정의

\* 연세대학교 토목공학과 교수

\*\* 한국전력기술(주) 토목구조부 선임기술원

\*\*\* 연세대학교 대학원 토목공학과 석사과정

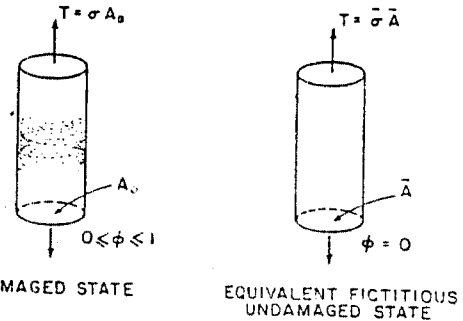


그림 1 유효저항면적과 유효응력

그림 1과 같이 어떤 재료의 한 단면을 살펴보면 초기에는 결함이 없는 단면적  $A_0$  를 가지고 있으나 외부로부터의 자극에 의하여 단면의 한 부분이 파괴된다면 파괴된 단면적을  $A$  라 할 때 이 단면이 하중에 저항하는 유효 단면적은  $A_0 - A$  이 될 것이다. 만일 균열이나 공극이 모든 방향으로 동일하게 분포되어 있다고 하면 손상변수  $\omega$  를 식(1)과 같이 정의할 수 있다.

$$\omega = \frac{A_0 - A}{A_0} \quad ; \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (1)$$

유효단면적에 대한 힘의 크기로 나타낸 응력을 유효응력이라 하면 유효응력  $\bar{\sigma}$  는 보통의 공칭응력  $\sigma$  와 식(2)의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \frac{P}{A_o - A} \\ &= \frac{P}{A_o(1-\omega)} = \frac{\sigma}{1-\omega}\end{aligned}\quad (2)$$

일반적인 이방성 손상의 경우 유효 손상텐서  $M(\omega)$  을 이용하여 식(2)를 식(3)과 같이 표현한다.

$$\bar{\sigma} = M(\omega) \sigma \quad (3a)$$

$$M_{ijkl} = \frac{\delta_{ijkl}}{\sqrt{1-\omega_i} \sqrt{1-\omega_j}}, \text{ no sum over } i, j \quad (3b)$$

여기서  $\delta_{ijkl}$ 은 4차의 단위텐서를 나타낸다.

한 재료에서 손상되지 않은 상태 ( $\omega = 0$ )의 변형률탄성에너지와 공액탄성에너지는 식(4)와 같다.

$$W^e(\varepsilon, 0) = \frac{1}{2} \varepsilon^e : E : \varepsilon^e \quad (4)$$

마찬가지로 손상된 상태의 변형률탄성에너지와 공액탄성에너지는 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}W^e(\varepsilon^e, \omega) &= W^e(\bar{\varepsilon}^e, 0) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^e : E : \bar{\varepsilon}^e \\ &= \frac{1}{2} (M^{-T} : \varepsilon^e)^T : E : (M^{-T} : \varepsilon^e)\end{aligned}\quad (5)$$

식(5)의 탄성에너지식으로부터 구성방정식을 구하면 식(6)의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\partial W^e(\varepsilon^e, \omega)}{\partial \varepsilon^e} \\ &= M^{-1} : E : M^{-T} : \varepsilon^e\end{aligned}\quad (6)$$

따라서 손상된 재료에 대한 유효탄성텐서는 식(7)과 같다.

$$\bar{E} = M^{-1} : E : M^{-T} \quad (7)$$

그러므로 앞의 에너지식을 다시 쓰면 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W^e(\varepsilon^e, \omega) = \frac{1}{2} \varepsilon^e : \bar{E} : \varepsilon^e \quad (8)$$

식(6)으로부터 유효탄성변형률  $\bar{\varepsilon}^e$  를 식(9)와 같이 정의하면 손상된 재료의 구성방정식을 식(10)과 같이 얻을 수 있다.

$$\bar{\varepsilon}^e = M^{-T} : \varepsilon^e \quad (9)$$

$$\bar{\sigma} = E : \bar{\varepsilon}^e \quad (10)$$

한편 등온과정에 대한 재료의 Helmholtz 자유에너지(Helmholtz free energy)는 식(11)과 같다.

$$\rho\psi(\varepsilon^e, \omega, q, \beta) = W^e(\varepsilon^e, \omega) + \psi_p(q) + \psi_d(\beta) \quad (11)$$

여기서  $\psi_p(q)$ 와  $\psi_d(\beta)$ 는 각각 변형률경화와 손상경화의 자유에너지를 나타내며,  $q$ 는 누적된 소성변형률을,  $\beta$ 는 전체적인 손상을 나타내는 계수를 의미한다.

열역학 제2법칙에 의한 Clausius - Duhem 부등식에 따르면 에너지 소산율은 식(12)와 같이 주어진다.

$$\dot{\phi} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \quad (12)$$

재료의 손상과정은 비가역과정으로 한번 경험한 손상은 복원되지 않음을 나타낸다.

에너지 소산율은 손상 변수에 의해서 이루어 지므로 손상에너지해방률은 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned}Y &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \\ &= -\varepsilon^e : M^{-1} : E : \frac{\partial M^{-T}}{\partial \omega} : \varepsilon^e\end{aligned}\quad (13)$$

### 3. 소성과 손상

재료의 소성을 제어하는 소성면은 식(14)와 같이 정의한다.

$$f_p(\sigma, \omega, q) = \bar{\sigma}_d^{1/2} - [R_o + R(q)] = 0 \quad (14)$$

$$\text{여기서 } \bar{\sigma}_d = \bar{s} : \bar{s} \quad (15)$$

$$\bar{s} = \bar{\sigma} - \delta_{ij} \bar{\sigma}_m \quad (16)$$

Clausius-Duhem 부등식을 만족시키는 손상의 전개는 소성면과 같이 손상

면에 의해 지배된다. 손상면을 식(17)와 같이 정의한다.

$$f_d(Y, B) = Y_d^{1/2} - [B_0 + B(\beta)] \quad (17)$$

$$\text{여기서 } B = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \frac{\partial \Psi_d(\beta)}{\partial \beta} \quad (18)$$

$$Y_d = \frac{1}{2} Y : J : Y \quad (19)$$

$J$  = 대칭의 상수텐서.

에너지의 소산을 나타내는 소산력 (power of dissipation)을 식(20)과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi = \sigma : d\varepsilon^p - R dq - Y : d\omega - B d\beta \quad (20)$$

흐름법칙으로부터 식(21)의 Lagrangian 함수를 이용하여 각 변수의 증분을 얻을 수 있다.

$$H = \Phi - \lambda_p f_p - \lambda_d f_d \quad (21)$$

식(21)을  $\sigma$  에 대하여 미분하여 정리하면

$$d\varepsilon^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \quad (22)$$

마찬가지로  $R$  과  $Y$  그리고  $B$  에 대하여 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$dq = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial (-R)} \quad (23)$$

$$d\omega = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-Y)} \quad (24)$$

$$d\beta = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-B)} \quad (25)$$

적합조건식 식(26)과 식(27)로부터

$$\begin{aligned} df_p(\sigma, \omega, q) &= \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega \\ &+ \frac{\partial f_p}{\partial R} : \frac{\partial R}{\partial q} : dq = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$df_d = \frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY + \frac{\partial f_d}{\partial B} : \frac{\partial B}{\partial \beta} : d\beta = 0 \quad (27)$$

$\lambda_p$ 와  $\lambda_d$ 를 각각 식(28)과 식(29)와 같

이 얻는다.

$$\lambda_p = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega}{\frac{\partial f_p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial f_p}{\partial R}} > 0, \\ \text{if } f_p = 0 \text{ and} \\ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega > 0 \\ 0, \\ \text{if } f_p < 0, \text{ or } f_p = 0 \text{ and} \\ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega \leq 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\lambda_d = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY}{\frac{\partial f_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} \frac{\partial f_d}{\partial B}} > 0, \\ \text{if } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY > 0 \\ 0, \\ \text{if } f_d < 0, \\ \text{or if } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY \leq 0 \end{cases} \quad (29)$$

#### 4. 탄성-손상 접선계수

식(6)으로부터 증분형태의 응력-변형률 관계를 유도하면 식(30)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} d\sigma &= \rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varepsilon^e \partial \varepsilon^e} d\varepsilon^e \\ &+ \rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varepsilon^e \partial \omega} d\omega \\ &= \bar{E} d\varepsilon^e + \bar{D} d\omega \end{aligned} \quad (30)$$

여기서

$$\bar{D} = 2 M^{-1} E \frac{\partial M^{-T}}{\partial \omega} \varepsilon^e \quad (31)$$

식(13)에 나타난 에너지손상해방률의 증분을 구하면 식(32)와 같다.

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon^e} d\varepsilon^e + \frac{\partial Y}{\partial \omega} d\omega \\ &= \bar{D} d\varepsilon^e + P d\omega \end{aligned} \quad (32)$$

여기서

$$P = \varepsilon^e \frac{\partial M^{-1}}{\partial \omega} E \frac{\partial M^{-T}}{\partial \omega} \varepsilon^e \quad (33)$$

한편 식(24)의 손상변수의 증분을

다시 나타내면 식(34)와 같다.

$$d\omega = \frac{S}{(1-T)} d\varepsilon^e \quad (34)$$

$$= Q d\varepsilon^e$$

여기서

$$S = \frac{1}{4 Y_d^2 \left( \frac{\partial B}{\partial \omega} \right)} Y J \bar{D} J Y \quad (35)$$

$$T = \frac{1}{4 Y_d^2 \left( \frac{\partial B}{\partial \omega} \right)} Y J P J Y \quad (36)$$

식(33)을 식(30)에 대입하면 탄성-손상 접선계수(tangent modulus)를 얻는다.

$$d\sigma = \bar{K} d\varepsilon^e \quad (37)$$

여기서

$$\bar{K} = \bar{E} + \bar{D} Q \quad (38)$$

## 5. 탄성-손상-소성 접선계수

변형률중분을 탄성과 소성 성분으로 구분하면 식(39)와 같다.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (39)$$

식(39)을 식(37)에 대입하면

$$d\sigma = \bar{K} (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (40)$$

식(26)의 적합조건식에 식(40)를 대입하면 식(41)을 얻는다.

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \bar{K} (d\varepsilon - d\varepsilon^p) + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} Q (d\varepsilon - d\varepsilon^p) + \frac{\partial f_p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial q} dq \quad (41)$$

식(41)에 식(22)와 식(34)를 대입하여 식(42)와 같이  $\lambda_p$ 를 구할 수 있다.

$$\lambda_p = \left( \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \bar{K} + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} Q \right) d\varepsilon / \left( \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \bar{K} \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} Q \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} - H^p \frac{\partial f_p}{\partial R} \gamma \right) \quad (42)$$

여기서

$$H^p = \frac{\partial R}{\partial q} ; \text{소성계수} \quad (43)$$

$$\gamma = \frac{dq}{\lambda_p} ; \text{응력상태의 스칼라함수} \quad (44)$$

따라서 중분상태의 응력-변형률 관계는 식(45)와 같다.

$$d\sigma = \bar{H} d\varepsilon \quad (45)$$

여기서  $\bar{H}$ 는 탄성-손상-소성을 고려한 접선계수(tangent modulus)가 된다.

$$\bar{H} = \bar{K} - \left[ \left( \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \bar{K} + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} Q \right) \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] / \left[ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \bar{K} \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} Q \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} - H^p \frac{\partial f_p}{\partial R} \gamma \right] \quad (46)$$

## 6. 콘크리트에의 적용

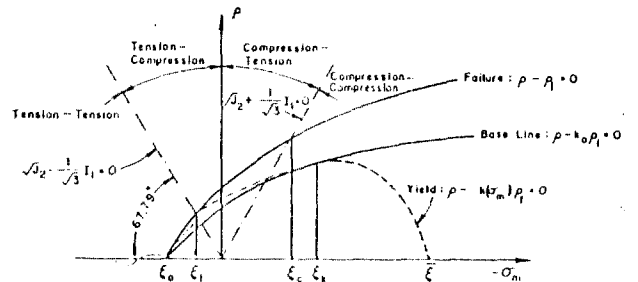


그림 2 Han-Chen의 부동경화모델

콘크리트의 소성부분은 그림 2와 같은 Han-Chen의 부동경화법(nonuniform hardening rule)을 이용한다. Han-Chen의 부동경화법칙은 식(47)과 같이 소성면을 정의한다.

$$f_p = p - k(k_0 \sigma_m) p_f(\sigma_m, \theta) = 0 \quad (47)$$

여기서  $k$ 는 형상계수로서 정수압응력  $\sigma_m$ 과 경화변수  $k_0$ 의 함수로 나타난다.

파괴면  $\rho_f(\sigma_m, \theta)$ 은 Willam-Warnke의 모델을 이용한다.

## 7. 결론

연속체 손상역학을 이용하여 콘크리트의 탄성, 손상 및 소성을 고려한 재료의 접선계수를 유도하였으며 이는 콘크리트의 비선형 성질을 비교적 잘 나타냄을 알 수 있다.

## 8. 참고 문헌

1. Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. "Continuum Damage Theory - Application to Concrete," Journal of Engineering Mechanics Vol.115 No.1, pp. 345-365, Feb. 1989.
2. Ishikawa, M., Yoshikawa, H., and Tanabe, T., "The Constitutive Model in Terms of Damage Tensor," Concrete Structures Analysis, pp. 93-103, 1985.
3. Lemaitre, J., "How to Use Damage Mechanics," Nuclear Engineering and Design 80, pp. 233-245, 1984.
4. Chaboche, J. L., "Continuum Damage Mechanics: Present State and Future Trends," Nuclear Engineering and Design 105, pp. 19-33, 1987.
5. Lorrain, M. and Loland, K. E., "Damage Theory Applied to Concrete," Fracture Mechanics of Concrete, pp. 341-369, 1983.
6. Krajcinovic, D., "Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions," Journal of Applied Mechanics, pp 829-834, Dec. 1985.
7. Ju, J. W., "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspect," International Journal of Solids and Structures, Vol.25 No.7, pp. 803-833, 1989.
8. Ju, J. W., "Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage Mechanics," Journal of Engineering Mechanics, Vol.116, No.12, pp. 2764-2770, Dec. 1990.
9. Han, D.J. and Chen, W.F. , "A Nonuniform Hardening Plasticity Model for Concrete Materials," Journal of Mechanics of Materials, Vol.4, No.4, pp. 283-302, 1985.
10. Lee, H., Peng, K. and Wang, J., "An Anisotropic Damage Criterion for Deformation Instability and its Application to forming Limit Analysis of Metal Plates," Engineering Fracture Mechanics, Vol.21, No.5, pp.1031-1054, 1985.