

개선된 평가점 선정기법을 이용한 응답면기법
Improved Response Surface Method
Using Modified Selection Technique of Sampling Points

김 상 효* 나 성 원** 황 학 주***
Kim, Sang-Hyo Na, Seong-Won Hwang, Hak-Joo

ABSTRACT

Recently, due to the increasing attention to the structural safety under uncertain environments, many researches on the structural reliability analysis have been performed. Some useful methods are available to evaluate performance reliability of structures with explicit limit states. However, for large structures, in which structural behaviors can be analyzed with finite element models and the limit states are only expressed implicitly, Monte-Carlo simulation method has been mainly used. However, Monte-Carlo simulation method spends too much computational time on repetitive structural analysis. Many alternative methods are suggested to reduce the computational work required in Monte-Carlo simulation. Response surface method is widely used to improve the efficiency of structural reliability analysis.

Response surface method is based on the concept of approximating simple polynomial function of basic random variables for the limit state which is not easily expressed in explicit forms of design random variables. The response surface method has simple algorithm. However, the accuracy of results highly depends on how properly the stochastic characteristics of the original limit state has been represented by approximated function.

In this study, an improved response surface method is proposed, in which the sampling points for creating response surface are modified to represent the failure surface more adequately and the combined use of a linear response surface function and Rackwitz-Fiessler method has been employed. The method is found to be more effective and efficient than previous response surface methods. In addition more consistent convergence is achieved. Accuracy of the proposed method has been investigated through example.

1. 서 론

구조신뢰성해석의 목적은 불확실한 구조계의 확률적 응답을 예측하는 것이다. 구조물의 파괴확률을 구하기 위해서는 확률변수의 평균과 표준편차만을 이용하는 2차 모멘트

* 연세대학교 토목공학과 부교수
** 연세대학교 토목공학과 석사과정
*** 연세대학교 토목공학과 교수

방법이 가장 널리 사용되어왔다. 그러나, 이 방법은 한계상태식이 복잡하게 나타나는 크고 복잡한 구조물에는 적용이 어려운 단점이 있다. 이러한 복잡한 구조물에 대해서는 Monte Carlo simulation method가 사용될 수 있다. 이 방법은 좋은 결과를 얻을 수 있지만 반복적인 구조해석이 필요하기 때문에 계산량이 매우 많아지는 결점이 있다. 따라서 계산시간을 단축하기 위하여 많은 다른 방법들이 제안되고있다. 그중 응답면기법은 확률변수로 표현되는 근사 다항식을 사용하는 방법으로 매우 간단하다는 장점이 있지만 근사식이 한계상태의 특성을 얼마나 잘 표현하느냐에 따라 결과의 정확도가 좌우된다.

본 연구에서는 기존의 응답면기법보다 계산량 및 소요시간을 줄이면서 보다 효율적이고 효과적으로 구조신뢰성해석을 할 수 있는 응답면기법을 제안한다.

2. 응답면기법

2.1 기존의 응답면기법

주어진 조건하에서 한계상태식이 (식 1)과 같이 정의된다고 하자.

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

여기서 x 는 확률변수의 집합이다.

일반적으로 대형구조물의 해석에서 $g(x)$ 를 확률변수의 명확한 함수로 나타내는 것은 불가능하며, 따라서, 응답면기법에서는 한계상태를 기본적인 확률변수의 함수로 근사시켜 구조신뢰성해석을 실시한다. Wong[1, 2]은 (식 2)와 같은 형식으로 응답면식 $g'(x)$ 를 구할것을 제안하였다.

$$g'(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

이 방법에서는 응답면식을 확률변수의 2차항까지 고려하였다. 계수 a, b_i, c_{ij} 를 구하기 위한 평가점은 x_i 의 조합들이다. 평가점은 각각의 확률변수에 대하여 상·하한계가 $\mu + f\sigma, \mu - f\sigma$ 가 되도록 정한다. 여기서 μ 와 σ 는 각각 평균과 표준편차이며 f 는 선정점의 상·하한계를 결정하기 위한 계수이다.

2.2 Bucher의 방법 [3, 4, 5]

기존의 응답면기법은 응답면을 결정할 때 sampling point x 를 평균점부근에서 찾기 때문에 한계상태면의 특성을 적절히 반영하지 못하는 단점이 있다. Bucher등은 이와같은 단점을 보완하기 위하여 (식 3)과 같이 sampling point x 를 결정하는 설계점을 개선하는 새로운 방법을 제안하였다.

$$\underline{x}_M = x' + (x_D - x') \frac{g(x')}{g(x') - g(x_D)} \quad (3)$$

이러한 방법으로 선정한 새로운 설계점으로부터 선택된 sampling point는 파괴면상의 확률적 특성을 잘 반영하게 된다.

이 방법에서 Bucher는 다음과 같은 형식의 다항식을 이용하였다.

$$g'(x) = a + \sum_{i=1}^r b_i x_i + \sum_{i=1}^r c_i x_i^2 \quad (4)$$

(식 4)에서 $2r+1$ 개의 계수가 있기 때문에 각 단계에서 응답면을 산정하기 위해서는 최소 $2r+1$ 개의 sampling point가 필요하다. 좀 더 정확한 결과를 얻기 위해서 (식 5)와 같이 각 확률변수의 곱의 항도 포함시킬 수 있지만, 계산량이 많이 늘어나게 되는 단점이 있다.

$$g'(x) = a + \sum_{i=0}^r b_i x_i + \sum_{i=1}^r c_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} d_{ij} x_i x_j \quad (5)$$

일단 응답면이 결정되면 advanced Monte Carlo simulation기법인 Importance sampling method를 이용하여 파괴확률을 구한다.

2. 3 개선된 응답면기법

2. 3. 1 응답면기법이 갖는 문제점

신뢰성해석에 있어서 응답면기법의 주 목적은 결과의 정확도를 유지하면서 계산량을 줄이는데에 있다. 응답면기법의 효율과 정확도를 향상시키기 위해서는 근사된 응답면이 원래의 파괴면이 갖는 확률적 특성을 적절히 반영할 수 있어야 하며, 특히, 파괴확률에 가장 크게 영향을 미치는 부분의 확률적 특성을 잘 반영할 수 있어야 한다.

그러나, (식 3)으로부터 결정된 새로운 설계점은 (식 4)와 같이 확률변수의 2차항까지 고려할 경우, 기존의 한계상태면의 기하학적 특성을 왜곡하여 응답면에서 분석한 최다 확률파괴점이 수렴하지 못하는 경우의 단점이 발생하기도 한다. 또한 (식 5)와 같이 각 변수의 곱의 항까지 고려할 경우에는 계산량이 많아지게 된다.

또한, Bucher가 제안한 Importance sampling method는 선정된 응답면에 대하여 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있으나 많은 계산과정을 필요로 하여, 응답면 기법의 장점을 살리지 못하는 결과가 된다.

2. 3. 2 제안된 응답면기법

본 연구에서는 advanced FOSM(first-order second-moment)method를 1차 응답면식과 함께 사용함으로써 2차 다항식을 이용할 경우의 문제점을 개선하고, 식을 근사하는데 필요한 구조해석 횟수를 줄임과 동시에 sampling point를 최다확률파괴점 근처의 파괴면 상에 인접한 점으로 선정함으로써 기존의 응답면기법의 효율성을 향상시켰다. 새로운 알고리즘을 제안하는 주 이유는 다음과 같다.

1. 대부분의 구조신뢰성해석에 있어서 실제 한계상태식은 비선형성이 크지 않으며 파괴확률은 최다확률파괴점 근처의 파괴면의 확률적 특성에 좌우된다.
2. 응답면을 2차 다항식으로 근사하여 신뢰성해석을 할 경우, 분석된 결과와 실제 파괴확률간에 나타나는 오차의 균질성(consistency)을 보장하지 못한다.
3. 한계상태의 비선형 정도가 크지 않을 경우 Rackwitz-Fiessler algorithm을 사용한 advanced FOSM method를 이용하면 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있으며, Monte Carlo simulation을 이용할 경우보다 많은 시간을 단축할 수 있다.

4. 한계상태식의 1차항의 정보만을 사용하는 R-F algorithm을 근사 응답면의 신뢰성 해석에 사용할 경우 1차식만으로도 실제 파괴면의 특성을 반영하기에 충분하다.

제안된 알고리즘은 다음과 같다.

1. 실제 상태방정식 $g(x)$ 로부터 (식 6)과 같은 형식의 근사 1차식을 구한다.

$$g'(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (6)$$

첫번째 단계에서의 sampling point는 기존의 응답면기법과 마찬가지로 평균점으로부터 $\mu + f \cdot \sigma$ 와 $\mu - f \cdot \sigma$ 점을 택한다.

2. 근사된 1차의 응답면으로부터 R-F algorithm을 이용하여 최다확률파괴점, x_D 를 구하고, 신뢰성 지수(β)를 산정한다.
3. 축 투영법을 이용하여 (식 7)로부터 투영된 벡터 δ 를 구한다.

$$\delta = \partial f - \partial g' \cdot (\partial g'^T \cdot \partial f) \quad (7)$$

여기서, $\partial g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g'}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g'}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$$\partial f = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad i\text{번째 축에 대해} \begin{cases} k=i \text{ 이면 } a_k = 1 \text{ 또는 } -1 \\ k \neq i \text{ 이면 } a_k = 0 \end{cases}$$

4. 3 단계에서 구한 벡터 δ 들 중 방향이 서로 같은 것들 중 $f \cdot \sigma_i$ 의 투영길이, 즉 $f \cdot |\delta_i| \cdot \sigma_i$ 가 긴 것들만을 선택하여 최다확률파괴점 x_D 를 중심으로 $f \cdot |\delta_i| \cdot \sigma_i$ 만큼 응답면상을 이동한 점을 sampling point x_i 로 취하여 $g(x_i)$ 를 구한다.
5. 4 단계에서 구한 sampling point x_i 들은 응답면상의 점이며, 실제 한계상태면이 비선형인 경우 이는 실제 한계상태면에 존재하지 않는다. 즉, 식 $g(x_i) \neq 0$ 이다. 따라서 실제 한계상태면을 파괴영역($g(x) < 0$)과 안전영역($g(x) > 0$)에서 포괄하는 sampling point를 찾기 위해 x_i 의 실제 한계상태면에 대한 대칭점 x_i' 을 다음 (식 8)과 같이 찾는다.

$$x_i' = \mu_x + (\mu_x - x_i) \frac{-(g(\mu_x) + g(x_i))}{g(\mu_x) - g(x_i)} \quad (8)$$

여기에서, μ_x 는 확률변수의 평균벡터이다. 따라서 x_i 와 x_i' 사이에는 $g(x_i') = -g(x_i)$ 의 관계가 이루어진다.

6. 선정된 sampling point를 이용하여 (식 6)과 같은 선형응답면을 찾는다.
7. 결과가 수렴할 때까지 2~6 단계를 반복한다.

(식 6)에서 미지계수가 $r+1$ 개이기 때문에 $r+1$ 개의 sampling point가 필요하지만 파괴면상의 보다 합리적인 정보를 위해 $2r$ 개의 sampling point를 이용하였다. Sampling point를 이용하여 근사 응답면을 구할때에는 최소자승법을 이용하였다.

3. 예제

제안된 방법의 타당성을 검토하기 위해서 (식 9)와 같이 확률변수의 함수로 이루어진 상태방정식을 예제로 이용하였다.

$$g(x,y) = \exp(0.2x + 6.2) - \exp(0.47y + 5.0) \quad (9)$$

여기에서 확률변수 x, y 는 각각 평균이 0이고 표준편차가 1.0인 표준정규분포를 따른다. 본 연구에서 채택한 예제, (식 9)는 대수정규분포를 따르는 확률변수의 식을 표준정규분포함수로 전환하는 경우 흔히 나타나는 형태이다. (식 9)의 등함수선을 그림 1에 나타내었다.

여러가지 방법에 의한 결과를 표 1에 나타내었다. Monte Carlo simulation method에 의한 결과는 10000번의 모의발생을 10회 실시하여 얻은 결과이며, 응답면기법에 의한 결과들은 3회의 반복계산에 의한 결과이다. Bucher의 방법은 (식 4)를 이용하여 구한 응답면을 R-F 알고리즘을 이용하여 신뢰성해석을 수행한 결과이며, 1차 다항식을 사용한 응답면기법은 1차 다항식을 새로이 선정된 설계점을 중심으로 기존의 sampling point선정 방법($\pm f \cdot o$)으로 구하여 신뢰성 해석을 실시한 결과이다. 또한 본 연구의 응답면기법은 파괴면에 근접한 sampling point를 이용하여 근사한 선형 응답면으로 R-F algorithm을 이용하여 신뢰성해석을 수행한 결과이다.

Bucher의 방법에서는 응답면을 2차항까지 고려하므로써 그림 2와 같이 설계점 x_D 가 수렴하지 못하고 진동하는 현상을 나타냈다. 그림 3에는 본 연구에서 제시한 sampling point(그림 3 (a))와 기존의 기법들에서 제시한 sampling point (그림 3 (b))간의 상대적 위치가 표시되어 있다. 그림 4 (a)에서 g_b 는 Bucher의 방법에 의한 응답면이고, 그림 4 (b)에서의 g_p 는 본 연구에서 제안한 방법에 의한 응답면, g_r 은 기존의 응답면기법으로 구한 응답면이다.

표 1 여러가지 해석방법에 의한 결과값의 비교

해석 방법	β	P_f	error	M.P.F.(x,y)
Monte-Carlo Method	2.344	0.954×10^{-2}	-	-
기존의 응답면기법	3.235	0.061×10^{-2}	38.0	(-2.66, 1.83)
Bucher의 응답면기법	2.057	1.983×10^{-2}	12.24	-
1차 다항식을 사용한 응답면기법	2.262	1.184×10^{-2}	3.5	(-0.90, 2.08)
본 연구의 응답면기법	2.349	0.941×10^{-2}	0.2	(-0.92, 2.16)

4. 결론

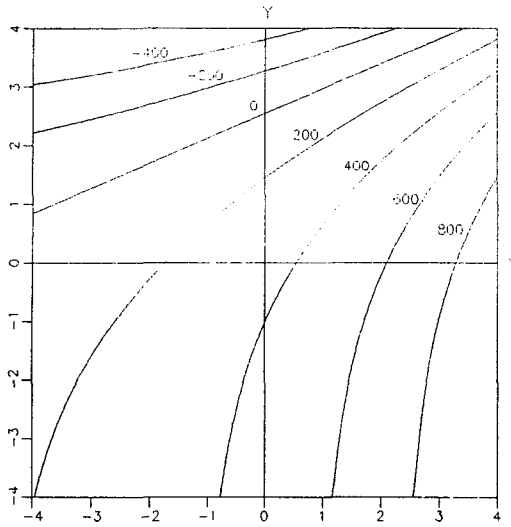
본 연구에서는 sampling point를 보다 파괴면상에 근접한 점으로 선정하여 구한 1차의 응답면식과 R-F 알고리즘을 사용하여 구조신뢰성해석의 효율성 및 정확도를 향상시킨 응답면기법을 제안하였다. 예제를 통하여 본 연구에서 제안한 방법 및 기존의 방법들에 의한 결과를 Monte Carlo simulation method에 의한 결과와 비교하였다.

Bucher에 의한 방법에서는 응답면의 2차항까지 고려하는 결과로 설계점 x_D 가 수렴하지 않는 결과를 나타냈다. Sampling point를 제안된 방법과 같이 파괴면에 인접한 점을 선정하여 1차 다항식으로 근사하여 신뢰성해석을 수행한 결과, 기존의 sampling point 선정방법으로 1차 다항식의 응답면을 근사하여 신뢰성해석을 수행한 결과보다 계산의 효율성 및 정확도를 향상시킬 수 있었으며, 상당한 정확도를 얻을 수 있었다. 향후 보다 다양하고 실제적인 문제에 적용하여 제안된 기법을 보완할 예정이다.

본 연구에서 제안한 응답면기법을 이용하면 복잡한 구조물의 경우에도 구조해석을 단 몇번만 수행하여 파괴확률을 쉽게 구할 수 있기 때문에 계산시간을 고려할 경우 모의분석기법에 비해 상당히 효율적이다.

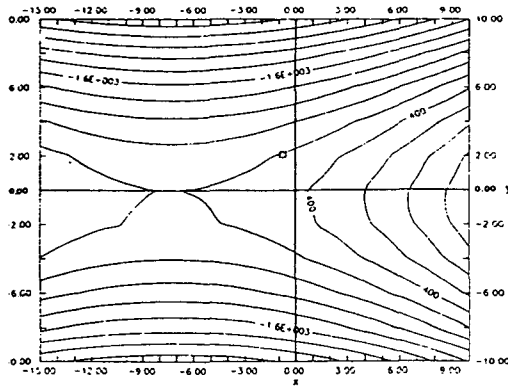
5. 참고문헌

1. Wong, F.S., "Uncertainties in Dynamic Soil-Structure Interaction," Journal of Engineering Mechanics, ASCE , Vol. 110, No. 2, 1984.
2. Wong, F. S., "Slope Reliability and Response Surface Method," Journal of Geotechnical Engineering, ASCE , Vol. 111, No. 1, 1985.
3. Schueller, G.I., Bucher, C.G., Bourgund, U., and Ouypornprasert, W., "On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probabilities," in Lecture Notes in Engineering (31) : Stochastic Structural Mechanics, Edited by Y.K. Lin and G. I. Schueller, Springer-Verlag, New York, pp. 1987, 388-410.
4. Schueller, G.I., and Bucher, C.G., "Computational Stochastics Structural Analysis - a contribution to the software development for the reliability assessment of structures under dynamic loading," Probabilistic Engineering Mechanics, Part 2 Vol. 6, Nos 3 and 4, 1991
5. Bucher, C.G., and Bourgund, U., "A Fast Efficient Response Surface Approach Structural Reliability Problems," Structural Safety, Vol. 7, 1987, pp. 57-66.

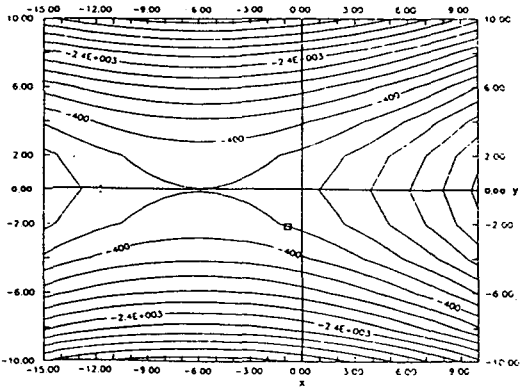


$$g(x, y) = \exp(0.2x + 6.2) - \exp(0.47y + 5.0)$$

그림 1 상태함수의 등함수선



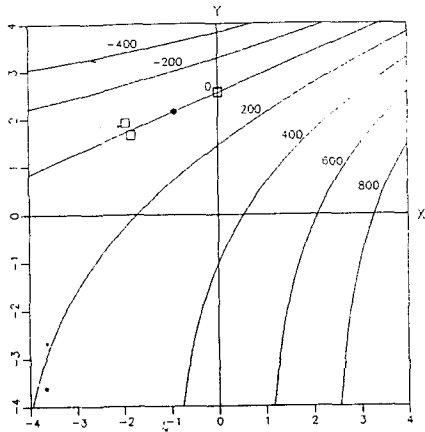
(a) 두번째 반복과정에서 구한 응답면의 등고선도



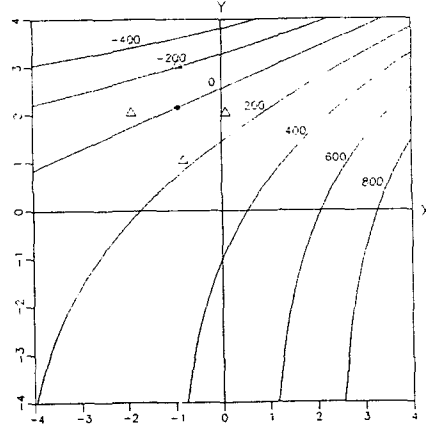
(b) 세번째 반복과정에서 구한 응답면의 등고선도

□ 최다확률파괴점 x_p

그림 2 Bucher등이 제안한 응답면기법에 의한 결과



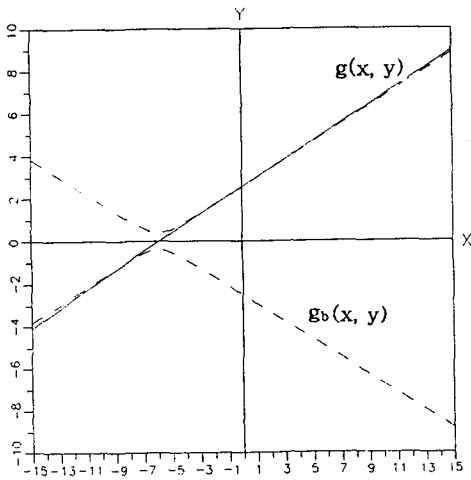
(a) 제안된 방법에 의한 sampling point



(b) 기존의 방법에 의한 sampling point

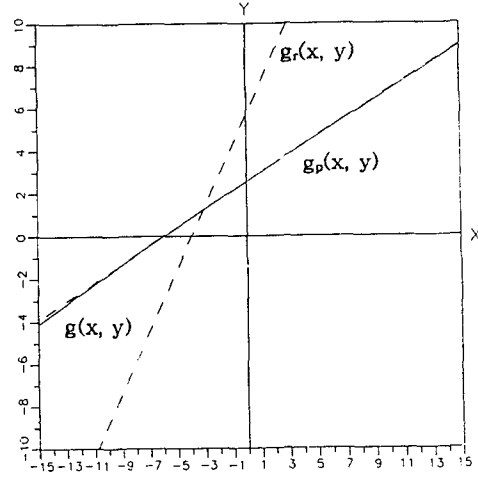
- 기존의 방법에 의한 sampling point
- △ 제안된 방법에 의한 sampling point
- 최다확률과외점

그림 3 기존의 방법과 제안된 방법에 의해 선정된 sampling point의 비교



- g : 실제 응답면
- g_b : Bucher의 방법에 의한 응답면

(a) Bucher의 방법에 의한 응답면



- g : 실제 응답면
- g : 기존의 방법에 의한 응답면
- · - g_p : 제안된 방법에 의한 응답면

(b) 기존의 방법 및 제안된 방법에 의한 응답면

그림 4 기존의 응답면과 제안된 응답면기법에 대한 결과 비교