

삼차원 곡면에 대한 접촉해석기법의 개발

박 채현*, 박 종진**

* 홍익대학교 대학원

** 홍익대학교 기계공학과

Development of Contact Algorithms for Three Dimensional Surfaces

Chae Hyun Park*, Jong Jin Park**

* Graduate School, Hong-Ik University

** Dept. of Mechanical Engineering, Hong-Ik University

Abstract

Finite element analysis of material deformation is successfully utilized to understand metal forming processes such as forging, extrusion and deep drawing. However, such analysis involves contact problems; a free node touches a die surface and a contact node slips along the die surface. In the present investigation, appropriate contact algorithms were developed assuming that a three dimensional surface can be divided into bilinear patches and that nodal velocities are linear during an incremental time. The algorithms were coded into a computer program and tested for a simple surface. Comparison of the test result with that obtained from a commercial code is presented and discussed.

1. 서론

단조, 디프드로우잉, 압출, 인발과 같은 소성가공에서 공정을 이해하려면 소재의 변형해석이 요구된다. 소성변형에 대한 근사해석법으로는 에너지법, 슬래브법, 미끄럼선장법, 상계법, 유한요소해석법등 여러가지가 있으나 최근 컴퓨터의 개발과 더불어 유한요소해석법이 실제공정해석에 많이 적용되고 있다. 따라서 소성가공공정의 유한요소해석을 위한 소성변형해석 프로그램의 개발이 활발히 진행되고 있다. 그런데 대부분의 소성가공공정에서 다이와 소재의 상대운동으로 서로간에 접촉문제가 발생하고, 공정이 계속됨에 따라 접촉후에 소재는 다이면을 따라 운동하게 된다. 따라서 소성변형해석프로그램의 개발을 위해서는 다이와 소재사이의 접촉해석이 필수적으로 요구된다[1, 2, 3]. 본 연구에서는 삼차원 곡면으로 표현된 다이면과 소재와의 접촉해석을 위한 기법을 개발하였다. 이를 위하여 여러가지 곡면표현법중에서 bilinear 방법을 채택

하였고, 다이와 소재사이의 접촉점, 접촉점에서의 단위법선벡터, 접촉하는데 걸린시간을 계산하여 접촉해석기법을 개발하였으며, 접촉후 접촉점이 다이면을 따라 직선운동한다고 가정하므로 발생하는 다이와 소재사이의 침투점이나 이탈점을 곡면상으로 수정하는 방법을 제시하였다.

삼차원 공간상에 존재하는 곡면의 표현방법으로는 곡면의 경계를 형성하는 네개의 꼭지점을 선형보간하여 곡면을 표현하는 bilinear 방법, 곡면의 경계를 형성하는 네개의 곡선을 선형보간하여 곡면을 표현하는 Coons 방법, 곡면의 경계를 형성하는 네개의 곡선과 네개의 꼭지점에서 매개변수의 방향에 대한 접선의 기울기를 사용하여 곡면을 표현하는 parametric cubic curve 방법등 여러가지가 있으나 여기서는 bilinear 방법을 사용하였다[4, 5]. Bilinear 방법은 다른 곡면표현방법보다 비교적 간단하고, 계산시간이 적게 소요되는 장점이 있는 반면 실제곡면과 비교해서 곡면상의 점들의 위치에 대한 정확도가 떨어지는 단점이 있다. 그러나 이러한 단점은 해석하고자 하는 곡면을 여러개의 패치(patch)로 작게 나누면 실제곡면에 비교적 잘 수렴하므로 곡면을 형성하는 패치의 갯수를 증가시키는 방법으로 보완할수 있다. 삼차원 곡면의 접촉해석은 다음과 같은 과정을 포함한다: (a) 등속도로 운동하는 공간상의 임의의 점 (P_0)이 등속도로 운동하는 곡면에 접촉하는지의 판단, (b) 곡면에 접촉하는 접촉점 (Q') 결정, (c) 접촉하는데 걸린 최소시간(Δt)의 계산, (d) 접촉점에서의 단위법선벡터(N)의 계산, (e) 접촉후에 곡면을 침투하거나 이탈한 점에 대한 수정, (f) 여러개의 패치로 구성되어 있는 곡면의 경우에 실제의 접촉패치결정.

2. 접촉점과 접촉시간

Bilinear 곡면은 네 꼭지점으로 표현된 사각형 내부의 곡면에 대하여 선형보간법을 사용하여 나타낸다. 네점 P_1, P_2, P_3, P_4 는 그림1과 같이 원점에서 보았을때 시계방향의 순서대로 지정된다. 여기서 $P(0,0), P(1,0), P(1,1), P(0,1)$ 는 매개변수 u 와 v 를 이용한 P_1, P_2, P_3, P_4 의 좌표값이다. 이러한 곡면을 매개변수방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$P(u,v) = [(1-u)(1-v) \quad u(1-v) \quad (1-u)v \quad uv] \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(1,0) \\ P(0,1) \\ P(1,1) \end{bmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

식(1)을 전체좌표계로 사용하고 있는 직각좌표계에 적용하면 다음과 같이 나타난다.

$$P(u, v) = [(1-u)(1-v) \quad u(1-v) \quad (1-u)v \quad uv] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_4 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$= P_1 + (P_2 - P_1)u + (P_4 - P_1)v + (P_1 - P_2 + P_3 - P_4)uv \quad \text{---- (2)}$$

입의의 절점 P_0 가 일정속도로 직선운동을 하고 있다고 가정하면 이 직선의 방정식은 매개변수 t 를 이용하여 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$R(t) = P_0 + Vt \quad \text{---- (3)}$$

여기서 R 은 입의의 시간 t 에 해당하는 점의 위치를 나타낸다. 그림2에서 V_{MP} 는 소재절점 속도이고, V_{DIE} 는 다이의 속도이며, V_{DM} 은 다이에서 본 소재의 상대속도로서 다이에서 소재를 보았을때 소재의 절점이 갖는 속도이다. 여기서는 V_{DM} 을 간단히 V 로 대치하여 사용하였다. 공간상의 점 P_0 와 다이곡면이 상대속도 V 로 운동하고 있을때 접촉점은 그림1과 같이 P_0 를 지나고 V 에 의 방향을 가지는 직선방정식에 해당하는 식(3)과 곡면방정식에 해당하는 식(2)를 연립하여 구한다.

$$(P_2 - P_1)u + (P_4 - P_1)v + (P_1 - P_2 + P_3 - P_4)uv + (P_1 - P_0) - Vt = 0 \quad \text{---- (4)}$$

식(4)를 x, y, z 성분으로 분해하고, 분해된 세개의 식을 연립하여 매개변수 u, v, t 를 구한다. 연립하는 과정에서 매개변수 u, v, t 는 불능이나 부정이 도출되는 것을 방지하기 위하여 다음 세가지 경우로 나누어 해석하여야 한다: (1) uv 항이 존재하는 경우에 매개변수 u 와 v 를 구하는 방법, (2) uv 항이 존재하지 않는 경우에 매개변수 u 와 v 를 구하는 방법, (3) 매개변수 t 를 구하는 방법.

식(4)에서 구한 매개변수 u, v, t 가 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, t \geq 0$ 범위에 있으면 주어진 점 P_0 가 곡면에 접촉하는 경우이다. 여기서 구한 매개변수 t 는 접촉시간을 나타내며 구한 u, v 를 식(2)에 대입하여 접촉점(Q)을 다음과 같이 구할수 있다.

$$Q = (1-u)(1-v)P_1 + u(1-v)P_2 + (1-u)vP_4 + uvP_3$$

$$= P_1 + (P_2 - P_1)u + (P_4 - P_1)v + (P_1 - P_2 + P_3 - P_4)uv \quad \text{---- (5)}$$

그런데 그림3와 같이 곡면과 직선이 만나는 교점을 사용하여 접촉점을 구할 경우에 한개의 패치내부에 접촉점이 한개이상 (예; Q_1, Q_2) 존재하는 경우가 있다. 그러나 실제의 경우에 곡면과 직선의 접촉점은 한개만 존재하므로 이렇게 구해진 여러개의 점중에서 이론적으로 타당한 접촉점을 찾아내어야 한다. 그림3에서 구한 Q_1 와 Q_2 중에서 Q_2 는 소재의 절점이 곡면상의 점 Q_1 를 통과하여 곡면의 다른부분과 접촉한 점으로 이러한 점은 기하학적인 해석으로부터 계산된 것으로 실제로는 존재하지 않는 접촉점이다. 그러므로 타당한 접촉점은 Q_1 이고 이 점은 Q_2 보다 초기소재에서 더 작은 거리를 갖는다. 따라서 이론적으로 타당한 접촉점은 여러개의 접촉점중에서 최소의 접촉

시간을 갖는 접촉점을 택하는 방법으로 결정할수 있다.

그러나 여기서 구한 접촉점은 상대속도를 사용하여 구한 값이므로 실제의 접촉점이 아니다. 따라서 실제의 접촉점은 절점을 절점의 속도방향으로 접촉시간만큼 이동시켜서 구한다. 다이는 선형운동하므로 접촉점에서의 단위법선벡터는 변하지 않고 그대로 유지된다. 따라서 단위법선벡터는 수정하지 않고 그대로 사용한다. 그림4를 참조하여 이 방법을 정리하면 다음과 같다. (a) 접촉해석방법에서 정지상태로 가정한 다이에 대한 접촉점, 접촉점에서의 단위법선벡터, 최소접촉시간을 구한다. (b) 최소접촉시간과 다이의 속도를 사용하여 다이의 위치좌표를 실제의 접촉점이 존재하는 공간상의 다이로 이동시키고, 접촉점의 위치좌표를 실제의 접촉점으로 이동시킨다. (c) 최소접촉시간과 소재의 속도를 사용하여 소재의 절점에 대한 위치좌표를 실제의 접촉점으로 이동시킨다.

3. 접촉점의 단위법선벡터

다이가 직선으로 등속도운동을 하므로 접촉점의 단위법선벡터는 다이가 이동함에 따라 변하지 않는다. 따라서 단위법선벡터 (N)는 상대속도를 사용하여 구한 접촉점에 대한 u 방향과 v 방향의 접선벡터를 다음과 같이 외적하여 구한다.

$$N = \frac{P_u(u,v) \times P_v(u,v)}{|P_u(u,v) \times P_v(u,v)|} \quad \text{---- (7)}$$

여기서 $P_u(u,v)$ 는 u 방향의 접선벡터이고, $P_v(u,v)$ 는 v 방향의 접선벡터이다. 단위법선벡터는 그림5와 같이 항상 좌표계의 원점을 기준으로하여 공간상의 점 P_0 에서 곡면을 통과하고 나가는 방향을 양의 방향으로 잡는다.

4. 접촉점의 위치수정

삼차원 bilinear 곡면해석에서 우리가 다루는 패치는 곡면으로 이루어져 있고, 접촉점은 곡면을 따라 곡선운동을 한다. 하지만 본 연구에서는 접촉점은 직선운동을 한다고 가정하였으므로 곡면상의 접촉점은 미소시간경과후에 다이를 따라 매개변수 u 와 v 의 접선벡터방향으로 직선운동을 하게 된다. 이때 다이는 곡면이고, 접촉점은 직선으로 이동하므로 이동한 접촉점이 다이를 침투하거나 이탈하여 다이표면에 존재하지 않는 문제가 발생한다. 따라서 해석하는 과정에서 오차가 발생하게 되고, 이러한 오차가 계속해서 누적되면 수치해석결과와 실제공정사이에 상당한 오차가 발생하게 된다. 따라서 이렇게 침투하거나 이탈한 접촉점들을 미소시간만큼 매개변수 u 와 v 의 접선방향으로 이동시킨후 매개변수 t 를 사용하여 t 가 양수이면 이탈로, t 가 음수이면 침투로 판단하여 가장 가까운 다이곡면상에 위치하도록 접촉점의 좌표를 수정해 주어야 한다.

가장 짧은 거리를 사용하여 침투하거나 이탈한 접촉점 (Q_1)을 다이의 곡면상에 존재하는 점으로 수정하는 방법은 그림6과 같이 곡면상으로 수정될 점 (Q_2)에 대한 법선 방향을 사용하여 수정점을 구하는 것이다. 그런데 어떤점에 대한 단위법선벡터를 구하려면 그점의 좌표를 알고 있어야 한다. 그러나 Q_2 는 구하고자 하는 수정점이므로 이 점에서의 단위법선벡터를 사용하여 수정점을 구하는 방법은 무리가 있다. 따라서 V_0 에 근사한 단위법선벡터들을 이용하여 Q_2 에 근사한 점을 찾을수 있는 두가지 방법을 제시하였다.

4.1. 이동점 이전의 접촉점에 대한 단위법선벡터를 사용하여 수정하는 방법

아래의 식(8)에서 접촉점에 대한 단위법선벡터 (V_1)를 구하고, 식(9)에서 미소시간 (TINCT)만큼 이동한 접촉점 (Q_1)을 구한다.

$$V_1 = \frac{V_x}{|V_x|} = \frac{\{(V_0)_x + (V_v)_x\}i + \{(V_0)_y + (V_v)_y\}j + \{(V_0)_z + (V_v)_z\}k}{\sqrt{\{(V_0)_x + (V_v)_x\}^2 + \{(V_0)_y + (V_v)_y\}^2 + \{(V_0)_z + (V_v)_z\}^2}} \quad \text{----- (8)}$$

$$Q_1 = Q + V_1 \times \text{TINCT} \quad \text{----- (9)}$$

여기서 구한 이동점 (Q_1)을 소재의 절점으로 대치하고, 이미 구한 접촉점 (Q)에서의 단위법선벡터 (N)를 절점의 속도방향으로 대치하여 곡면접촉해석에 적용하면 그림 7과 같이 새로운 접촉점 (Q_2)을 구할수 있고, 이 점이 구하고자 하는 실제의 수정점 (Q_2)에 근사한 수정점 (Q_2')이다. 그러나 이 방법은 이동점 (Q_1)과 수정점 (Q_2)사이의 최단거리인 곡면상의 수정점 (Q_2)에서의 단위법선벡터를 사용하여 수정점을 구하지 않고 이동점이전의 단위법선벡터를 사용하여 수정점 (Q_2')을 구하므로 오차를 수반한다.

4.2. 패치중심점에 대한 단위법선벡터를 사용하여 수정하는 방법

식(9)에서 구한 이동점 (Q_1)을 소재의 절점으로 대치하고, 패치중심점에서의 단위법선벡터(N_c)를 절점의 속도로 대치하여 곡면접촉해석에 적용하면 새로운 수정점 (Q_2')을 구할수 있다. 이 경우 패치중심점에서의 단위법선벡터는 그림8에 나타난 것과 같이 매개변수 u와 v에 각각 0.5, 0.5의 값을 대입하여 구한다. 이 방법으로 구한 수정점 (Q_2')도 4.1절의 방법과 마찬가지로 오차를 수반하게 된다.

결론적으로 이 두가지 방법의 결과는 경우에 따라서 다르게 나타나며 어느 하나가 항상 근사하게 나타나지 않으므로 두가지 수정법중에서 최단수정거리에 해당되는 방법을 채택한다.

5. 테스트

간단한 곡면을 IDEAS 패키지로 부터 구한 값과 본 연구에서 수행한 bilinear 방법으로 부터 구한 값을 비교하는 방법으로 테스트하였다. Coons곡면 표현방법에 사용되는

곡면의 네 모서리가 직선인 경우에 Coons곡면 표현방법으로 구한 곡면상의 점과 bilinear 방법으로 구한 곡면상의 점이 일치하는가를 검토하였다. 사용된 곡면은 그림9와 같이 $P_1(0,0,10)$, $P_2(10,0,10)$, $P_3(10,0,10)$, $P_4(0,0,0)$ 인 간단한 패치이며 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥선상에 존재하는 점에 대하여 테스트를 수행하였다. 이 점들은 국부좌표계 u, v 상에서 그림10과 같이 나타난다. 이 점들과 접촉하도록 절점의 속도를 조절하여 접촉점을 구하고, IDEAS에서 구한 접촉점과 비교하였다. 표1에 나타난 것과 같이 bilinear 방법과 IDEAS로 구한 접촉점이 아주 잘 일치하는 것을 알수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 삼차원 곡면으로 표현된 다이면과 소재와의 접촉해석을 위한 기법을 개발하였고, bilinear 방법과 IDEAS로부터 구한 곡면의 접촉점을 비교하여 개발된 접촉해석기법을 검토하였다. 개발된 기법을 프로그램으로 작성하여 테스트를 수행하였다. 그런데 bilinear 방법으로 구한 점은 실제곡면과 비교해서 오차가 비교적 많이 발생한다. 이러한 오차를 줄이기 위해서는 첫째로 해석에 사용되는 곡면을 좀 더 작은 여러개의 패치로 나누어 실제곡면에 수렴하게 하는 방법이 있고, 둘째로 bilinear 방법보다 좀더 실제 곡면에 대한 정확도가 높은 곡면표현방법을 사용하는 방법이 있으며 셋째로 수정점을 구할때 수정점의 단위법선벡터에 가장 근사한 벡터를 사용하는 방법이 있다. 본 연구에서는 첫번째 방법을 사용하여 해석곡면이 실제곡면에 수렴하도록 하였으며 개발된 기법을 디프드로우잉과 같이 접촉해석이 많이 사용되는 변형해석에 적용할 예정이다.

7. 참고문헌

- [1] Oh, S. I., 1982, "Finite Element Analysis of Metal Forming Processes with Arbitrary Shaped Dies", Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, p. 479.
- [2] Oh, S. I., Park, J. J., Kobayashi, S. and Altan, T., 1983, "Application of FEM Modeling to Simulate Metal Flow in Forming a Titanium Alloy Engine Disk", Trans. ASME, J. Engr. Ind., Vol. 105, p. 251.
- [3] Coupez, T., Soyris, N. and Chenot, J.-N., 1991, "3-D Finite Element Modelling of the Forging Process with Automatic Remeshing", J. Materials Processing Technology, Vol. 27, No. 1-3, p. 119.
- [4] Dewey, B. R., 1988, Computer Graphics for Engineers, Harper & Row, New York.
- [5] Faux, I. D. and Pratt, M. J., 1979, Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood.

표 1 Bilinear방법과 IDEAS 비교

절점 (Node)	Bilinear 방법				IDEAS				오차 (%)
	u	v	x	y	x	y	z		
1	0.0	0.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0	10.0	0.0
2	0.5	0.0	5.0	0.0	10.0	5.0	0.0	10.0	0.0
3	1.0	0.0	10.0	0.0	10.0	10.0	0.0	10.0	0.0
4	1.0	0.5	10.0	5.0	5.0	10.0	5.0	5.0	0.0
5	1.0	1.0	10.0	10.0	0.0	10.0	10.0	0.0	0.0
6	0.5	1.0	5.0	5.0	0.0	5.0	5.0	0.0	0.0
7	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.5	0.0	0.0	5.0	0.0	0.0	5.0	0.0
9	0.2	0.2	2.0	4.0	8.0	2.0	4.0	8.0	0.0
10	0.4	0.4	4.0	1.6	6.0	4.0	1.6	6.0	0.0
11	0.5	0.5	5.0	2.5	5.0	5.0	2.5	5.0	0.0
12	0.6	0.6	6.0	3.6	4.0	6.0	3.6	4.0	0.0
13	0.8	0.8	8.0	6.4	8.0	8.0	6.4	8.0	0.0
14	0.2	0.8	2.0	1.6	2.0	2.0	1.6	2.0	0.0
15	0.4	0.6	4.0	2.4	4.0	4.0	2.4	4.0	0.0
16	0.6	0.4	6.0	2.4	6.0	6.0	2.4	6.0	0.0
17	0.8	0.2	8.0	1.6	8.0	8.0	1.6	8.0	0.0

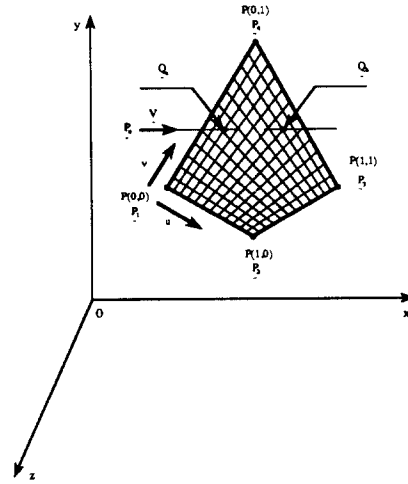


그림3 동일패치내에 접촉점이 한개이상 존재하는 경우

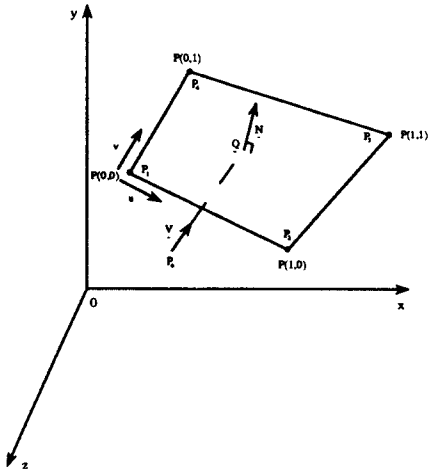


그림1 Bilinear 패치와 접촉점의 단위법선벡터

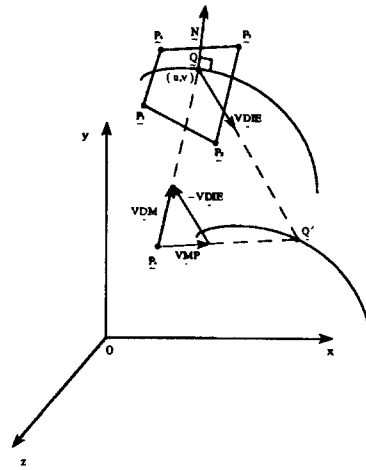


그림4 다이와 소재가 모두 속도를 갖는 경우의 접촉점

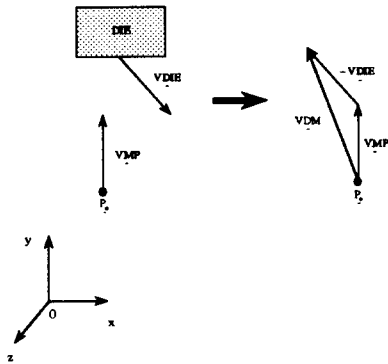


그림2 다이에서 본 소재의 상대속도 (VDM)

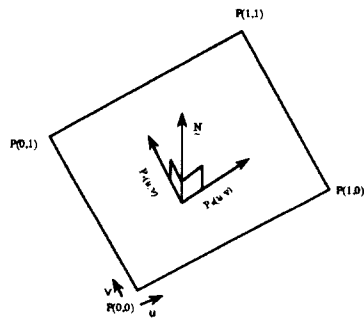


그림5 Bilinear 패치의 접촉점에서의 단위접선벡터 \tilde{P}_u 와 \tilde{P}_v

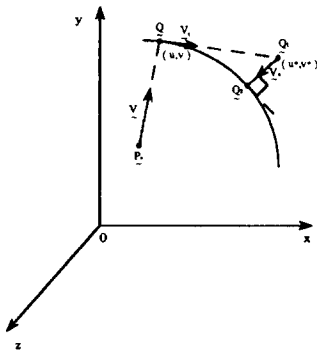


그림6 접촉후 접촉점의 운동과 수정점(매개변수의 보정)

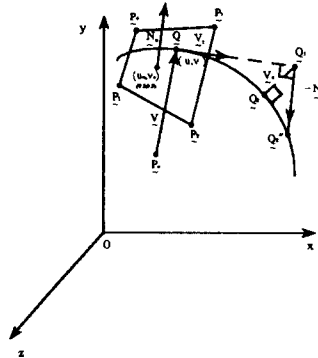


그림8 접촉후 접촉점의 운동과 수정점(중심점의 법선사용)

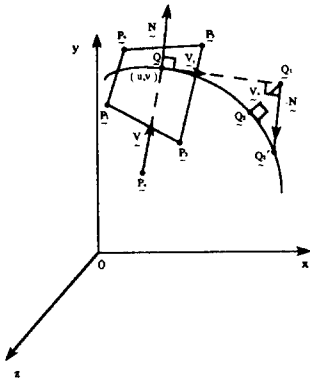


그림7 접촉후 접촉점의 운동과 수정점(접촉점의 법선사용)

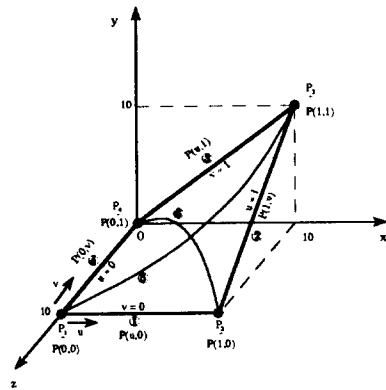


그림9 Bilinear패치와 Coons패치를 사용한 곡면테스트

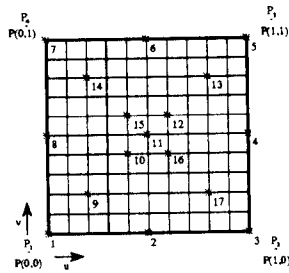


그림10 Bilinear패치상의 절점