

## 열린 상자형 구조물의 진동최소화기법에 관한 연구

<sup>0</sup>박 석 주\*, 오 재 응\*\*, 이 장 용\*\*\*, 박 성 현\*\*\*\*,

( A Study on the Vibration Minimization Techniques for the Open Box Type Structure )

( Sok-Chu Park, Jae-Eung Oh, Sung-Hyun Park, Jang-Yong Lee )

### 1. 서 론

전자계산기의 눈부신 발달에 힘입어 유한요소법이 구조해석의 대표적인 수단으로 확고한 자리를 잡고 있다. 그럼에도 불구하고 유한요소법은 해석하고자 하는 대상이 복잡하고 커질수록 요소의 수가 많아지게 되고, 따라서 자유도가 증가하게 되기 때문에 당연한 결과로 계산기의 용량이나 계산 시간이 문제가 되고 있다.

그래서 이러한 문제점을 극복하는 수단으로 부분구조합성법(component synthesis method ; CMS)이 등장하게 되었다. 부분구조합성법이란 전체구조물을 몇 개의 단순한 부분구조물로 나누어 각각에 대하여 해석한 후 적절한 결합조건하에서 이들을 재결합하여 해석하는 방법을 말한다.<sup>[1]</sup>

특히 선체와 같은 구조물은 많은 부재들이 매우 복잡하게 연결된 대형 구조물이므로 범용해석 프로그램 사용하여 진동해석을 시도한다 하더라도 입력자료를 작성하는데, 많은 노력과 시간이 소비된다. 더구나 모델링 과정에서 오차가 생기거나 중도 설계변경시에는 관련된 입력자료를 처음부터 다시 작성해야 하는 번거로움이 생긴다. 그러나 부분구조합성법을 이용하면 선체 구조를 실제 선박의 건조과정과 유사하게 여러 개의 부분구조로 분할하여 독립적으로 모델링할 수 있고, 선체의 특정부분의 형태가 바뀌는 경우 변경된 부분만을 다시 모델링

하고 그 외의 모델은 처음의 것을 그대로 사용하면 되므로 효율적으로 해석할 수 있다.

이렇게 하여 구조물을 정확히 모델링하고 정도 높게 해석한다고 하더라도 해석한 결과를 토대로 보다 좋은 특성을 가진 구조물을 만들 수 있는 방법을 제시할 수 없으면 완벽한 구조해석이 이루어졌다고 말할 수는 없다. 비록 설계도가 만들어진다 하더라도 과연 최적한 설계의 구조인가의 여부는 미지의 상태이기 때문이다. 이러한 이유로 구조해석은 최적구조설계<sup>[1][2]</sup>와 결부되어야 한다. 일반적으로 구조물의 최적화란 강도개선이나 재료절감을 통한 품질및 생산성의 향상 문제나 진동이 적고 조용한 특성을 가지는 구조물을 설계하는 동특성적인 문제에서 미려한 외관을 가지면서 사용하기 편리한 제품을 설계하는 것 등 많은 목표가 있을 수 있을 것이다. 특히 진동특성의 개선을 위한 구조변경에서는 여러가지 형태의 구조형상이나 치수 등에 대해 검토가 이루어져야 하고 이에 따른 수많은 반복적인 진동해석이 요구되므로 계산시간이 많이 필요하게 된다. 이러한 문제를 보다 간단히 해결하는데에는 감도해석법이 가장 적절할 것이다.

여기서 감도란 어떤 특정부분의 형상이나 치수 등을 바꾸었을 때 해석 결과값에 주는 영향의 정도를 나타내는 것으로, 감도해석법을 이용하면 가장 효율적인 구조변경을 이루어 낼 수 있다. 중량최소화의 문제라면 다른 강도나 진동 특성에 영향을 주지 않는 부분을 찾아내는 문제 즉, 감도가 가장 작은 부분을 찾아내어 그 부분의 중량을 덜어내면 되고, 고유진동수와 고유진동형의 변경문제 같은면 목

\* 한국해양대학교 이공대학 조선공학과

\*\* 한양대학교 공과대학 자동차공학과

\*\*\* 토달 소프트뱅크

\*\*\*\* 한국해양대학교 해사대학 조교

적하는 고유진동수와 고유진동형을 가장 크게 변경시킬 수 있는 장소를 찾아내는 문제, 즉 감도가 가장 큰 부분을 찾아내어 그 부분의 치수를 바꾸는 문제가 될 것이다.<sup>[3]</sup>

본 연구에서는 감도해석법과 최적구조변경법을 간략하게 논한 다음 열린 상자형 구조물의 진동특성을 고찰하고 진동특성을 개선하기 위한 방법으로 기둥(pillar)을 이용한 최적구조변경법을 제시하고자 한다.

## 2. 감도해석법과 최적구조변경법

### 2.1 감도해석법

감도란 구조물의 치수나 재료의 변경 등으로 인한 정적·동적 특성의 변화율을 말한다. 여기서 감도란 반응값의 설계변수에 대한 미분치로 정의된다. 고유진동수와 고유진동형의 감도를 구하는 많은 방법들이 제안되어 있으나 여기에서는 Fox의 방법<sup>[4]</sup>을 이용하기로 하고, 다음과 같은 운동방정식을 고려한다.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X\} = (-\lambda[M] + [K])\{X\} = \{0\} \quad (1)$$

이 고유치 문제의  $r$ 차의 고유치  $\lambda_r$ 에 대한 고유진동형벡터를  $\{\phi_r\}$ 이라고 두고, 설계변수  $\gamma$ 가  $\gamma_0$ 에서 미소량  $\Delta\gamma$ 만큼 변화해서

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma \quad (2)$$

이 되면  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\lambda_r$ ,  $\omega_r$ ,  $\{\phi_r\}$ 들도 따라서 변화하게 되는데, 설계변수에 대한 1차 미분항만을 고려하면 이것들은 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$[K] = [K_0] + \frac{\partial [K]}{\partial \gamma} \cdot \Delta\gamma = [K_0] + [K'] \Delta\gamma$$

$$[M] = [M_0] + [M'] \Delta\gamma$$

$$\omega_r = \omega_{0r} + \omega_r' \Delta\gamma \quad (3)$$

$$\lambda_r = \lambda_{0r} + \lambda_r' \Delta\gamma$$

$$\{\phi_r\} = \{\phi_{0r}\} + \{\phi_r'\} \Delta\gamma$$

또,  $\lambda_r = \omega_r^2$ 이므로

$$\lambda_r' = 2 \omega_r \omega_r'$$

$$\omega_r' = \lambda_r' / 2 \omega_r \quad (4)$$

이 되고, 따라서 고유진동수의 감도는 고유치의 감도에 의하여 구할 수 있게 된다.

중간 유도과정을 생략하고 고유치의 감도와 고유진동형의 감도를 나타내면 다음과 같다.

$$\lambda_r' = \{\phi_{0r}\}^T ([K'] - \lambda_{0r}[M']) \{\phi_{0r}\} \quad (5)$$

$$\{\phi_r'\} = \{\phi_{0r}\} \{\xi\} \quad (6)$$

단, 여기에서

$$\xi_s = \frac{\{\phi_{0s}\}^T (\lambda_{0s}[M'] - [K']) \{\phi_{0s}\}}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} \quad ; s \neq r \quad (7)$$

$$\xi_{s=r} = \frac{-\{\phi_{0r}\}^T [M'] \{\phi_{0r}\}}{2} \quad (8)$$

이다. 식(7)와 식(8)를 식(6)에 대입하면 고유진동형의 감도를 구할 수 있게 된다. 이 고유진동형의 감도도  $[K']$ ,  $[M']$ ,  $\lambda_{0r}$ ,  $\{\phi_{0r}\}$ 에 의하여 표시됨을 알 수 있다. 여기서 주의해야 할 점은, (6)식이 성립하는 경우는  $\{\phi_{0r}\}$ 가 정칙행렬이어야 한다는 점이다. 즉, 전 자유도의 상호 독립인 고유진동형이 구해졌을 때에만 유효하다는 것을 말한다. 그러나, 실제의 경우 대자유도의 모든 고유치와 고유벡터를 구하는 일은 거의 없고, 따라서 (6)식이 성립하지 않게 된다. 그러나, (7)식에서  $\lambda_{0s}$ 가  $\lambda_{0r}$ 에 비하여 훨씬 클 경우  $\xi_s$ 가 작게 되어 무시할 수 있게 되고, 따라서  $s$ 차 이상의 고유진동형은 구하지 않아도 되는 것을 알 수 있다.

$$\lambda_{0s} \gg \lambda_{0r} \quad (9)$$

즉, 모든 자유도의 고유진동형을 구하지 않고 주목하는 고유진동수보다 상당히 높은 고유진동수까지에 대한 고유진동형만을 구하여 쓰면 실용상 문제가 없다는 것을 의미한다. 또한 식(3)은 1차 미분항을 고려하였으므로 식(3)에서 얻어진 값들은 어차피 근사값이 될 수 밖에 없고, 비록 (6)식에서 많은 자유도를 채용하여도 큰 의미가 없는 것이다. 따라서 원하는 목표값을 얻기 위해서는 얻어진 변경량을 가지고 고유치 해석을 다시 하여 목표값에 도달했는지를 확인하는 반복과정을 거쳐서 최종의 설계량을 결정해야 할 것이다.

### 2.2 최적구조변경법

설명을 간단히 하기 위하여 감도행렬을  $[A]$ , 설

계를 변경 하고자 하는 장소의 설계변경량을 ( $\Delta\gamma$ ), 변경하고자 하는 목표값과 현재값과의 차를 ( $\Delta\omega$ )라 하면, 이의 최적화 문제는

$$[A] (\Delta\gamma) = (\Delta\omega) \quad (10)$$

로 나타낼 수 있다. 이 식은 1차 방정식을 나타내고 있지만, 감도행렬  $[A]$ 가 일반적으로 정방행렬이 아니므로 최소자승해를 구하는 문제이다.

먼저 구하는 미지수 즉, 변경하고자 하는 변경량의 수가 방정식의 계수보다 적은 경우는 통상 말하는 다음과 같은  $S$ 를 최소로 하는 최소자승해를 구하면 된다.

$$S = |[A] (\Delta\gamma) - (\Delta\omega)| \quad (11)$$

그러나, 일반적으로 구조변경의 문제는 위와는 달리 구하고자 하는 변경량의 개수가 방정식의 계수보다 많은 것이 특징이다. 예를 들면, 몇 개의 고유진동수를 특정 고유진동수로 변경시키고자 할 때, 변경할 수 있는 요소의 수는 수십 개에서 수백 개에 이르는 경우 등이다. 이 경우에는 무수히 많은 해를 가지게 되나 다음과 같은  $S$ 를 최소로 하는 제약을 가하면 해가 일의적으로 결정된다.

$$S = (\Delta\gamma)^T (\Delta\gamma) \quad (12)$$

이러한 경우를 의사최소자승법(pseudo least square method)의 문제라 부른다. 여기에서 행렬  $[A]$ 가 독립성을 가지고 있으면 이의 해는 다음과 같이 간단히 구해질 수 있다.

$$(\Delta\gamma) = [A]^T ([A][A]^T)^{-1} (\Delta\omega) \quad (13)$$

그러나, 원판 등과 같이 대칭구조물은 감도벡터가 같은 값을 가지는 경우가 생길 수 있다. 즉 감도의 대칭성이 존재하는 수가 있다. 바꾸어 말하면, 행렬  $([A][A]^T)$ 의 역행렬이 존재하지 않게 되어 이 문제를 푸는 것은 간단하지 않고 식(10)에 제약조건인 식(12)을 직접 부가하여 풀거나, 식(13)에서  $([A][A]^T)$ 의 일반 역행렬을 구하여 풀면 된다.<sup>[5]</sup>

### 3. 열린 상자형 구조물의

#### 진동해석과 최적구조변경

##### 3.1 구속형 모우드합성법에 의한 진동해석

본 연구에서 사용한 모델은 Fig.1과 같은 길이

200mm, 폭 400mm, 높이 250mm, 두께가 1.6mm인 열린 상자형 구조물이다. 이 구조물은 선체구조나 기타 일반구조물의 임의의 한 부분구조물이라고 간주해도 좋은 것이다. 모우드합성법에 의하여 해석하기 위해서 전체의 구조물을 Fig.2와 같이 4개의 부분구조로 나누어 모델링하였다.

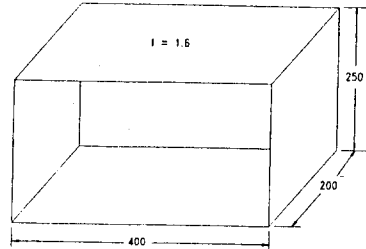


Fig. 1 Dimension of the open box type structure

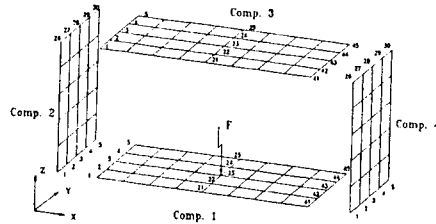


Fig. 2 Modeling of the open box type structure with 4 components

##### 1) 해석 및 실험 결과의 고찰

구조물 중앙에 기관(engine)이 설치되어 있다고 간주하여 1번 분개 23번 절점을 가진점으로 선택하여 실험과 부분구조합성법으로 해석을 하였다.

Fig.3은 1번 분개 23번 절점을 가진하여 같은 점의 응답에 대한 전달함수이고, Fig.4는 같은 가진에 대한 3번 분개 23번 절점의 응답에 대한 전달함수이다.

실선은 실험 결과이고 점선은 해석 결과인 바 좋은 결과를 보여 주고 있다.

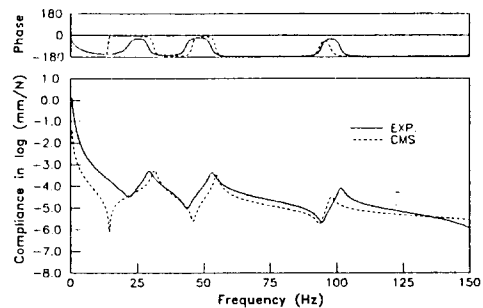


Fig. 3 Compliance of the structure(force 1-23, response 1-23)

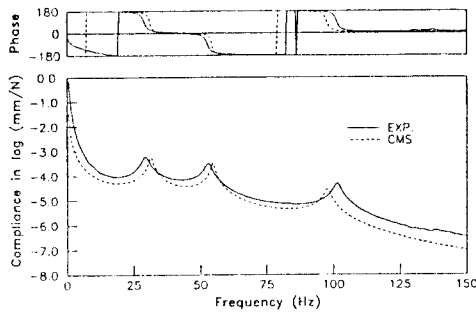


Fig. 4 Compliance of the structure(force 1-23, response 3-23)

### 3.2 감도해석 및 최적구조변경

본 연구에서는 해석한 구조물의 1번 분계의 23번 절점위치에 설치된 기관이 10 - 40Hz대에서 운전되고 있다고 가정하기로 한다. 따라서 운전영역내에는 21.2Hz와 31.4Hz인 두 개의 고유진동수가 존재하게 되는데 21.2Hz 경우에는 기관의 설치장소가 절(node)에 해당하기 때문에 비록 고유진동수와 일치하는 상태에서 운전하여도 별 문제가 없을 것이다.

Fig. 3에서 이 고유 진동수에 해당하는 공진현상은 발생하지 않음을 알 수 있다. 그러나 31.4Hz의 경우에는 공진 현상을 나타내므로 만약 이 주파수로 기관을 운전한다면 구조물에 커다란 부리가 따를 것이다. 따라서 이 고유진동수를 운전범위 밖으로 이동시킬 필요가 있는 것이다. 본 연구에서는 31.4Hz의 고유진동수를 45Hz로 변경시키기로 한다. 만약 구조상이나 공간활용 등에 문제가 없다면 이러한 구조물의 진동을 저감시키기 위한 변경요소로는 기둥(pillar)이 가장 효율적인 것이며, 실제로 선박 건조후에 진동 저감을 위해 많이 사용하는 요소이다. 여기에서도 기둥을 구조물의 상부와 하부사이에 설치한다고 가정하고 먼저 설치할 가장 최적의 장소를 찾기 위한 감도해석을 하였다. Table 1은 상부구조물과 하부구조물의 각 수직 절점사이에 기둥을 설치할 경우에 31.4Hz의 고유진동수에 대한 감도를 나타내고 있다. 스프링의 감도가 21번과 25번 절점사이에 가장 큰 값으로 나타나고 있다. 바꾸어 말하자면 고유진동형의 진폭이 가장 큰 위치에 기둥을 설치하면 된다는 것을 의미한다. 다음은 고유진동수를 변경시키기 위한 기둥의 스프링 상수값을 구하는 문제이다. 스프링 상수값을 구하면 최종 설

계변수인 기둥의 치수를 구할 수 있다. 기둥의 스프링 상수값의 초기치를 1로하여 반복계산을 수행하였다. Table 2에서 보듯이 단 2회의 반복계산으로 목적인 값에 완벽하게 일치하는 값의 고유진동수와 그에 대한 기둥의 스프링 상수값이 구해졌다.

### 3.3 구조변경후의 고찰

본 절에서는 앞 절에서 구해진 강성값을 이용해 모우드해석법으로 재해석(reanalysis)을 수행하여 그 결과를 고찰하고자 한다. 앞절의 Table 2에서 보듯이 재해석 결과 실제로 변경된 고유진동수는 45.0Hz로 처음에 목표로 했던 값과 완벽하게 일치하고 있으며, 이는 2번째 반복계산에서 얻을 수 있었다. Fig.5와 Fig.6은 구조변경전과 구조변경후의 전달함수의 변이를 보여주고 있다. Fig.5는 1번분계의 23번 절점을 가진했을 때 같은 점에서의 전달함수이고, Fig.6은 같은 가진 상태에서 3번 분계의 23번 절점에서의 전달함수를 나타내고 있다. 구조변경전의 31.4Hz에서의 공진점은 깨끗이 사라지고 없음을 알 수 있다. 또한 그 진동진폭이 31.4Hz에서 1/25로 줄었음을 알 수 있다.

Fig.7, 8, 9에는 구조변경전과 구조변경후의 고유진동수와 고유진동형의 변화를 같은 진동형의 묶음(group)으로 묶어서 나타내었다. 묶음 1은 기둥을 설치한 장소가 진동절이 되어 전혀 진동하지 않는 집단이고, 묶음 2는 기둥을 설치한 장소의 진동이 같은 방향 즉, 동위상(同位相)으로 진동하는 집단이고, 묶음 3은 기둥을 설치한 장소의 진동이 반대 방향 즉, 역위상(逆位相)으로 진동하는 집단이다. 어떠한 집단이든 고유진동형에는 전혀 변화가 없음을 알 수 있다. 이것은 모든 고유진동형이 대칭적이고, 또 기둥을 설치한 장소가 대칭적이며, 강성 또한 같기 때문에 생긴 당연한 결과일 것이다.

이 결과를 보다 구체적으로 고찰하기 위해 Table 3에 이들의 대비표를 나타내었다. 묶음 1은 고유진동수조차도 전혀 변화가 없다. 이 묶음은 고유진동형의 진동절에 기둥을 설치한 경우이므로 당연히 고유진동수에 영향을 주지 않았을 것이다. 묶음 2도 고유진동수에는 거의 변화가 없다. 이 경우는 비록

진동이 생기기는 하지만 상하 구조물이 같은 방향으로 움직이므로 마찬가지로 기둥의 영향을 받지 않을 것이다. 뒀음 3의 경우는 고유진동수에 커다란 변화가 있음을 알 수 있다. 1차 고유진동수가 31.41Hz에서 45.01Hz로 무려 13.61Hz나 이동하여 43.3%의 변화율을 보여 주고 있는 것이다. 고차로 가면서 그 정도는 작아지지만 영향은 역시 크다는 것을 알 수 있다. 이것은 상하구조물이 서로 반대 방향으로 진동한 고유진동형이므로 기둥의 강성이 이 진동형을 크게 구속한다는 것을 의미한다. 이 기둥의 강성을 더욱 크게하면 이 고유진동수를 더 한층 높일 수도 있을 것이다. 이 경우에는 두 번째의 공진 고유진동수인 551Hz의 진동수가 문제로 등장할 것이고, 이러한 경우에는 기둥을 써서는 문제 해결이 되지 않는다는 것을 의미한다. 아무튼 본 연구에서는 고유진동수를 옮기려면, 옮기려고 하는 고유진동수의 상대 고유진동 진폭이 가장 큰 장소의 강성을 바꾸면 된다는 결론을 얻을 수 있다.

Table 1 Sensitivities of each spring

comp. - nodal point (<)comp. - nodal point	sensitivities
1 - 6 <-> 3 - 6	0.19801D+00
1 - 7 <-> 3 - 7	0.18631D+00
1 - 8 <-> 3 - 8	0.18216D+00
1 - 9 <-> 3 - 9	0.18631D+00
1 - 10 <-> 3 - 10	0.19801D+00
1 - 11 <-> 3 - 11	0.76062D+00
1 - 12 <-> 3 - 12	0.68058D+00
1 - 13 <-> 3 - 13	0.65538D+00
1 - 14 <-> 3 - 14	0.68058D+00
1 - 15 <-> 3 - 15	0.76062D+00
1 - 16 <-> 3 - 16	0.13909D+01
1 - 17 <-> 3 - 17	0.12459D+01
1 - 18 <-> 3 - 18	0.12027D+01
1 - 19 <-> 3 - 19	0.12459D+01
1 - 20 <-> 3 - 20	0.13909D+01
1 - 21 <-> 3 - 21	0.16658D+01
1 - 22 <-> 3 - 22	0.14919D+01
1 - 23 <-> 3 - 23	0.14409D+01
1 - 24 <-> 3 - 24	0.14919D+01
1 - 25 <-> 3 - 25	0.16658D+01
1 - 26 <-> 3 - 26	0.13896D+01
1 - 27 <-> 3 - 27	0.12452D+01
1 - 28 <-> 3 - 28	0.12022D+01
1 - 29 <-> 3 - 29	0.12452D+01
1 - 30 <-> 3 - 30	0.13896D+01
1 - 31 <-> 3 - 31	0.75893D+00
1 - 32 <-> 3 - 32	0.67985D+00
1 - 33 <-> 3 - 33	0.65496D+00
1 - 34 <-> 3 - 34	0.67985D+00
1 - 35 <-> 3 - 35	0.75893D+00
1 - 36 <-> 3 - 36	0.19706D+00
1 - 37 <-> 3 - 37	0.17450D+00
1 - 38 <-> 3 - 38	0.16657D+00
1 - 39 <-> 3 - 39	0.17450D+00
1 - 40 <-> 3 - 40	0.19706D+00

Table 2 Change of the natural frequency and spring constants by modification

	origin	object	start	1st cal.	2nd cal.
natural freq. (Hz)	31.4	45.0		43.7	45.0
stiffness (N/mm) <sup>*</sup>	21-21 <sup>*</sup>		1.000	5.07	5.81
	25-25 <sup>*</sup>		1.000	5.07	5.81
ERROR (%)				0.18	0.0

\* Spring constants of the pillar to insert between comp.1 and comp.3

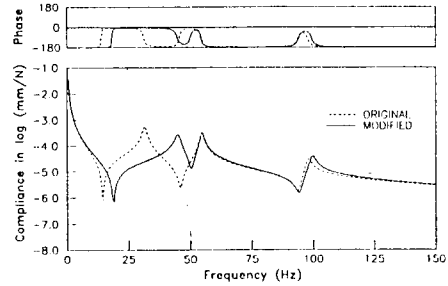


Fig. 5 Comparison of original and modified compliance(1/2)

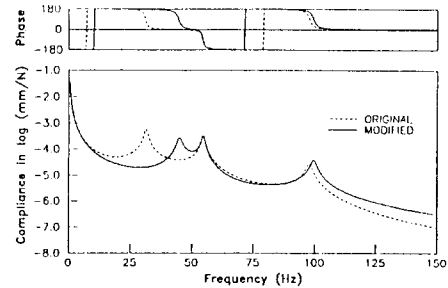


Fig. 6 Comparison of original and modified compliance(2/2)

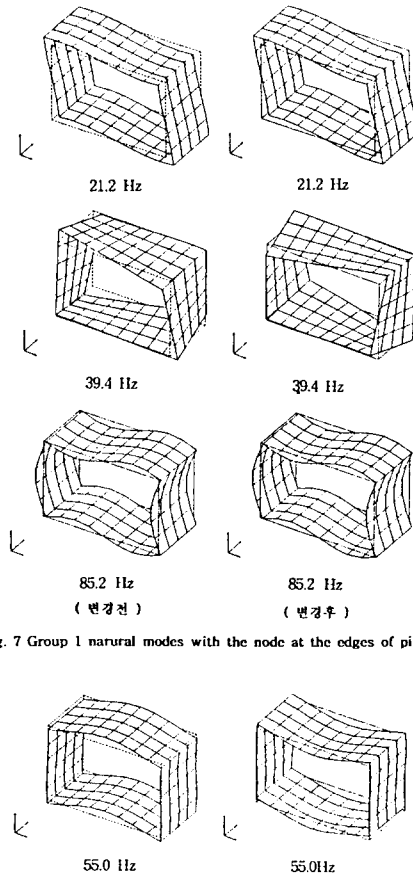


Fig. 7 Group 1 natural modes with the node at the edges of pillars

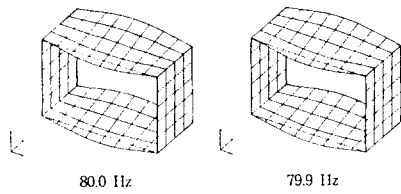


Fig. 8 Group 2 natural modes with the same phase at the edges of pillars

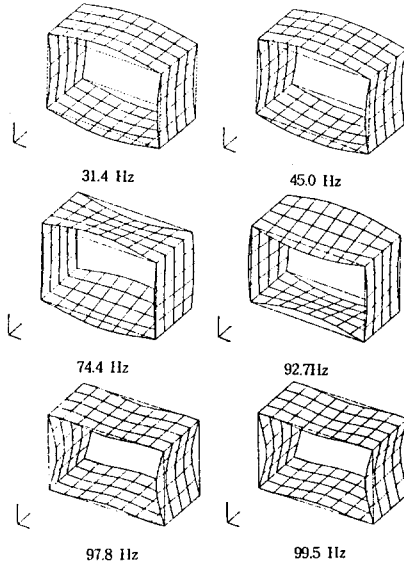


Fig. 9 Group 3 natural modes with the opposite phase at the edges of pillars

Table 3 Change of the natural frequency by structural modification

group order	1			2			3		
	1	2	3	1	2	1	2	3	
natural frequency(Hz)	21.2	39.4	85.2	55.0	80.0	31.4	74.4	97.8	
changes	21.2	39.4	85.2	55.0	79.9	45.0	92.7	99.5	
change rate(%)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	43.3	24.6	1.7	

#### 4. 결 론

본 연구에서는 열린 상자형 구조물의 최적 구조 변경법에 대해 고찰해 보았고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 감도해석법을 이용해 고유진동수에 대한 감도를 쉽게 구할 수 있었으며 이를 이용하여 최적의 구조변경 장소를 찾을 수 있다.
2. 최적구조변경법에 의해 구조의 변경량을 정량적으로 구할 수 있고, 고유진동수를 목표한 값으로 쉽게 이동시킬 수 있다.
3. 해석 대상구조물에서 주목한 진동수영역에서의 진폭 최대값을 약 1/25로 줄일 수 있었다.

4. 지자가 개발한 Program을 사용하여 차분법이 아닌 미분법에 의하여 감도를 계산하였고, 따라서 계산 절차나 시간등이 대폭 절약되었다. 본 연구에서는 기관의 운전 주파수 범위 밖으로 구조물의 고유진동수를 옮기는 최적구조변경법에 대해 살펴보았으나, 이 방법으로는 도저히 고유진동수를 운전범위 밖으로 옮기지 못하는 경우도 있다. 앞에서 고유진동수가 55Hz인 경우에 대해 언급하였듯이 기동의 설치로는 고유진동수를 전혀 옮길 수 없는 경우에 해당한다. 이러한 경우에는 다른 조치를 강구하지 않으면 안 된다. 기동의 설치 대신에 구조물의 치수를 변경하여 고유진동수를 옮기든지, 기관의 설치장소를 고유진동형의 절로 옮기든지, 고유진동형의 절을 기관의 설치 장소로 옮기는 등의 방법을 강구하여 구조물의 진동을 최소화하여야 할 것이다.

#### 참 고 문 헌

- [1] 박錫柱, 長松召男, "프레스 機械의 振動解析과 動特性的의 最適化", 韓國船用機關學會誌, 第14卷, 第3號, 1990, p.34
- [2] 양영순, "최적 구조설계 방법에 관한 새로운 전망", Proceeding of conference on structural engineering of ships and offshore units, 1993, p.7
- [3] 박식주, 왕지석, "감도해석법에 의한 구조물의 결합부 강성 산출에 관한 연구", 韓國船用機關學會誌, 第16卷, 第5號, 1992, p.60
- [4] R.L.Fox, "Rates of Changes of Eigen Values and Eigen Vectors", AIAA J., Vol.6, No.12, 1968.
- [5] 柳井晴夫, 竹内 啓, "射影行列, 一般行列, 特異値分解", 東京大學出版會, 1983, p.65