

탄성체 동역학에서 절점좌표계와 모우드좌표계 방법의 비교

0 신상훈*, 유완석**

(Comparative study of the nodal and the modal approach in the flexible dynamics)

(Sang-Hoon Shin and Wan-Suk Yoo)

1. 서론

탄성체 동역학 해석에 있어서 변형을 나타내기 위해 사용되는 좌표로는 크게 절점좌표와 모우드좌표로 구분된다. 상대적으로 적은 좌표수를 사용하는 모우드좌표가 기계나 항공, 우주 분야에선 일반적으로 많이 사용된다. 그러나, 모우드를 선정함에 있어서의 기준의 불확실함 등으로 인해, 모우드좌표는 많은 경험을 요구하게 된다. 모우드좌표에 비해 많은 시간이 걸리지만, 절점좌표의 사용은 누구나 쉽게 사용할 수 있음을 장점으로 한다.

본 연구에서는 두 가지 좌표로 탄성체 동역학의 운동방정식을 유도한 뒤, 슬라이더-크랭크 기구의 해석을 수행하여 그 결과를 서로 비교해 보고자 한다.

2. 탄성체 기구학

2.1 위치

그림 1에서 XY는 관성좌표계를 나타내며 xy는 물체에 고정된 이동좌표계이다. 물체 i의 xy좌표계에서 측정된 절점 j의 변형을 u_j , 변형이 없는 경우의 절점 j의 좌표를 s_j^0 라고 하면 변형 후의 절점 j의 위치는 다음과 같다.

$$s_j = s_j^0 + u_j \quad (1)$$

또한 XY좌표계에서 측정된 절점 j의 위치는 다음과 같다

$$r_j = r_i + A_i s_j \quad (2)$$

여기서 A_i 는 xy좌표계로 부터 XY좌표계로 변환하기 위해 사용되는 변환행렬이며, XY좌표계에 대한 xy좌표계의 상대각도 θ_i 를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

* 부산대학교 기계공학과 대학원

** 부산대학교 생산기계공학과

2.2 탄성 변형

절점 j의 변형은 다음의 식과 같이 표시할 수 있다.

$$u_j = E_y q_f \quad (4)$$

절점좌표의 경우, E_y 는 탄성체 i의 전체변형중에서 절점 j의 병진변위를 뽑아내는 투영행렬이며 절점의 갯수를 n 이라하면 $(2 \times (3 \times n))$ 인 행렬이다. q_f 는 $((3 \times n) \times 1)$ 인 절점좌표 벡터이다

모우드좌표계의 경우, E_y 는 탄성체 i의 전체변형 모우드행렬중에서 절점 j의 병진변위를 뽑아내는 모우드행렬이며 모우드의 갯수를 m 이라하면 $(2 \times m)$ 인 행렬이다. q_f 는 $(m \times 1)$ 인 모우드좌표 벡터이다.

2.3 속도

xy좌표계에 대한 절점 j의 속도는 다음과 같다.

$$\dot{s}_j = E_y \dot{q}_f \quad (5)$$

또한 탄성체 i의 절점 j의 절대속도는 다음과 같다.

$$\dot{r}_j = \dot{r}_i + \dot{A}_i s_j + A_i \dot{s}_j \quad (6)$$

$$= \dot{r}_i + B_i s_j \dot{\theta}_i + A_i E_y \dot{q}_f$$

여기서 B_i 는 $\dot{A}_i = B_i \dot{\theta}_i$ 로 정의된다.

2.4 가속도

탄성체 i의 절점 j의 절대가속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{r}_j &= \ddot{r}_i + B_i s_j \ddot{\theta}_i + A_i E_y \ddot{q}_f + 2B_i E_y \dot{q}_f \dot{\theta}_i - A_i s_j \dot{\theta}_i^2 \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{r}_i \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + 2B_i E_y \dot{q}_f \dot{\theta}_i - A_i s_j \dot{\theta}_i^2 \end{aligned} \quad (7)$$

3. 변형모우드(Deformation Mode)

탄성체의 해석에 사용되는 모우드의 종류는 크게 진동모우드(dynamic mode)와 정적모우드(static mode)의 두 종류로 나뉘어진다. 또한, 정

적모우드는 부착모우드(attachment mode)와 구속 모우드(constraint mode)로 나눌수 있다[2].

3.1 부착모우드(Attachment Mode)

부착모우드는 어떤 절점에 한 방향으로 단위 힘을 가했을때 생기는 변형모우드를 뜻한다. 또한 부착모우드가 진동모우드와 함께 사용되는 경우 부착모우드에서 진동모우드의 성분을 제거한 부착모우드를 잔류부착모우드(residual attachment mode)라 한다.

3.2 구속모우드(Constraint Mode)

구속모우드는 어떤 절점에 한 방향으로 단위 변위를 가했을때 생기는 변형모우드를 뜻하며, 진동모우드와 구속모우드가 함께 사용되는 경우에 진동모우드에 대하여 직교화를 실행한 구속 모우드를 잔류구속모우드(residual constraint mode)라 한다.

4. 탄성체 동역학

4.1 탄성체의 운동방정식

절점 j의 가상변위는 위의 식 (6)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.[1]

$$\delta r_{ij} = \begin{bmatrix} I & B_j s_{ij} & A_j E_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_i \\ \delta \theta_i \\ \delta q_f \end{bmatrix} \quad (8)$$

가상변위의 원리를 사용하여 집중질량으로 가정한 탄성체의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$-\sum_{j=1}^n m_j \delta r_{ij}^T \ddot{r}_{ij} + \sum_{j=1}^n \delta r_{ij}^T f_{ij} = \int_V \delta \epsilon \tau dV \quad (9)$$

식(7)과 (8)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$M_i \ddot{q}_i - Q_i = 0 \quad (10)$$

여기서 $q_i = \begin{bmatrix} r_i^T & \theta_i & q_f^T \end{bmatrix}^T$ 이며 M_i, Q_i 는 다음과 같다.

$$M_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n m_j I & B_j \sum_{j=1}^n m_j s_{ij} & A_j \sum_{j=1}^n m_j E_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n m_j s_{ij}^T s_{ij} & \sum_{j=1}^n m_j s_{ij}^T I^T E_{ij} \\ SYM. & & \sum_{j=1}^n m_j E_{ij}^T E_{ij} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} A_i \sum_{j=1}^n m_j c_{ij} - 2 \sum_{j=1}^n m_j d_{ij} + \sum_{j=1}^n f_{ij} \\ \sum_{j=1}^n m_j s_{ij}^T I^T c_{ij} - 2 \sum_{j=1}^n m_j (B_j s_{ij})^T d_{ij} + \sum_{j=1}^n (B_j s_{ij})^T f_{ij} \\ \sum_{j=1}^n m_j E_{ij}^T c_{ij} - 2 \sum_{j=1}^n m_j (A_j E_{ij})^T d_{ij} + \sum_{j=1}^n (A_j E_{ij})^T f_{ij} - K_i q_f \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{여기서 } c_{ij} = s_{ij} \hat{\theta}_i^T, d_{ij} = B_j \dot{u}_{ij} \hat{\theta}_i, I^* = B_i^T A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 유한요소법으로 부터 구한 계의 강성행렬을 K_i 라 하면 모우드좌표의 경우 $K_i = E_i^T K_i E_i$ 이며, 절점좌표의 경우 $K_i = K_i$ 가 된다. 여기서, E_i 는 탄성체 i의 모우드행렬을 나타낸다.

4.2 구속계의 운동방정식

기하학적 구속조건을 갖는 전체계에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M = \text{diag}[M_1, M_2, \dots, M_n]$$

$$Q = [Q_1^T, Q_2^T, \dots, Q_n^T]^T$$

$$\gamma = -(\Phi_q \ddot{q})_q - 2\Phi_{q, \dot{q}} \dot{q} - \Phi_u$$

여기서 Φ_q 는 기하학적 구속조건 식의 자코비안 행렬, λ 는 라그랑지 곱수를 나타낸다.

5. 수치예제

5.1 슬라이더-크랭크 기구

초기상태가 그림 2와 같은 슬라이더-크랭크 기구에서 연결봉만 탄성체로 가정하였다. 절점 2에 연결봉 질량의 3배되는 집중하중이 중력방향으로 작용하고 있다. 크랭크가 2400rpm으로 회전할 때 여러 경우의 탄성좌표에 대하여 연결봉의 변형 및 반력을 비교하였다.

크랭크는 길이 1.524E-01 m, 질량 3.781E-02 kg, 질량관성모우먼트 7.328E-05 kg·m², 슬라이더는 질량 3.781E-02 kg이다. 연결봉은 지름 6.350E-03 m, 길이 3.048E-01 m, 질량 7.562E-02 kg, 탄성계수가 2.0E+11 N/m², 길이가 같은 4개의 요소로 구성하였으며, 1번 절점의 xy방향 변위와 5번 절점의 y방향의 변위를 구속하여 진동모우드를 구하였다. 연결봉의 유한요소 모델은 그림 3에 나타내었으며, 부착모우드와 잔류부착모우드, 구속모우드와 잔류구속모우드의 형상을 각각 그림 4와 그림 5에 나타내었다.

5.2 연결봉의 변형 및 반력 비교

그림 6에서 그림 9는 절점 3의 xy좌표계에 대한 y 방향의 변형을 각 경우에 대하여 나타내었다.

그림 10에서 그림 13은 연결봉과 슬라이더를 연결하는 회전조인트에서 생기는 x 방향의 반력을 각 경우에 대하여 나타내었다.

그림 14에서 그림 17은 같은 회전조인트에서 생기는 y 방향의 반력을 각 경우에 대하여 나타내었다.

그림 6, 10, 14는 부착모우드와 구속모우드를 각각 단독으로 사용하였을 때를 비교한 것으로 두 결과는 거의 일치한다.

그림 7, 11, 15는 부착모우드와 구속모우드를

각각 진동모우드와 함께 사용한 것과 진동모우드만을 사용하였을 때를 비교한 것으로 세 결과는 거의 일치한다. 본 예제의 경우는 정적모우드의 영향이 거의 없는 것을 알 수 있다.

그림 8, 12, 16은 구속모우드를 단독으로 사용하였을 때와 진동모우드와 함께 사용한 경우를 비교하였다. 구속모우드 단독으로는 부족함을 알 수 있다.

그림 9, 13, 17은 절점좌표를 사용하였을 때와 구속모우드와 진동모우드를 함께 사용한 경우를 비교하였다. 절점 변형의 경우는 두 결과가 일치 하였으나 조인트 반력의 경우, 절점좌표의 결과는 모우드좌표의 결과를 평균값으로하여 진동하고 있음을 알 수 있다.

6. 결론

절점의 변형에 관해서는 모우드좌표와 절점좌표의 결과가 잘 일치한다. 그러나 조인트 반력의 경우는 절점좌표의 결과가 모우드좌표의 결과를 평균값으로하여 진동하고 있음을 알 수 있다

7. 참고문헌

- (1) E. J. Haug, 1989, "Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Vol. I: Basic Methods", Allyn & Bacon.
- (2) R. R. Craig, Jr., 1981, "Structral Dynamics", Wiley.

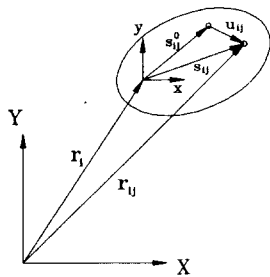


Fig.1 Position of Node j

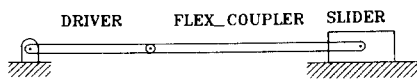


Fig.2 Slider-Crank Mechanism with Flexible Connecting Rod

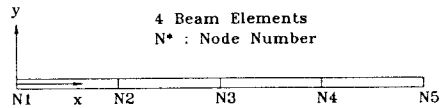


Fig.3 Finite Element Model of the Connecting Rod

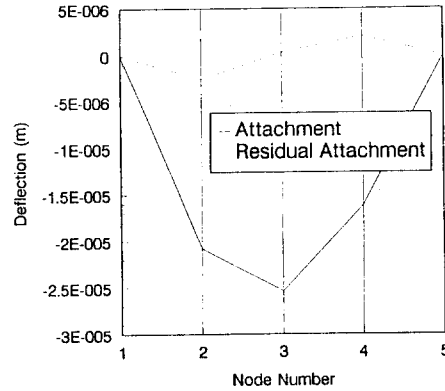


Fig.4 Attachment and Residual Attachment Mode

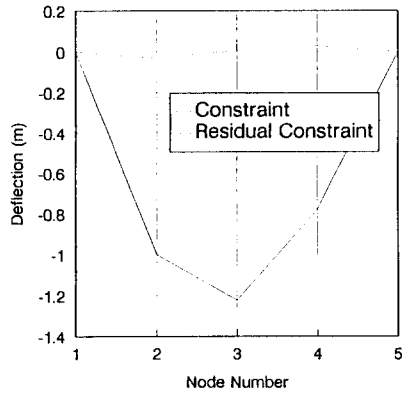


Fig.5 Constraint and Residual Constraint Mode

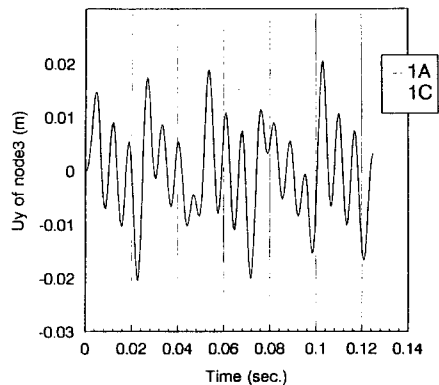


Fig.6 Local y Deformation at Node 3 (1A and 1C)

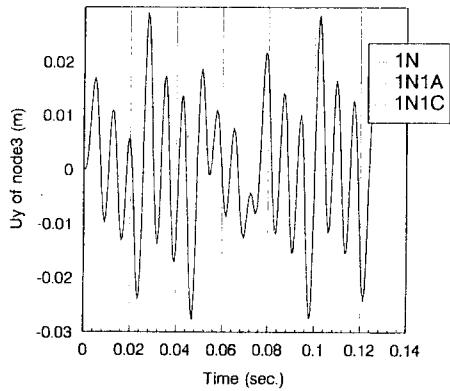


Fig.7 Local y Deformation at Node 3 (1N, 1N1A, and 1N1C)

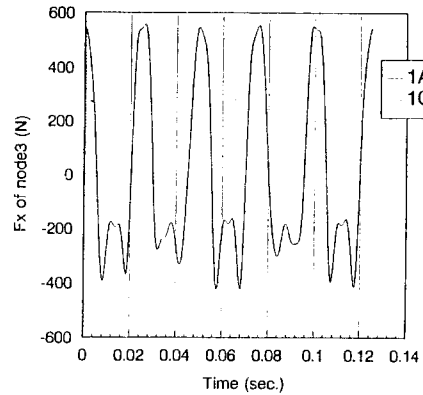


Fig.10 Local x Reaction Force at Node 3 (1A and 1C)

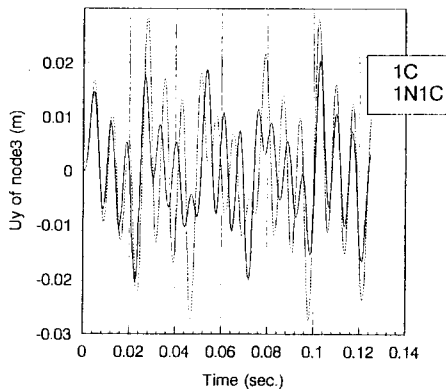


Fig.8 Local y Deformation at Node 3 (1C and 1N1C)

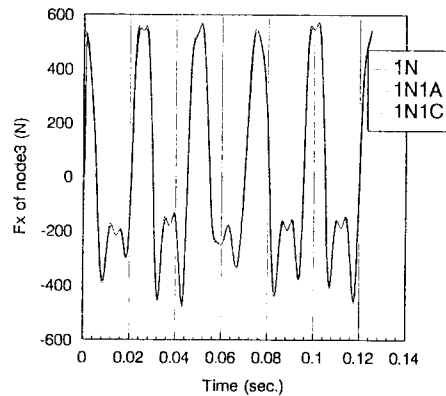


Fig.11 Local x Reaction Force at Node 3 (1N, 1N1A, and 1N1C)

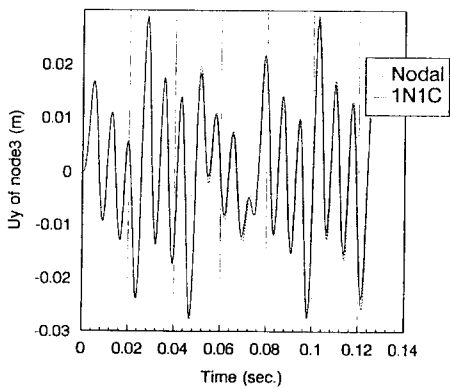


Fig.9 Local y Deformation at Node 3 (Nodal and 1N1C)

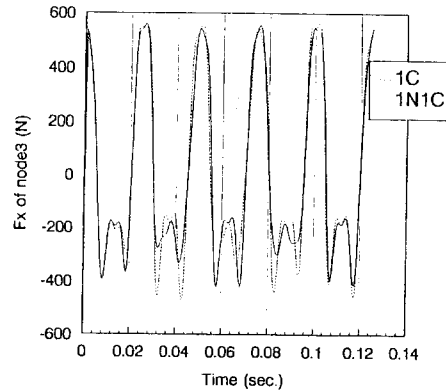


Fig.12 Local x Reaction Force at Node 3 (1C and 1N1C)

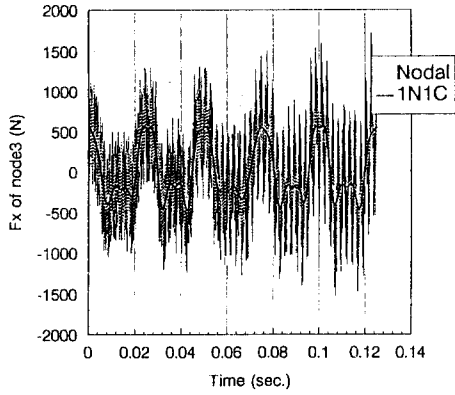


Fig. 13 Local x Reaction Force at Node 3 (Nodal and 1N1C)

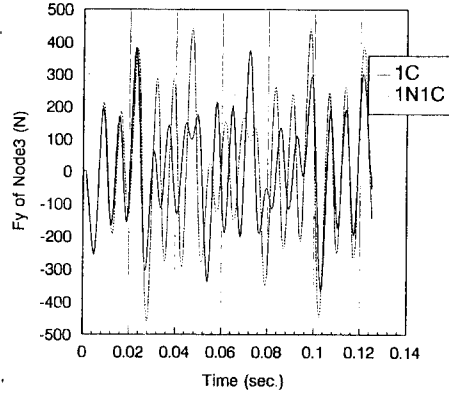


Fig. 16 Local x Reaction Force at Node 3 (1C and 1N1C)

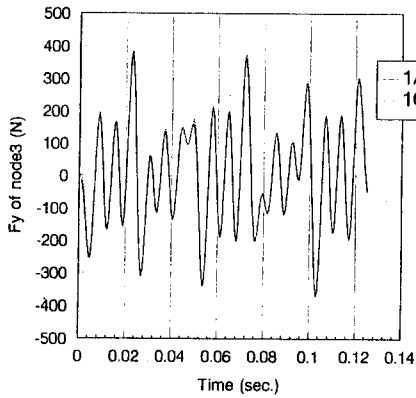


Fig. 14 Local x Reaction Force at Node 3 (1A and 1C)

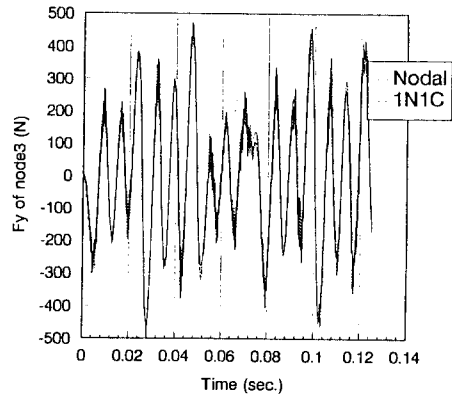


Fig. 17 Local x Reaction Force at Node 3 (Nodal and 1N1C)

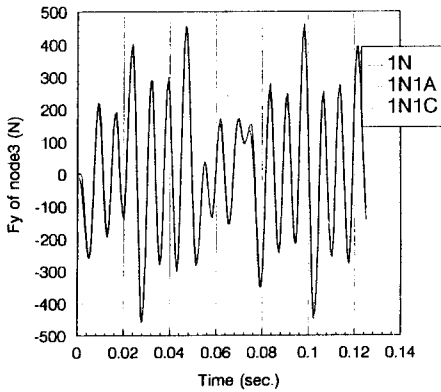


Fig. 15 Local x Reaction Force at Node 3 (1N, 1N1A, and 1N1C)