

경사진 내부 직선상에서 변위가 구속된 평판에 대한 이중푸리에 사인시리즈 방법의 자유진동해석

*윤종옥, *이장무, *김윤영*

(DOUBLE FOURIER SINE SERIES METHOD FOR CALCULATING THE FREE VIBRATION OF A PLATE WITH INTERIOR INELASTIC SKEWED LINE CONSTRAINT)

(Jong-Ouk Youn, Jang-Moo Lee, Youn-Young Kim)

기호

- D = 평판의 굽힘강성
- a, b = 평판의 길이 및 폭
- h = 평판의 두께
- E = 탄성계수
- $w(x, y)$ = 모달 변위함수
- $f(x, y, t)$ = 횡방향 변위
- ν = 프와송 비
- ω = 원 주파수
- Ω = 주파수 매개변수 = $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$
- ρ = 밀도
- Δ = 라플라스 연산자
- Φ = 범함수
- δ = 변분 연산자
- $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{0n}, C_{m0}, D_{mn}, E_{mn}, E_{m0}, F_{mn}$
= 푸리에 시리즈의 계수
- c_1, c_2 = 내부변위가 구속되는 직선의 양단
- $C_{i,j}$ = 주파수 행렬식의 요소
- $S_{i,j}$ = 축약된 주파수 행렬식의 요소
- λ_{ij} = 라그랑지 상수
- $u_i, \epsilon_i, v_i, \tau_i$ = 모서리에서의 변위
- $V_x(x, y), V_y(x, y)$ = 전단력
- $M_x(x, y), M_y(x, y)$ = 굽힘모멘트
- θ = 변위가 구속되는 직선의 기울기
- U = 평판의 탄성 에너지
- K = 평판의 운동 에너지
- m, n, k, p, q, r, s = 푸리에 계수

- d = 변위가 구속되는 직선의 길이
- F = 자유단 경계조건
- C = 고정단 경계조건
- S = 단순지지단 경계조건
- $(\dots)_x$ = $\partial(\dots)/\partial x$
- $(\dots)_{xx}$ = $\partial^2(\dots)/\partial x^2$
- $(\dots)_y$ = $\partial(\dots)/\partial y$
- $(\dots)_{yy}$ = $\partial^2(\dots)/\partial y^2$
- $(\dots)_{xxx}$ = $\partial^3(\dots)/\partial x^3$
- $(\dots)_{yyy}$ = $\partial^3(\dots)/\partial y^3$
- $(\dots)_{xy}$ = $\partial^2(\dots)/\partial x \partial y$
- $(\dots)_{xxy}$ = $\partial^3(\dots)/\partial x^2 \partial y$

1. 서론

구조물의 자유진동해석에는 많은 방법이 있으나 그중 대표적인 것은 다음과 같은 두 방법을 들 수 있다.

- (1) 미분방정식 접근법(Differential Equation Approach)
- (2) 변분법 접근법(Variational Approach)

일반적으로 레일리-릿츠(Rayleigh - Ritz) 방법은 비교적 정확하게 고유진동수를 구하는데 효과적인 변분방법이다. 이 방법은 가정된 모달함수로 구성되어지는 구조물의 에너지를 최소화시키는 방법이다. 그러나 이 방법은 고유진

* 서울대학교 기계설계학과

동수를 비교적 정확히 구할 수 있지만 모두드를 정확히 계산하지 못하는 단점을 가지고 있다. 본 논문에서 사용된 안정화 탄성에너지방법(method of using stationary potential energy)법과 다른 변분법과의 특이한점은 경계조건에 무관하게 이중 사인시리즈(double sine series)를 모달함수로 이용한 것이다. 푸리에 시리즈로 이루어지는 라그랑지 상수(Lagrange multipliers)를 이용하여 고정단에서 기울기가 0 이 되도록 구속하고 내부의 경사진 직선상의 변위가 구속되도록 한다. 그리고 스토크 변환(Stokes' transformation)을 통해 이중사인시리즈로 자유경계단의 조건을 만족시키게 된다.

내부에 변위가 구속되는 평판은 일반적으로 슬랩브리지(slab bridge) 또는 상자형태의 평판 구조물 그리고 선박, 항공기등의 바닥(floor) 등에 널리 이용된다. 우선 내부의 대각선상(diagonally ssupported)에서 변위가 구속되고 모든 변이 단순 지지된(simply supported) 경우에 대해서는 Gorman^[3]이 Navier방법에 의한 이중 사인시리즈로 고유진동수를 구하였다. Takahasi 와 Chishaki^[10]는 직선상의 변위 구속조건을 등간격의 점지지로 표현하여 고유진동수와 모두드를 구하였다. Kim과 Dickinson^[8]은 다항식의 함수를 사용하여 상자형태(box type)의 평판 구조물을 해석하였다. 본 연구는 평판 구조물의 동적 특성들을 여러 경계조건하의 평판에 내부 경사진 직선상에서 변위가 구속될 때 구속직선의 위치와 경사진 구속직선의 각도에 따라 진동 해석을 하였다.

2. 이론적 과정 (Theoretical Procedure)

2.1 안정화 탄성 에너지 방법

평판의 진동해석시 탄성에너지(potential energy)와 운동에너지(kinetic energy)는 다음과 같이 표현되어진다.

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[(\Delta w)^2 - 2(I - \nu) \left[w_{,xx} w_{,yy} - (w_{,xy})^2 \right] \right] dx dy$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b w_{,t}^2 dx dy \quad (1)$$

평판이론에서의 경계조건은 각각의 변에서 굽힘모멘트 및 전단력으로 표시되어진다.

$$\begin{aligned} V_x(x, y) \text{ or } w(x, y) \Big|_{x=0, a}, \\ V_y(x, y) \text{ or } w(x, y) \Big|_{y=0, b}, \\ M_x(x, y) \text{ or } w_{,x}(x, y) \Big|_{x=0, a}, \\ M_y(x, y) \text{ or } w_{,y}(x, y) \Big|_{y=0, b} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} V_x &= -D[w_{,xxx} + (2 - \nu)w_{,xyy}], \\ V_y &= -D[w_{,xyx} + (2 - \nu)w_{,xyx}], \\ M_x &= w_{,xx} + \nu w_{,yy}, \\ M_y &= w_{,yy} + \nu w_{,xx} \end{aligned} \quad (3)$$

안정화 탄성 에너지법은 변분원리 $\delta(U_{\max} - T_{\max}) = 0$ 에 기초하고 있다. 변분은 기하학적 경계조건(geometric boundary condition)을 위배하지 않는 모든 변위들에 관해서 미분을 한 후 각 변위들에 대하여 최소가 되도록 한다.

여기서 (2)식의 전단력과 굽힘모멘트는 고유 경계조건(natural boundary condition)과 관련되어 있으며 변위들과 기울기들은 기하학적 경계조건과 연관되어 있다.

2.2 모달 변위함수

일반적으로 임의의 모두드와 변위는 다음과 같이 이중사인시리즈로 표시할수 있다.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

$$f(x, y, t) = w(x, y) \sin(\omega t) \quad (4)$$

그리고 평판의 모서리(corner) 및 변(boundary line)에서 가정된 변위는 아래와 같이 사인시리즈로 표시한다.

$$\begin{aligned} w(a, y) &= \sum_{p=1}^P \mu_p \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right) \quad (0 < y < b, x = a), \\ w(0, y) &= \sum_{q=1}^Q \varepsilon_q \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (0 < y < b, x = 0), \\ w(x, b) &= \sum_{r=1}^R \tau_r \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \quad (0 < x < a, y = b), \\ w(x, 0) &= \sum_{s=1}^S \nu_s \sin\left(\frac{s\pi x}{a}\right) \quad (0 < x < a, y = 0), \\ w(0, 0) &= u_c, \quad w(0, b) = \varepsilon_c, \\ w(a, 0) &= v_c, \quad w(a, b) = \tau_c. \end{aligned} \quad (5)$$

위의 사인시리즈는 형태가 단순하고 수식적으로 처리시 단순화 하기위하여 직교성(orthogonality)을 가져야 한다. 그러나 가장한 모달함수가 특정한 경계조건을 만족시킬 필요는 없으며 라그랑지 상수들을 이용하여 각각의 기하학적 경계조건들을 만족시키도록 한다. 그러므로 안정화 탄성 에너지법은 고유 경계조건을 만족시킬 필요가 없다.

3. 식의 구성화(Formulation)

3.1 이중 사인 시리즈

Fig.1 과 같이 내부에 경사진 직선상에서 변위가 구속되는 평판을 고려하자. 여기서 $w(x, y)$ 가 평판의 내부에서 이중사인시리즈로 표시될 수 있는 함수라고 생각하고 모달함수의 미분값들은 코사인-사인시리즈로 표시될때 각각의 시리즈의 계수들은 일반적인 방법으로 계산되어진다. 이중사인시리즈는 모든 변이 모두 단순 지지된 평판에 내부 변위의 구속조건 및 고유 경계조건을 제외하고는 모든 기하학적 경계조건을 만족시킨다. 여기서 모달함수가 기하학적 경계조건을 만족시키지 못할 경우 라그랑지 상수를 이용하여 기하학적 경계조건을 구속시킬 수 있다.

모달함수의 기하학적 경계조건 및 구속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_{,x}(0, y) = w_{,x}(a, y) &= 0, \\ w_{,y}(x, 0) = w_{,y}(x, b) &= 0, \\ w(u) &= 0, \\ w(0, c_1) &= 0, \\ w(a, c_2) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

모달함수의 각각의 미분값(derivatives)들은 다음으로 표시된다.

$$\begin{aligned} w_{,x}(x, y) &= \sum_{n=1}^N B_{0n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ (0 \leq x \leq a, 0 < y < b) \\ w_{,xx}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ (0 < x < a, 0 < y < b) \\ w_{,xy}(x, y) &= D_0 + \sum_{m=1}^M D_{m0} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^N D_{n0} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b) \\ w_{,y}(x, y) &= \sum_{n=1}^M E_{n0} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ (0 < x < a, 0 \leq y \leq b) \\ w_{,yy}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ (0 < x < a, 0 < y < b) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 스토크변환을 이용하면 각각의 푸리에 시리즈의 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{0n} &= \frac{2}{ab} \int_0^b \left[\left(\sum_{p=1}^p \mu_p \sin \frac{p\pi y}{b} \right) - \left(\sum_{q=1}^q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi y}{b} \right) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ B_{mn} &= \frac{m\pi}{a} A_{mn} \\ &\quad + \frac{4}{ab} \int_0^b \left[\left(\sum_{p=1}^p \mu_p \sin \frac{p\pi y}{b} \right) (-1)^m - \left(\sum_{q=1}^q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi y}{b} \right) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ C_{mn} &= -\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 A_{mn} \\ D_{0n} &= \frac{1}{ab} [\tau_c - \varepsilon_c - \nu_c + \mu_c] \\ D_{0n} &= \frac{2}{ab} \left[\tau_c (-1)^n - \nu_c (-1)^n - \varepsilon_c + \mu_c (-1)^n + \right. \\ &\quad \left. \frac{n\pi}{b} \int_0^b \left[\left(\sum_{p=1}^p \mu_p \sin \frac{p\pi x}{b} \right) (-1)^n - \left(\sum_{q=1}^q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi x}{b} \right) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right] \\ D_{m0} &= \frac{2}{ab} \left[\tau_c (-1)^m - \varepsilon_c - \nu_c (-1)^m + \mu_c + \right. \\ &\quad \left. \frac{m\pi}{a} \int_0^a \left[\left(\sum_{r=1}^r \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} \right) (-1)^n - \left(\sum_{s=1}^s \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \\ D_{mn} &= \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} A_{mn}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{m0} &= \frac{2}{ab} \int_0^a \left[\left(\sum_{r=1}^r \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} \right) - \left(\sum_{s=1}^s \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \\ E_{mn} &= \frac{n\pi}{b} A_{mn} \\ &\quad + \frac{4}{ab} \int_0^a \left[\left(\sum_{r=1}^r \tau_r \sin \frac{r\pi x}{a} \right) (-1)^n - \left(\sum_{s=1}^s \nu_s \sin \frac{s\pi x}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \\ F_{mn} &= -\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 A_{mn} \end{aligned} \quad (8)$$

자유경계(free boundary condition), 고정경계(clamped boundary condition), 단순지지경계(simply supported boundary condition)의 경계조건에 대하여 우선 고정단인 경우는 경계 변(boundary)에서의 기울기가 0 이 되도록 구속을 한다. 자유 경계시에는 모서리 및 경계 변에서의 변위를 가정하여 에너지가 최소가 되도록 변위를 계산하게 된다. 변분법에 의하여 전단력 경계조건 $V(x, y) = 0$ 은 기하학적 경계조건이 아니므로 고려되지 않는다.

$$\begin{aligned} w_{,x}(a, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} (-1)^m \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0, \\ w_{,x}(0, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0, \\ w_{,y}(x, b) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} (-1)^n \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 0, \\ w_{,y}(x, 0) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Fig. 1에서와 같이 X-Y좌표축상에서의 내부 구속조건부의 위치를 U-V 좌표축으로 회전이동시 좌표변환은 다음으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= u \cos(\theta), \\ \bar{y} &= c + u \sin(\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

그리고 각 좌표상에서의 구속조건은 다음으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi \bar{x}}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi \bar{y}}{b}\right) &= 0 \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi u \cos(\theta)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi [c + u \sin(\theta)]}{b}\right) &= 0 \\ (0 \leq u \leq d) \end{aligned} \quad (11)$$

변분 과정은 다음의 범함수(functional)을 최소가 되도록 하여야 한다.

평판의 진동해석시 범함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi &= (U_{\max} - T_{\max}) + \int_0^b \sum_{k=1}^K \lambda_{k1} \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) w_{,x}(a, y) dy \\ &\quad + \int_0^b \sum_{k=1}^K \lambda_{k2} \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) w_{,x}(0, y) dy + \int_0^a \sum_{k=1}^K \lambda_{k3} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) w_{,y}(x, b) dx \\ &\quad + \int_0^a \sum_{k=1}^K \lambda_{k4} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) w_{,y}(x, 0) dx + \int_0^d \sum_{k=1}^K \lambda_{k5} \sin\left(\frac{k\pi u}{d}\right) w(u) du \\ &\quad + \lambda_1 \sum_{p=1}^p \mu_p \sin \frac{p\pi c_2}{b} + \lambda_2 \sum_{q=1}^q \varepsilon_q \sin \frac{q\pi c_1}{b} \end{aligned} \quad (12)$$

라그랑지 상수들에 의하여 구속되어진 기하학적 경계조건들은 각각의 경계변과 내부 구속조건이 있는 위치를 따라 적분되어야 한다. 여기서 라그랑지 상수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 들은 평판의 경사진 직선상에서 변위가 구속되도록 하기 위한 상수이며 이는 힘 (force)과 관련된 양이다. 그 이외에 라그랑지 상수 $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \lambda_{k3}, \lambda_{k4}$ 들은 각 변에서 기울기가 0이 되도록 하기 위한 값으로 모우먼트(moment)와 관련된 양이다. 그리고 안정화 조건에 의하여 얻어진 식들은 다음과 같이 선형방정식의 형태로 표시된다.

$$[C_{i,j}] \{A_{mm}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{k5}, \mu_c, \epsilon_c, \tau_c, v_c, \mu_p, \epsilon_p, \tau_p, v_p\}^T = \{0\} \quad (13)$$

윗 식은 다음과 같이 부 행렬(submatrix)들로 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$X_1 = \{A_{mm}\}^T$$

$$X_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{k5}, \mu_c, \epsilon_c, \tau_c, v_c, \mu_p, \epsilon_p, \tau_p, v_p\} \quad (14)$$

정축약과정(static condensation)에 의하여 구성되어지는 행렬식은 다음과 같다.

$$[S_{i,j}] \{X_2\} = \{0\} \\ |S_{i,j}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, (2M + 2N + 5K + 6)) \quad (15)$$

엄밀해는 위의 행렬식(determinant)이 0 이될때 구해진다. 주파수 행렬식(frequency determinant)은 대칭(symmetry)이며 내부 변위 구속조건과 경계조건을 만족시킴으로서 구성되어진다. 고유진동수는 이 식에서 변수로 표시된다.

3.3 모달 변위 함수

고유진동수는 주파수 매개변수 (frequency parameter)인 Ω 에 따라 행렬식이 0 이 될 때까지 모니터함으로서 구해지며 고유진동수가 구해진 후 라그랑지 상수들의 상대적인 비와 경계부에서의 변위 그리고 이중 사인 시리즈의 계수들을 구함으로써 모우드를 계산할 수 있다. 여기서 모달함수의 절대적인 값보다는 상대적인 비율이 중요하다.

4. 주파수 행렬식의 예 (Examples of frequency determinant)

4.1 C-C-C-C 경우 내부 변위가 구속되는 평판

우선 모든 경계변이 고정된 경우 경계조건과 내부 구속조건은 다음과 같다.

$$w(a, y)_x = 0, w(0, y)_x = 0, w(x, b)_y = 0, \\ w(x, 0)_y = 0, w(u) = 0 \quad (16)$$

여기서 고유진동수는 식 (15)의 $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \lambda_{k3}, \lambda_{k4}, \lambda_{k5}$ 에 영향을 받는다. 구성되어진 행렬식과 구성방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[S_{i,j}] \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{k5}\}^T = \{0\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K) \\ |S_{i,j}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 5K) \quad (17)$$

4.2 S-S-S-S 경우 내부 변위가 구속되는 평판

모든 변이 단순지지된 경우경계조건과 내부 구속조건은 다음과 같다

$$w(u) = 0 \quad (18)$$

여기서 고유진동수는 식 (15)의 λ_{k5} 에 영향을 받는다. 구성되어진 행렬식과 구성방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[S_{i,j}] \{\lambda_{k5}\}^T = \{0\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K), \\ |S_{i,j}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (19)$$

4.3 F-F-F-C 경우 내부 변위가 구속되는 평판

F-F-F-C 경우 경계조건과 내부 구속조건은 다음과 같다

$$w(0, y)_x = 0, w(a, c_2) = 0, w(u) = 0 \quad (20)$$

여기서 고유진동수는 식 (15)의 $\lambda_{k2}, \lambda_{k3}, \tau_c, v_c, \mu_p, \tau_p, v_p$ 에 영향을 받는다.

구성되어진 행렬식과 구성방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[S_{i,j}] \{\lambda_{k2}, \lambda_{k3}, \tau_c, v_c, \mu_p, \tau_p, v_p\}^T = \{0\} \\ (k = 1, 2, \dots, K, p = 1, 2, \dots, P, r = 1, 2, \dots, R, s = 1, 2, \dots, S), \\ |S_{i,j}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 2K + P + R + S + 2) \quad (21)$$

4.4 C-C-F-S 경우 내부 변위가 구속되는 평판

C-C-F-S 경우 경계조건과 내부 구속조건은 다음과 같다

$$w(a, y)_x = 0, w(0, y)_x = 0, w(a, c_2) = 0, w(u) = 0 \quad (22)$$

여기서 고유진동수는 식 (15)의 $\tau_r, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \lambda_{k5}$ 에 영향을 받는다.

구성되어진 행렬식과 구성방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[S_{i,j}] \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \lambda_{k5}, \tau_r\}^T = \{0\} \\ (k = 1, 2, \dots, K, r = 1, 2, \dots, R), \\ |S_{i,j}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 3K + R) \quad (23)$$

5. 결과

본 해석에서 사용되어진 데이터는 다음과 같다.

평판의 가로 $a=1$, 세로 $b=2$, 평판의 aspect ratio $(b/a)=2$, 왼쪽 절편 $C=0.95$, 우측 절편 $D=1.05$
 $E=200.e+9$, 평판의 두께 $t=0.01, \nu=0.3$

5.1 고유진동수

Fig. 2에는 C-C-F-C 평판 해석시 푸리에 함수를 M, N ,

R=60 인 경우 라그랑지 항수 K에 따른 1차, 2차 고유진동수의 수렴정도를 보여주고 있다. 라그랑지 항수가 30이상에서 1차 2차 모두 수렴함을 알 수 있다. Table 1에는 경계조건이 C-C-C-C, S-S-S-S, F-F-F-F, C-C-F-S 인 평판에 내부에 변위 구속조건이 있는 경우 주파수 매개변수를 본 해석방법과 유한요소 프로그램인 NASTRAN에서 10 × 20 개의 요소를 사용하여 계산한 결과와 비교하였다. Fig.3 에는 S-S-S-S 평판의 경우 내부 변위구속직선의 기울기에 따른 고유진동수 매개변수값이 나타났다.

5.2 모달함수

모달함수는 먼저 고유진동수를 구한후 해당 모드에 해당하는 푸리에 시리즈의 계수를 구함으로써 구할 수 있다.

Fig. 4 과 Fig. 5에는 C-C-C-C, F-C-F-F의 경계조건과 $\tan(\theta) = 0.1$ 의 기울기를 갖는 평판의 1차, 2차 모달함수를 보여주고 있다. 여기서 모달함수들은 변위가 구속되는 직선상의 기준으로 대칭과 비대칭 모우드가 나타나고 있다.

6. 결론

본 논문에서는 이중 푸리에 사인시리즈를 통한 해석법으로 경계조건과 내부 구속조건을 라그랑지 상수들과 스톡스 변환법으로 해결하는 방법이며 내부에 변위가 구속되는 평판의 경우에 대하여 FEM 프로그램인 NASTRAN과 본 방법으로 계산한 결과를 고찰하였으며 S-S-S-S의 경계조건에 내부구속조건이 있는 경우 FEM 계산값과 거의 일치하며 F-C-F-F 경우는 5차모우드에서 최대 3 %정도의 오차를 보이고 있다. 그리고 그 밖의 다른 경계조건의 경우에도 진동해석시 적용이 가능하다. 위의 해석 결과들을 통해 여러 경계조건을 갖는 평판에 내부 구속조건을 갖는 경우 진동해석시 타당한 접근 방법이라 할 수 있다. 앞으로 본 방법을 이용하여 보강판에 여러 경계조건이 구속되어 있는 경우 진동해석에도 이용되어 질 수 있다.

참고문헌

- [1] Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company.
- [2] Chung, H., 1981, "Analysis Method for Calculating Vibration Characteristics of Beams with Intermediate Supports," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 63, pp. 55-80.
- [3] Gorman, D. J., 1978, "Free Vibration Analysis of Rectangular Inelastic Support on the Diagonals", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 64, No. 3.
- [4] Gorman, D. J., 1979, "Solutions of the Levy Type for the Free Vibration Analysis of Diagonally Supported Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.

14, pp. 239-246.

- [5] Gorman, D. J., 1982, *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*, Elsevier North Holland Inc.
- [6] Green, A.W., 1944, "Double Fourier Series and Boundary Value Problems", *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*.
- [7] Grief, R., Mittendorf, S. C., 1976, "Structural Vibrations and Fourier Series", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 48, No. 1, pp. 113-122.
- [8] Kim, C. S., 1987, "The Flexural Vibration of Line Supported Rectangular Plate System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, pp. 129-142.
- [9] Leissa, A. W., 1969, "Vibration of Plates," Nasa Sp, 160.
- [10] Takahashi, K., T.Chishaki, T.,1978, "Free Vibrations of a Rectangular Plate on Oblique Supports", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, pp. 299-304.
- [11] Timoshenko, and S. Woinowsky-Krieger, 1959, *Theory of Plates and Shells*, New York, McGraw-Hill.

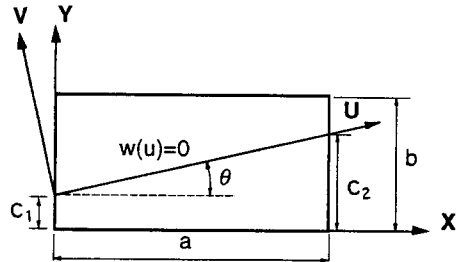


Fig. 1 Geometry and coordinate system of a plate with interior inelastic skewed line constraint

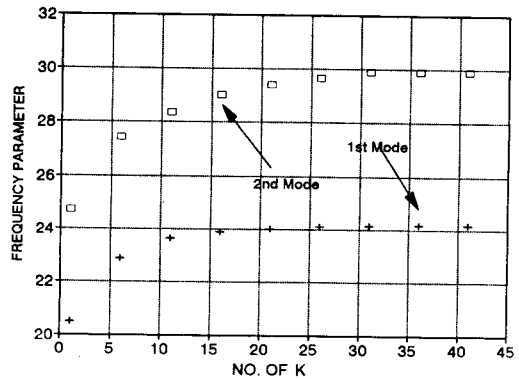


Fig. 2 The convergence of natural frequency parameters $\omega^2 \sqrt{\rho/D}$ of C-C-F-S rectangular plate with interior constraint according to K (No. of M, N=60)

Table 1 Numerical values of natural frequency parameters $\omega\alpha^2\sqrt{\rho/D}$ of a plate with different boundary conditions (No. of M, N, P, Q, R, S=50, K=30)

| B.C | Mode No. | Present method Ω | FEM Ω (NASTRAN) |
|---------|----------|-------------------------|------------------------|
| F-C-F-F | 1 | 5.35 | 5.39 |
| | 2 | 6.75 | 6.98 |
| | 3 | 19.29 | 18.89 |
| | 4 | 24.51 | 23.90 |
| | 5 | 25.33 | 24.59 |
| C-C-F-S | 1 | 24.20 | 24.89 |
| | 2 | 29.88 | 30.21 |
| | 3 | 38.97 | 37.72 |
| | 4 | 59.03 | 57.74 |
| | 5 | 63.98 | 63.89 |
| S-S-S-S | 1 | 20.04 | 19.88 |
| | 2 | 23.94 | 23.74 |
| | 3 | 49.74 | 49.19 |
| | 4 | 50.01 | 49.44 |
| | 5 | 52.60 | 51.91 |
| C-C-C-C | 1 | 32.75 | 31.98 |
| | 2 | 36.25 | 36.09 |
| | 3 | 65.00 | 63.37 |
| | 4 | 72.78 | 71.41 |
| | 5 | 74.18 | 73.73 |

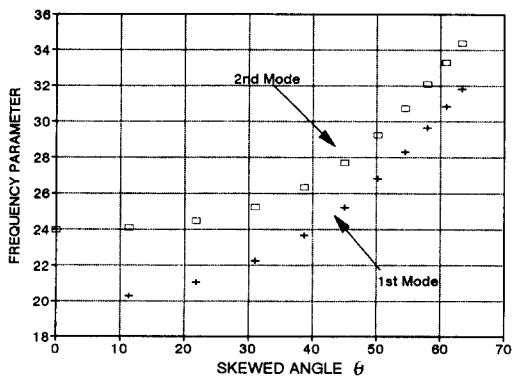
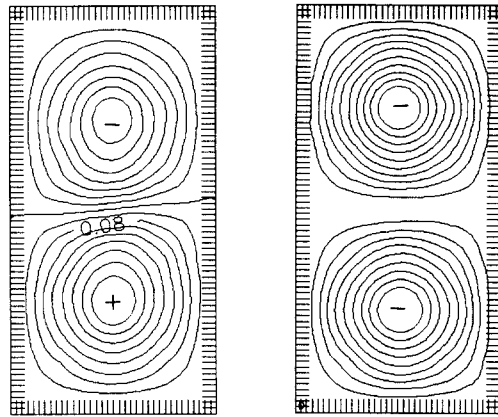


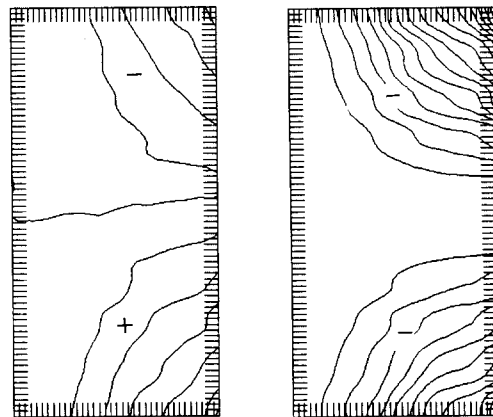
Fig. 3 The natural frequency parameters $\omega\alpha^2\sqrt{\rho/D}$ of S-S-S-S rectangular plate with interior constraint according to skewed angle (No. of M, N=20, K=5)



(a) 1st Mode

(b) 2nd Mode

Fig.4 Modal displacement functions for C-C-C-C boundary condition, (No. of M, N=20, K=18)



(a) 1st Mode

(b) 2nd Mode

Fig.5 Modal displacement functions for F-C-F-F boundary condition, (No. of M, N, P, R, S=20, K=18)